ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІНФОРМАЦІЙНО - КОМУНІКАЦІЙНИХ ТЕХНОЛОГІЙ
НАВЧАЛЬНО-НАУКОВИЙ ІНСТИТУТ ЗАХИСТУ ІНФОРМАЦІЇ
КАФЕДРА ІНФОРМАЦІЙНОЇ ТА КІБЕРНЕТИЧНОЇ БЕЗПЕКИ

Г.І. Гайдур, З.З. Бондаренко

НАВЧАЛЬНИЙ ПОСІБНИК
для підготовки до практичних занять
з навчальної дисципліни

ТЕОРІЯ ІНФОРМАЦІЇ ТА КОДУВАННЯ

Київ - 2024

УДК 621.391(075.8)
Г 14

Рекомендовано до друку Вченою радою Державного університету Інформаційно-комунікаційних технологій,
протокол № 9 від 04 березня 2024 р

Рецензенти:

Толюпа С.В. - Доктор технічних наук, професор, професор кафедри Кібербезпеки та захисту інформації, факультету інформаційних технологій Київського національного університету імені Тараса Шевченка.

Горбенко І.Д.- Доктор технічних наук, професор, професор кафедри Безпеки інформаційних систем і технологій Харківського національного університету імені Каразіна В.Н., Головний конструктор АТ «Інститут інформаційних технологій».

Теорія інформації та кодування: Навчальний посібник для підготовки до практичних занять / Уклад. Гайдур Г.І, Бондаренко З.З. – К.: ДУІКТ, 2024 – 43 с.

Навчальний посібник містить необхідні матеріали та рекомендації щодо організації самостійної роботи студентів при вивченні дисципліни Теорія інформації та кодування, а також задачі та контрольні питання до практичних робіт.

Призначено для студентів спеціальності 125 Кібербезпека та захист інформації.

Зміст

Вступ

У Теорії інформації та кодування розглядаються основні процеси передавання сигналів каналами зв'язку, питання оптимізації інформаційних потоків в системах передачі, а також основні принципи кодування та коди, що застосовуються при передачі повідомлень. Багато уваги приділяється застосуванню завадостійкого кодування, побудові коригувальних кодів., способам виявлення та виправлення помилок при обробці інформації. Застосуванню завадостійких кодів завдячує успішна робота мобільного та супутникового зв'язку.

Теоретичною базою для вивчення Теорії інформації та кодування є знання, одержані студентами при вивченні дисциплін «Вища математика», «Фізика», «Теорія ймовірності та математична статистика», «Теорія електричних кіл і сигналів». Надалі Теорія інформації та кодування допомагає зрозуміти та засвоїти питання побудови систем передачі, виділення, збереження, обробки, шифрування і захисту інформації.

Практичне заняття 1

Інформаційні характеристики сигналів. Інформаційні характеристики джерел дискретних повідомлень

Інформація – сукупність відомостей про об’єкти, події, процеси, явища, які представляють інтерес для деякого суб’єкта предметної діяльності. Слово інформація походить від латинського *information*, що означає роз’яснення. Для *передавання* або *зберігання* інформації використовують різні знаки (символи), що дозволяють виразити (надати) її в деякій формі.

Інформація, яка представлена у певній формі (звуки, текст, символи, зображення, ...) і призначена для передачі називається **повідомленням.**

Передачі повідомлень від джерела до одержувача здійснюється за допомогою будь-якого матеріального носія або фізичного процесу (наприклад, звукові та електромагнітні хвилі, струм). Фізичний процес, що відображає повідомлення, називається **сигналом**

Каналом зв'язку називається сукупність засобів для передавання електричних сигналів

Передача інформації - фізичний процес, за допомогою якого здійснюється переміщення інформації в просторі. Даний процес характеризується наявністю таких компонентів, як джерело інформації, приймач інформації, носій інформації і середовище передачі.

Передача інформації в основному полягає в передачі даних, перенесення яких здійснюється у вигляді сигналів засобами електрозв'язку. Передача даних може бути аналоговою або цифровою (тобто потік двійкових сигналів), а також модулюють за допомогою аналогової модуляції, або за допомогою цифрового кодування.

Інформація передається у вигляді повідомлень від деякого джерела інформації до її приймача за допомогою каналу зв'язку між ними. Джерело посилає передане повідомлення, яке кодується в переданий сигнал. Цей сигнал посилається по каналу зв'язку.

Засоби зв'язку - сукупність пристроїв, що забезпечують перетворення первинного повідомлення від джерела інформації в сигнали заданої фізичної природи, їх передачу, прийом і подання у формі зручній споживачеві.

Система передачі інформації - сукупність технічних засобів (передавач, приймач, лінія зв'язку), що забезпечують можливість передачі повідомлень від джерела до одержувача (Рис 1.1)

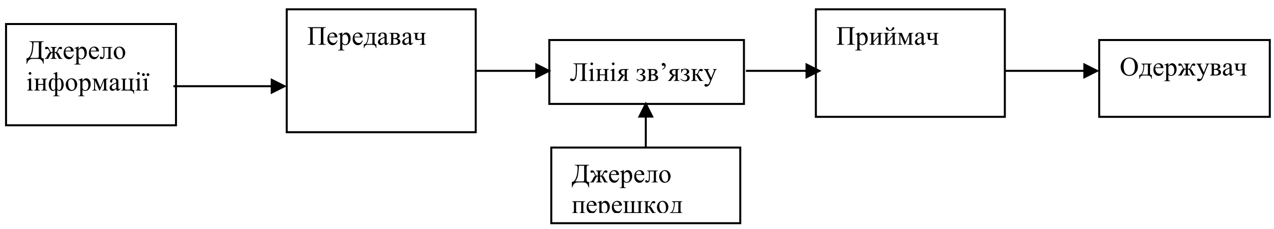

Рис. 1.1 Загальна схема системи передачі інформації

1.1 Основні характеристики сигналів.

Повідомлення, передані системою зв'язку, можуть бути величинами, які або неперервно змінюються в часі, або мають дискретний характер. Відповідно до цього сигнали, що відображають повідомлення, можуть мати також дискретний чи неперервний характер.

Дискретні сигнали є послідовністю символів, що розрізняються між собою і обрані з деякої скінченної множини елементарних символів $A_1, ..., A_n$. Передбачається, що кожний із символів A_i має певну тривалість у часі (τ_i секунд). Найпростіший приклад дискретних сигналів – телеграфні сигнали, що застосовуються для передавання чисел чи тексту.

Неперервні сигнали являють собою неперервні функції часу, два різних значення яких можуть відрізнятися одне від одного як завгодно мало. Приклади неперервних сигналів – телефонні сигнали, сигнали зображення в телебаченні.

За характером сигналів, що передаються, системи зв'язку поділяються на *дискретні системи зв'язку* і *неперервні системи зв'язку*.

Основними параметрами сигналу, що визначають його властивості як переносника інформації в системах зв'язку, є тривалість сигналу (T_c), смуга частот, займана спектром сигналу (F_c), і динамічний діапазон (D_c). Динамічний діапазон D_c – це енергетична міра сигналу, яка визначається логарифмом відношення середньої потужності сигналу до середньої потужності завад на вході лінії зв'язку:

$$D_c = \log P_c/P_з \quad (1.1)$$

Добуток основних параметрів сигналу

$$V_c = T_c F_c D_c \quad (1.2)$$

називають *об'ємом сигналу*. Об'єм сигналу є узагальненою характеристикою сигналу як носія інформації. На практиці іноді використовується геометричне зображення об'єму сигналу у вигляді прямокутного паралелепіпеда в тривимірному просторі з координатами *T,F і D* (рис. 1.2).

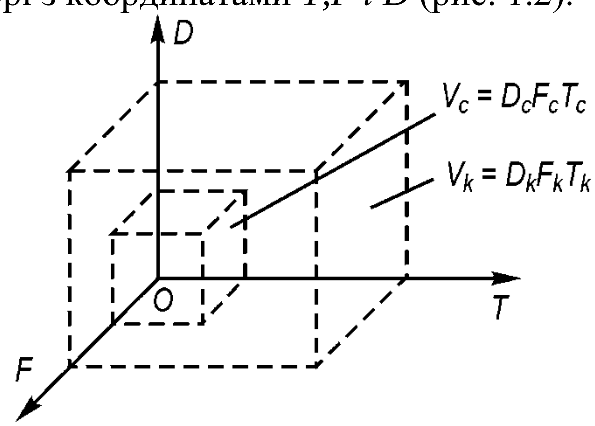

Рис. 1.2 Геометричне зображення об'єму сигналу

За аналогією з сигналами канал зв'язку, застосовуваний для передавання сигналів, характеризують наступними основними параметрами: часом роботи каналу зв'язку $T_к$, смугою частот пропускання каналу зв'язку $F_к$ і динамічним діапазоном $D_к$ (перевищенням середньої потужності сигналу над середньою потужністю завад на виході каналу зв'язку):

$$D_к = \log \frac{P_с}{P_з} \tag{1.3}$$

Добуток основних параметрів каналу зв'язку

$$V_к = T_к F_к D_к \tag{1.4}$$

називають *об'ємом* (*ємністю*) *каналу зв'язку*.

Основна умова узгодження каналу зв'язку з сигналом, виконання якої забезпечує можливість неспотвореного передавання сигналу, така:

$$T_к \geq T_с; \quad F_к \geq F_с; \quad D_к \geq D_с. \tag{1.5}$$

Повідомлення має бути перетворено в сигнал так, щоб об'єм сигналу в тривимірному просторі *T, F, D* відповідав об'єму каналу в тому самому тривимірному просторі, тобто: час передавання сигналу має збігатися з часом роботи каналу зв'язку; смуга частот сигналу має збігатися зі смугою частот каналу зв'язку; динамічні діапазони на вході і виході каналу зв'язку мають дорівнювати один одному. Тільки в цьому випадку канал зв'язку може забезпечити неспотворене передавання сигналу.

Якщо об'єм сигналу менший за об'єм каналу зв'язку або дорівнює йому, то завжди можна здійснити таке перетворення сигналу, при якому виконуватимуться умови (1.3). Отже, умова можливості узгодження сигналу і каналу зв'язку

$$V_к \geq V_с. \tag{1.6}$$

Відношення

$$r_к = \frac{V_к}{V_с} \tag{1.7}$$

називається *резервом ємності каналу зв'язку*. Резерв ємності каналу зв'язку характеризує можливості підвищення надійності каналу зв'язку.

1.2 Інформаційні характеристики джерел дискретних повідомлень

На сьогодні використовується міра інформації, введена К. Шенноном ще у 1948 р.

Кількість інформації в деякому повідомленні *а* (це може бути знак, слово, фраза, рисунок тощо) визначається його ймовірністю *P*(*a*):

$$I(a) = \log_2 (1/P(a)) = -\log_2 P(a)$$

Це співвідношення введено К. Шенноном аксіоматично. З нього випливає: чим менша ймовірність повідомлення *а*, тим більше інформації міститься у цьому повідомленні.

Одиниця виміру кількості інформації визначається **основою** логарифма, загальноприйняте обчислення логарифма з основою 2, і одиницею виміру інформації є двійкова одиниця (дв. од.) або біт. ***1 дв.од.* (*біт*) –** кількість інформації у повідомленні, ймовірність якого дорівнює 0,5. Якби логарифм брали за натуральною основою, то одиницею кількості інформації був би ***нат,*** а за десятковою основою – ***діт*** або ж ***хартлі*** (на честь Р. Хартлі)

Ентропія - це міра невизначеності знань одержувача інформації щодо стану об'єкта, що спостерігається (джерело повідомлень)

Ентропія характеризує середню кількість інформації, що припадає на один символ повідомлення. Якщо джерело видає n символів в секунду, то швидкість видачі інформації становитиме $R_i = nH$.

Максимальну ентропію має джерело рівноймовірних незалежних повідомлень

Для рівноймовірно незалежних повідомлень

$$H_1 = \log_2 N = n \log_2 m$$

Для нерівноймовірно незалежних повідомлень

$$H_2(A) = -\sum_{i=1}^{m} p(a_i) \log p(a_i)$$

Ентропія джерела дискретних повідомлень набуває лише невід'ємні значення, *оскільки ймовірності знаків* $P(a_k) \leq 1$, *а логарифм числа, що не перевищує одиницю, від'ємний або нуль.*

Надмірність джерела повідомлень – це його властивість видавати інформацію більшою кількістю знаків, ніж можна було б. Кількісно надмірність джерела повідомлень *А* характеризується ***коефіцієнтом надмірності***, який розраховується за формулою

$$K = \frac{H_{\max} - H(A)}{H_{\max}}$$

Продуктивність джерела - це середня кількість інформації, яку видає джерело у одиницю часу.

$$H'(A) = \frac{H(A)}{T_C}$$

T_c – тривалість сигналу, який використовують для передачі одного символу

Контрольні питання

1 Дати визначення понять – інформація, повідомлення, сигнал.
2 Якими узагальнюючими характеристиками визначаються сигнал і канал передачі інформації?
3 Що таке об'єм сигналу і об'єм каналу?
4 Які необхідні і достатні умови для узгодження сигналу з каналом передачі інформації?
5 Чому потрібно узгоджувати сигнал з каналом передачі інформації?
6 Чому застосовується логарифмічна міра кількості інформації?
7 Що в теорії інформації називають ентропією джерела та як вона визначається для джерел незалежних і залежних повідомлень?
8 Пояснити, яка різниця в одиницях виміру – дв.од., біт, дв.од./с, біт/с.
9 Пояснити, яке відношення має одиниця виміру кількості інформації "біт" до двійкової системи числення.
10 Дати визначення понять – продуктивність та надмірність джерела повідомлень.
11 Перелічити причини появи надмірності джерела.
12 Чому дорівнює максимальна ентропія двійкового джерела незалежних повідомлень і за яких умов вона має місце?

Задачі для самостійної роботи

Задача 1. На виході каналу маємо сигнал з визначеними параметрами:

$\Delta F_c = 3.1\, кГц$, $P_C = 8 мВт$ $P_з = 2 мВт$, $T_c = 8с$

Визначити об'єм сигналу.

Рішення
3100x8x $\log_2$ 0,008/0,002 =49600

Задача 2. В скільки разів фізичний обсяг ТВ сигналу перевершує фізичний обсяг РВ сигналу при однаковій їх тривалості. Fтв = 6,5 МГц, Fрв = 12 кГц. (Динамічні діапазони сигналів вважати однаковими).

Задача 3. Канал зв'язку з смугою Fк = 10 кГц передбачається використовувати протягом 10 с. У каналі діє шум з рівномірною спектральною щільністю потужності $G_Ш = 10^{-4}$ мВт / Гц. Яка гранична потужність сигналу, який може бути переданий по каналу, якщо фізичний об'єм каналу Vк = 1000000.

Задача 4. Знайти кількість інформації в послідовності з шести знаків від деякого датчика, за умови, що знаки джерела рівноймовірні та незалежні, а обсяг джерела $M_A = 16$.

Розв'язання. Якщо знаки рівноймовірні, то імовірність кожного з них $P(ak) = 1/M_A = 1/16$, кожен знак за формулою ($I(ak) = \log_2 (1/P(ak)) = -\log_2 1/16 =$
$= -(-\log_2 16)$ несе $I(a_k) = \log_2 16 = 4$ дв.од. інформації. Кількість інформації в послідовності 6 знаків буде дорівнювати:

$$I(ak) = 6\times4 = 24 \text{ дв.од.}$$

Задача 5. Знайти кількість інформації у слові українського тексту ***Одеса***, вважаючи, що літери в текстах незалежні.

Розв'язання. Ймовірності літер українського тексту наведено в додатку 2. За формулою ($I(ak) = -\log_2 P(ak)$) вони містять такі значення кількості інформації: I(о) = 3,29 дв. од.; I(д) = 5,16 дв.од.; I(е) = 4,44 дв. од.; I(с) = 4,71 дв. од.; I(а) = 3,55 дв. од. Таким чином, кількість інформації у слові ***Одеса*** дорівнює

$$I_{сл} = 3{,}29 + 5{,}16 + 4{,}44 + 4{,}71 + 3{,}55 = 21{,}15 \text{ дв. од.}$$

Задача 6. Знайти кількість інформації в слові ***ентропія***, якщо вважати, що літери незалежні. Імовірності літер українського змістовного тексту надані в додатку 2.

Задача 7. Знайти кількість інформації в слові ***university***, якщо вважати, що літери незалежні. Імовірності літер англійського тексту надані в додатку.

Задача 8. Визначити кількість інформації, яка міститься в текстовому повідомленні - Вашому прізвищі, враховуючи розподіл імовірностей літер алфавіту. Оцінити надмірність повідомлення.

Задача 9. Визначити ентропію джерела дискретних повідомлень та коефіцієнт надмірності, якщо статика розподілу ймовірностей появи символів на виході джерела повідомлень представлена наступною схемою:

$$A = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 & a_7 & a_8 & a_9 & a_{10} \\ 0,35 & 0,035 & 0,07 & 0,15 & 0,07 & 0,07 & 0,07 & 0,035 & 0,08 & 0,07 \end{vmatrix}$$

Рішення:

$$H_2(A) = -\sum_{i=1}^{m} p(a_i)\log p(a_i) \quad \text{Hmax} = \log_2 N$$

$$K = \frac{H_{max} - H(A)}{H_{max}}$$

$H_2(A) = -(0{,}35\log0{,}35+2*0{,}035\log0{,}035+5*0{,}07\log0{,}06+0{,}15\log0{,}15+ 0{,}08*\log0{,}08)$

$$K = \frac{H_{max} - H(A)}{H_{max}} = \frac{\log 10 - H(A)}{\log 10}$$

Задача 10 Визначити ентропію слова Гайдур та коефіцієнт надмірності. Ймовірності літер українського тексту наведено в додатку 2

Розв'зання

Н(Гайдур)= Н(А) = - Σ p(ai) $\log_2$ p(ai) = -(0,015 $\log_2$0,015+0,085 $\log_2$0,085 + +0,019 $\log_2$0,019+0,028 $\log_2$0,028+0,036 $\log_2$0,036+0,045 $\log_2$0,045)=1,0358

Максимальна ентропія

Hmax = log N = $\log_2$ 32= 5 біт,

Коефіцієнт надмірності

χ = 1 - Н(Гайдур)/Hmax= 1-1,0358/5 = 0,79

Задача 11 Маємо два дискретних джерела інформації з алфавітами $X = \{x_1, x_2, x_3\}$ та $Y = \{y_1, y_2, y_3\}$ з такими розподілами ймовірностей появи символів:

$p(x_1) = 0{,}7$; $p(x_2) = 0{,}2$; $p(x_3) = 0{,}1$;

$p(y_1) = 0{,}4$; $p(y_2) = 0{,}35$; $p(y_3) = 0{,}25$.

Не розраховуючи ентропії джерел, дати відповідь, яке з них має більшу ентропію.

Розв'язання. Оскільки розподіл імовірностей появи символів на виході джерела з алфавітом Y є більш близьким до рівноймовірного, ентропія цього джерела буде більшою, ніж джерела з алфавітом X .

Розрахунки підтверджують цей висновок:

$$H(Y) = 1{,}56 > H(X) = 1{,}16.$$

Задача 12 Джерела *А* і *В* мають розподіли ймовірностей повідомлень P_A= {0,1 ; 0,1 ; 0,15; 0,125; 0,125; 0.1: 0,15; 0,15) і P_B = {0,5; 0,3; 0,1 ; 0,025; 0,025; 0,02; 0,015; 0,015}, Ентропія якого джерела більша? Яка максимальна ентропія цього джерела та за якої умови?

Задача 13 Джерело дискретних повідомлень видає повідомлення, використовуючи M_A = 8 знаків. Ентропія джерела 2,5 дв.од. Обчислити коефіцієнт надмірності джерела.

Практичне заняття 2

Розрахунок імовірності помилки при прийомі елемента сигналу

Потрібно розрахувати імовірність р помилки прийому елемента сигналу, яка характеризує завадостійкість системи зв'язку. Завадостійкість системи зв'язку залежить від виду сигналу, завад, діючих в неперервному каналі, і методу прийому.
Розглянемо потенційну завадостійкість систем з АМ, ЧМ, ФМ.

Якість прийому характеризується ймовірністю помилки $P_{пом}$. Величина ймовірністі помилки в прийомі елемента сигналу визначається за формулою

$$p = 0,5\,[\,1 - \Phi(\gamma\, h)] \qquad (1)$$

де $\Phi(x)= \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int e^{-t^2/2}\,dt$ функція Крампа (див. Додаток 1)

коефіфіцієнт γ в залежності від виду модуляції приймає значення:

$\gamma = 1/\sqrt{2}$ при АМ,
$\gamma = 1$ при ЧМ,
$\gamma = \sqrt{2}$ при ФМ.

$$h = \sqrt{E/N} \qquad (2)$$

E - енергія сигналу;
N - спектральна щільність потужності шуму

Задача 1
Розрахувати ймовірність ***p*** помилки прийому елемента в каналі ТЧ для АМ при заданих значеннях рівня сигналу на виході каналу ($p_{с\ вих}$= -44,0дБ) та напруги завади ($U_з$ =1,6 мВ) U_0 = 0,775В. Швидкість модуляції В= 600 Бод

Розв'язання

$p = 0,5\,[\,1 - \Phi(\gamma\, h)]$ для АМ $\gamma = 1/\sqrt{2}$ $h = \sqrt{E/N}$

Енергію сигналу визначаємо за формулою:

$$E = P_{свих} \cdot \tau_0\,, \text{ де } \tau_0 = \frac{1}{B} \qquad (3.1)$$

Спектральну щільність потужності шуму визначаємо за формулою:
$N = P_з / \Delta F$ де $\Delta F = B$ (3.2)
Враховуючи це, отримаємо $h = \sqrt{P_{с\ вих} / P_з}$

$$P_{свих} = \frac{U_c^2}{R} \qquad P_з = \frac{U_з^2}{R} \qquad h = \sqrt{\frac{U_c^2}{U_з^2}} \qquad (4)$$

Знаючи рівень сигналу, можна знайти напругу сигналу за формулою:

$P_{с\ вих} = 20\log U_c / U_0$ тоді $Uc = U_0 * 10^{Pс\ вих/20}$, де U_0=0,775 В (5)

Підставимо тепер у формулу 5, і отримаємо:

$$Uc = 0{,}775 * 10^{-44/20} = 5 \text{ мВ}$$

Uз =1,6мВ

- Підставимо тепер у формулу 4 і отримаємо:

$$h = \sqrt{\frac{(5 \times 10^{-3})^2}{(1{,}6 \times 10^{-3})^2}} = 3{,}125$$

Розрахуємо значення ймовірності для АМ. Функцію Крампа знаходимо за таблицею (додаток 1)

$$p_{AM} = 0{,}5(1 - \Phi(\frac{1}{\sqrt{2}} \times h) = 0{,}5 \times (1 - 0{,}9722) = 0{,}014$$

Контрольні питання
1 Від чого залежить завадостійкість системи зв’язку?
2 При якій модуляції завадостійкість системи зв’язку найвища?
3 Як визначити ймовірністі помилки в прийомі елемента сигналу.

Задача для самостійної роботи

Розрахувати ймовірність ***p*** помилки прийому елемента в каналі ТЧ для АМ, ЧМ, ФМ при заданих в табл.1.2 значеннях рівня сигналу на виході каналу $p_{с\ вих}$ та напруги завади $U_з$. U_0 = 0,775В. Швидкість модуляції В= 1200 Бод.

Таблиця 1.2

Параметр	Остання цифра номера по списку								
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$P_{с\ вих}$, дБ	-44,0	-44,4	-44,6	-45,0	-45,3	-46,0	-46,4	-46,6	-47,0
$U_{п\ еф}$, мВ	1,0	1,1	1,2	1,3	1,4	15	1,6	1,7	1,8

Практичне заняття №3

Теорема Найквіста-Шеннона-Котельникова або теорема відліку

Для передачі безперервних повідомлень використовується дискретизація. Завдання вибору оптимального інтервалу дискретизації вирішується на підставі теореми Найквіста-Шеннона-Котельникова.

Теорема Найквіста-Шеннона-Котельникова говорить про те, що якщо будь який аналоговий сигнал має обмежений по ширині спектр, то він може бути відновлений без втрат за своїми дискретними відліками, взятими з частотою рівною або більшою за подвоєну верхню частоту спектру сигналу

$$F_d \geq 2F_m$$

Неперервний сигнал s(t) з обмеженим спектром може бути точно відновленим за його відліками s(kΔt), які взяті через інтервали $\Delta t = 1/2F_m$, де – F_m верхня частота спектру сигналу.

Функція S(t), яка припускає перетворення Фур'є і має безперервний спектр, обмежений смугою частот від 0 до F повністю визначається дискретним рядом своїх миттєвих значень, відрахованих через інтервали часу $\Delta t = 1 / 2F_m$, де F_m - верхня (максимальна) частота спектру, Δt - інтервал дискретизації. Значення функції в будь-який момент часу t виражається формулою:

$$\frac{\sin 2\pi F(t - k\Delta t)}{2\pi F(t - k\Delta t)}$$

Де k-номер відліку, S (kΔt) - відліки неперервної функції в дискретних точках t = kΔt, а все в цілому - базисна функція ряду Котельникова, функція відліку.

Кожна складова цієї формули по фізичному змісту являє собою відгук ідеального фільтра нижніх частот з частотою зрізу F на вельми короткий імпульс, що приходить в момент часу t = k**Δ**t і має площу, рівну миттєвому значенню функції відліків в цей же момент. При передачі по каналу зв'язку сигналу S (t) з обмеженим спектром, необхідно через рівні інтервали часу t = 1 / 2F взяти відліки миттєвих значень сигналу і передати по каналу короткі імпульси, площі яких пропорційні цим відлікам. На приймальному кінці ці імпульси пропускають через фільтр нижніх частот і вихідний сигнал відновлюється як сума відгуків фільтра.

Сигнал кінцевої тривалості буде визначатися ν = 2TF, ν - база сигналу. Величина, зворотна інтервалу дискретизації називається частотою дискретизації

$$f_\partial = \frac{1}{\Delta t} \geq 2F \text{ .}$$

Контрольні питання

1 Як визначається частота дискретизації за теоремою відліків?
2 Як визначається інтервал дискретизації за теоремою відліків?
3 Сформулюйте теорему Найквіста-Шеннона-Котельникова.
4 Як відновити сигнал за його відліками на приймальному кінці?

Задачі для самостійної роботи

Задача 1. Визначити частоту дискретизації телефонного сигналу.
0,3-3,4 кГц,

Розв'язок: Fв=3400 Гц; $F_д \geq 2F_в$; $2F_в$ =2*3400= 6800 Гц = 6,8 кГц

Задача 2. Сигнал звукового супроводу в телевізійному каналі обмежений верхньою частотою Fв = 12 кГц Визначити інтервал Δt між відліками цього сигналу, необхідний для неспотвореного відтворення сигналу, при передачі його дискретним способом.

Розв'язок: $\Delta t=1/2F_в$ $\Delta t=1/(2*12000)=0{,}0416$ мс

Задача 3 Визначити інтервал та частоту дискретизації сигналу, мінімальна частота якого становить 100 кГц, а ширина спектру 300 кГц

Задача 4 Визначити інтервал та частоту дискретизації сигналу, середня частота якого становить 400 кГц, а ширина спектру 800 кГц

Задача 5 Визначити інтервал та частоту дискретизації сигналу, мінімальна частота якого становить 50 кГц, а ширина спектру 450 кГц

Задача 6 Визначити інтервал та частоту дискретизації сигналу, середня частота якого становить 9 кГц, а ширина спектру 2 кГц

Задача 7 Визначити інтервал дискретизації радіосигналу з середньою частотою 2 МГц, який застосовується для передачі первинного сигналу з шириною спектру 4 кГц.

Задача 8 Сигнали з якою шириною спектру можна оцифровувати за допомогою АЦП, який має частоту дискретизації 100кГц і який при цьому буде інтервал дискретизації?

Задача 9 Сигнал u (t), дискретизований відповідно до теореми Котельникова, має 2 відліки. Обчислити миттєві значення вихідного аналогового сигналу в момент часу t = 1мкс?

Розв'язання

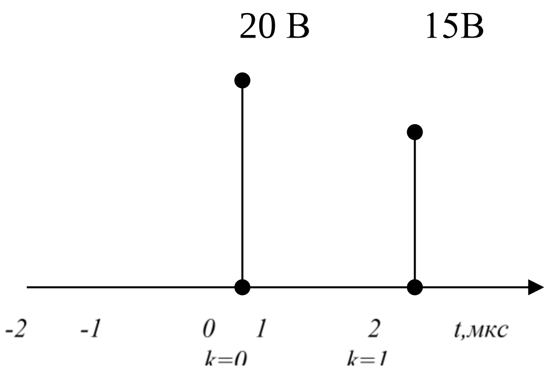

Рисунок 2.1

Визначимо інтервал дискретизації (з рис.2.1)

$\Delta t=2*10^{-6}$ с

$F_в = 1/2\Delta t$ $F_в = 1/4*10^{-6} = 0,25*10^{6}$ Гц

$$s(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} S(k\Delta t)\frac{\sin 2\pi F(t-k\Delta t)}{2\pi F(t-k\Delta t)}$$

$$s(1x10^{-6}) = 20\times\frac{\sin 2\pi\times 0,25\times 10^{6}\times 10^{-6}}{2\times 3,14\times 0,25\times 10^{6}\times 10^{-6}} + 15\times\frac{\sin 2\pi\times 0,25\times 10^{6}\times(1\times 10^{-6}-1\times 2\times 10^{-6})}{2\times 3,14\times 0,25\times 10^{6}\times(1\times 10^{-6}-1\times 2\times 10^{-6})}$$

$$s(1\bullet 10^{-6}) = 20\frac{1}{1,57}+15\frac{-1}{-1,57}=12,738+9,554=22,29$$

Практичне заняття 4
Загальні поняття про кодування
Прості коди. Коди, які виявляють помилки.

При кодуванні елементи повідомлень перетворюються в відповідні їм числа. При кодуванні кожному елементу повідомлення присвоюється певна сукупність кодових символів, званих **кодовою комбінацією**. Сукупність кодових комбінацій називається **кодом**.

Розглянемо приклад передачі тексту. Текст складається з букв, цифр, розділових знаків і т.д., які можуть бути закодовані (пронумеровані) за допомогою будь-якої системи числення. Наприклад, будь-яке число в десятковій системі може бути представлено як:

$$N=\ldots+a_2 10^2+a_1 10^1+a_0 10^0 ,$$

Де a_i має значення від 0 до 9.

Для будь-якої системи числення буде вірно:

$$N=\ldots+a_2 m^2+a_1 m^1+a_0 m^0 ,$$ де

a_i має значення від 0 до m-1.

Для двійкової системы:

$$N=\ldots+2^2+2^1+2^0$$ де

a_i має значення від 0 до 1.

4.1 Переведення десяткового числа в двійкове.

4.1.1 Метод віднімання.

Цей метод полягає в проведенні послідовності операцій вирахування з заданого числа чисел, які відповідають найбільшою можливою мірою числу 2^n і при цьому не перевищують задане число. Якщо таке число 2^n існує, то коефіцієнт a_i = 1, в іншому випадку a_i = 0.

Наприклад, 53

	2^5	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0
_53	1	1	0	1	0	1

32------- - >2^5-------
_21
16------- - > 2^4——
_5
4-------- -> 2^2——
_1
1------- -> 2^0——
-
$(53)_{10}$` = $(110101)_2$

4.1.2 Метод ділення.

Для переведення десяткового числа в двійковий еквівалент використовуємо розподіл на 2. Розділимо десяткове число на 2, якщо є залишок, запишемо 1 в молодший розряд, якщо залишку немає, в молодший двійковий розряд запишемо 0, ділимо частковий залишок на 2 і т .д.

Наприклад, для перекладу числа 53 в двійкову систему:

$$\frac{53}{2} = 26 + \frac{1}{2}; \quad \frac{26}{2} = 13 + \frac{0}{2}; \quad \frac{13}{2} = 6 + \frac{1}{2}; \quad \frac{6}{2} = 3 + \frac{0}{2}; \quad \frac{3}{2} = 1 + \frac{1}{2}; \quad \frac{1}{2} = 0 + \frac{1}{2};$$

Залишок від ділення є коефіцієнт при переході від молодших розрядів до старших.

У цифрових пристроях надзвичайно широко використовується найпростіший розділ математичної логіки - булева алгебра. Базовим поняттям булевої алгебри є поняття висловлювання, під яким розуміється будь-яке твердження, що розглядається тільки з точки зору його істинність або хибність.

Висловлення можна розглядати як логічний змінну, яка може набувати різних значень, наприклад, висловлювання "сьогодні понеділок" буде істинним в понеділок і хибним в усі інші дні тижня. Обчислення висловлювань якраз і ґрунтується на тому, що їх можна розглядати як двійкові змінні, які можуть приймати одне з двох своїх значень. Прикладами двійкових логічних змінних є розряди чисел, представлених в двійковій системі числення; замкнутий або розімкнутий контакт; наявність або відсутність струму в ланцюзі; високий або низький потенціал в будь-якій точці схеми і т.п.

Арифметичні дії в двійковій системі прості:

0+0=0; 0+1=1; 1+0=1; 1+1=10;

Часто в теорії кодування використовують порозрядное складання без перенесення в старший розряд, так зване складання по модулю 2

$$1 \oplus 0 = 1 \quad 0 \oplus 1 = 1 \quad 0 \oplus 0 = 0 \quad 1 \oplus 1 = 0$$

Для передачі послідовності двійкових символів досить передавати 2 кодових символи. Правила кодування задаються таблицею, в якій наводиться алфавіт кодованих повідомлень і відповідні їм кодові комбінації.

Кількість розрядів n в кодовій комбінації називається **значністю коду**. Кількість одиниць в коді називається **вагою кодової комбінації**. Ступінь відмінності кодових комбінацій характеризується **кодовою відстанню d** - виражається числом позицій, за якими комбінації розрізняються, і визначається як вага суми по модулю 2 кодових комбінацій.

ПРИКЛАД:

Прийнято комбінації 0001 і 1111. Визначити значність кодових комбінацій їх вагу і кодову відстань між комбінаціями.

0001: значность = 4, вага = 1.

1111: значность = 4, вага = 4.

Кодова відстань: 0 0 0 1

$\oplus$ 1 1 1 1

1 1 1 0 - вага суми по мод 2 → d = 3

4.2 Прості цифрові коди.

Такі коди широко використовуються при передачі безперервних повідомлень при перетворенні їх в цифровий вигляд після дискретизації і квантування.

Типовим представником таких кодів є двійковий натуральний код. Комбінації коду представляють собою запис натуральних чисел в двійковій системі числення

До простих цифрових кодів також відносяться коди, у яких сусідні комбінації відрізняються на один розряд. До них відносяться так звані симетричні або рефлексні коди. Представником таких кодів є код Грея. В n- значному коді Грея вісь симетрії проходить між числами ($2^{n-1} - 1$) та 2^{n-1}.

Комбінації коду виходять наступним чином: кодова комбінація двійкового простого коду порозрядно складається за модулем 2 з такою самою комбінацією, зсунутою на один розряд вправо. При цьому молодший розряд зрушеної комбінації відкидається, див. табл. 4.2.1.

Таблиця 4.2.1

Десяткове число	Натуральний двійковий код	Код Грея
0	0000	0000
1	0001	$\oplus\frac{0001}{0000}\rightarrow 0001$
2	0010	$\oplus\frac{0010}{0001}\rightarrow 0011$
3	0011	$\oplus\frac{0011}{0001}\rightarrow 0010$
4	0100	$\oplus\frac{0100}{0010}\rightarrow 0110$
5	0101	$\oplus\frac{0101}{0010}\rightarrow 0111$
6	0110	$\oplus\frac{0110}{0011}\rightarrow 0101$
7	0111	$\oplus\frac{0111}{0011}\rightarrow 0100$
8	1000	$\oplus\frac{1000}{0100}\rightarrow 1100$

4.3 Коди, що виявляють помилки

4.3.1 Код із перевіркою на парність

Це найпоширеніший код, який застосовується для виявлення поодиноких помилок і всіх помилок непарної кратності. Код містить $(n - 1)$ інформаційних й один перевірний елементи, належить до систематичних кодів і позначається як $(n, n - 1)$-код.

Перевірний елемент коду визначається сумою за модулем 2 всіх інформаційних елементів: тобто він утворюється доповненням комбінації k-елементного первинного коду одним елементом таким чином, щоб кількість одиниць у новому n -розрадному ($n = k + 1$) коді була парною. Кодова відстань $d_{\min}=2$.

4.3.2 Код із простим повторенням

Код із простим повторенням (без інверсії) є подільним лінійним кодом. Він містить k інформаційних і $r = k$ перевірних елементів. у цьому коді r перевірних елементів є простим повторенням k інформаційних елементів первинної кодової комбінації: $b_i = a_i$, де $i = 1 \ldots k$.

Через те, що код має відстань $d_{\min}=2$, він може використовуватися для виявлення поодиноких помилок. Ця процедура зводиться до порівняння однойменних інформаційних і перевірних елементів у прийнятій кодовій комбінації. Незбіг їх свідчить про наявність помилок у ній. Код дає змогу виявити не тільки однократні помилки, а й деякі помилки більшої кратності, за винятком «дзеркальних», коли в інформаційній та перевірній послідовностях кодової комбінації внаслідок дії завад спотворюються елементи, що знаходяться на однакових за номером розрядах.

4.3.3 Інверсний код

В основу побудови інверсного коду покладено метод повторення вихідної комбінації по наступному закону: якщо кодова комбінація містить парне число одиниць, то перевірочна в точності повторює вихідну, якщо -непарне, то перевірочна є інверсія вихідної.

01010 → на вих. кодера 0101001010

01110 → на вих. кодера 0111010001

Декодер здійснює перевірку кодової комбінації на парність. Якщо число 1 парне, то комбінація приймається в незмінному вигляді, якщо - ні, то перевірочна частина комбінації інвертується. Далі слідує поелементне порівняння інформаційної та перевірочної частин комбінації. При виявленні розбіжності комбінація бракується.

Контрольні питання

1. Як перейти з однієї системи числення до іншої?
2. Що таке значність і вага коду?
3. Що таке кодова відстань?
4 Які характерні особливості коду Грея?
5 Які особливості побудови двійкового коду з перевіркою на парність?
6. Чим відрізняється двійковий код із перевіркою на непарність від аналогічного коду з перевіркою на парність?
7. Які особливості побудови двійкового інверсного коду?
8. Чим відрізняється двійковий код із простим повторенням від інверсного?
9. Які коди належать до кодів, що виявляють помилки?
10. Де використовуються коди, що виявляють помилки?

Задачі для самостійної роботи

Задача 1
Закодувати двійковим кодом шляхом віднімання наступні числа
15, 17, 34, 91, 127, 128, 129

Задача 2
Закодувати двійковим кодом шляхом ділення наступні числа
14, 88, 125

Задача 3
Записати десяткове число 382 у вісімковій системі числення.

Розв'язання. Виконуємо послідовне ділення десяткового числа 382 на основу вісімкової системи числення :
382 : 8 = 47 + (остача 6); 47 : 8 = 5 + (7); 5 : 8 = 0 + (5).
Записуємо остачі від ділення так: 576. Це і є записом десяткового числа 382 у вісімковій системі числення.

Задача 3.а Запишіть кодові комбінації, відповідні числу 45, при основі коду m = 2, 3, 4, 8, 10. Як змінюється число розрядів і число використовуваних цифр в слові зі зміною основи коду?

Задача 4
Скласти арифметично в двійковій системі 1101101 і 1101101, скласти ті самі числа за модулем 2.

Розв'язання.
Скласти арифметично в двійковій системі

$$\begin{array}{r} 1101101 \\ \underline{1101101} \\ 11011010 \end{array}$$

Скласти наведені вище двійкові послідовності за модулем 2

$$\begin{array}{r} 1101101 \\ \oplus\ \underline{1101101} \\ 0000000 \end{array}$$

Задача 4а

Скласти арифметично в двійковій системі числа 1101101 і 1011011, скласти ті самі числа за модулем 2.

Задача 5

Визначити кодову відстань між комбінаціями A і B двійкового коду та записати всі комбінації, які знаходяться від комбінації A на кодовій відстані d = 3, якщо A = 01001, B = 11101.

Розв'язання. Щоб визначити кодову відстань між комбінаціями A та B знаходимо поелементну суму за модулем 2 цих комбінацій :

A ⊕B =01001

⊕

11101

10100 ;

одержуємо комбінацію C = 10100, вага якої w = 2. Тобто в комбінаціях A і B у трьох однойменних розрядах (на 1-му справа, 2-му і 4-му) знаходяться однакові символи, а на двох (на 3-му справа і 5-му) – різні, сукупність яких і визначає степінь різниці між комбінаціями A та B. Вага комбінації C є кодовою відстанню Хеммінга між комбінаціями A та B.

Будь-яка комбінація ваги w = 3, якщо її порозрядно додати за модулем 2 до комбінації A (такої ж довжини), дає нову комбінацію, яка буде знаходитися від комбінації *A* на кодовій відстані *d* = 3. Кількість таких комбінацій буде дорівнювати кількості сполучень з *n* = 5 по *d* = 3 :

$$C_5^3 = \frac{n!}{d!(n-d)!} = \frac{5!}{3!(5-3)!} = 10.$$

Ці комбінації одержуємо, додаючи порозрядно до комбінації *A* почергово всі десять комбінацій з вагою 3:

$$\oplus\begin{array}{c} 01001 \\ \underline{00111} \\ 01110 \end{array} \quad \oplus\begin{array}{c} 01001 \\ \underline{01011} \\ 00010 \end{array} \quad \oplus\begin{array}{c} 01001 \\ \underline{01101} \\ 00100 \end{array} \quad \oplus\begin{array}{c} 01001 \\ \underline{01110} \\ 00111 \end{array} \quad \oplus\begin{array}{c} 01001 \\ \underline{10011} \\ 11010 \end{array}$$

$$\oplus\begin{array}{c} 01001 \\ \underline{10101} \\ 11100 \end{array} \quad \oplus\begin{array}{c} 01001 \\ \underline{10110} \\ 11111 \end{array} \quad \oplus\begin{array}{c} 01001 \\ \underline{11001} \\ 10000 \end{array} \quad \oplus\begin{array}{c} 01001 \\ \underline{11010} \\ 10011 \end{array} \quad \oplus\begin{array}{c} 01001 \\ \underline{11100} \\ 10101 \end{array} .$$

.Таким чином одержуємо такі 10 комбінацій, які знаходятьсявід комбінації A на кодовій відстані $d = 3$: 01110, 00010, 00100, 00111, 11010, 11100, 11111, 10000, 10011, 10101.

Задача 6
Побудувати всі комбінації n - елементного (розрядного) двійкового простого коду, які знаходяться від двійкової комбінації A на кодовій відстані d = 2, якщо A = 10101, n = 5.

Задача 7. Перетворити у двійковий код Грея комбінацію двійкового простого коду 1101001101.
Розв'язання. Для перетворення комбінації двійкового простого коду в комбінацію коду Грея обчислюємо суму за модулем 2 комбінації простого коду з такою ж комбінацією, але зсунутою вправо на один розряд, і без урахування останнього (молодшого) розряду у зсуненій комбінації:

$$\begin{array}{r@{}l} & 1101001101 \\ \oplus & \;\;110100110(1) \\ \hline & 1011101011 \quad . \end{array}$$

Таким чином, комбінація коду Грея має вигляд:
1011101011.

Задача 8 Перетворити комбінацію 0110110000 двійкового коду Грея у комбінацію двійкового простого коду.
Розв'язання. Для перетворення комбінації двійкового коду Грея в комбінацію двійкового простого коду переписуємо старший розряд комбінації коду Грея без зміни і далі виконуємо послідовне підсумовування за модулем 2 розрядів кодової комбінації коду Грея першого (старшого) розряду і другого ($1 \oplus 2$), а потім послідовно $1 \oplus 2 \oplus 3$, $1 \oplus 2 \oplus 3 \oplus 4$ і т. д.
Порівнюючи одержану комбінацію коду Грея із заданою умовою задачі, впевнюємося у правильності виконаного перетворення комбінації коду Грея у комбінацію двійкового простого коду.

Таким чином одержуємо комбінацію двійкового простого коду: 0100100000.
Перевіряємо правильність перетворення. Для цього виконаємо перетворення комбінації одержаного двійкового простого коду у комбінацію коду Грея (порядок перетворення див. у задачі 10):

$$\begin{array}{r@{}l} & 0100100000 \\ \oplus & \;\;010010000(0) \\ \hline & 0110110000 \quad . \end{array}$$

Порівнюючи одержану комбінацію коду Грея із заданою умовою задачі, впевнюємося у правильності виконаного перетворення комбінації коду Грея у комбінацію двійкового простого коду.

Задача 9. Перетворити у двійковий код Грея комбінацію двійкового простого коду та показати процес зворотного перетворення одержаної комбінації двійкового коду Грея у комбінацію двійкового простого коду згідно варіантів, які подані в таблиці 1.9.

Таблиця 1.9

№ варіанта	Комбінація двійкового простого коду	№ варіанта	Комбінація двійкового простого коду
1	001011101101	10	0101010101011
2	11001101110101	11	1101101100111
3	1011110001101	12	11110100110101
4	01101101110110	13	0110110111001
5	00110001111011	14	0101010111110
6	1001100101010	15	10101011101010
7	000110110101	16	1101010010111
8	110001101011	17	001011101101
9	001011100111	18	100110110110

Задача 10 Закодувати комбінацію 0110110 двійкового простого коду (n = 7) двійковими кодами що виявляють помилки: з перевіркою на парнісгь і простим повторенням. Виявити однократну помилку та порівняти надмірності цих кодів.
Розв'язання. Комбінація коду з перевіркою на парність матиме вигляд A_1=01101100, а коду з простим повторениям — вигляд A_2 = 01101100110110**.**

Нехай в комбінації коду з первіркою на парність виникла однократна помилка, вектор якої E_1 = 00100000. Тоді сума $A_1 \oplus E_1$ = 01001100. У цьому разі сума за модулем 2 елементів утвореної кодової комбінації дорівнює 1, тобто непарна, що вказує на наявність у ній помилки. Надмірність коду = 1 - 7/8 = 0,125. Нехай в комбінації коду з простим повторенням вектор однократної помилки буде E_2 = 00010000000000. Тоді сума $A_2 \oplus E_2$ = 01111100110110.
Перевіряючи першу та другу частини кодової комбінації (додаючи їх за модулем 2), дістаємо остачу, яка не дорівнюватиме нулю:

$$
\begin{array}{r}
0111110 \\
\oplus\ \underline{0110110} \\
0001000,
\end{array}
$$

що вказує на наявність помилки в прийнятій кодовій комбінації. Надмірність коду = 0,5.

Задача 11 Закодувати комбінацію 1110010 двійкового простого коду двійковими кодами, що виявляють помилки: з перевіркою на парність і простим повторенням. Виявити однократну помилку та порівняти надмірності цих кодів.

Задача 12 Закодувати всіма двійковими кодами, що виявляють помилки, двійкове подання числа поточного дня тижня. Виявити однократну помилку та порівняти надмірності цих кодів.

Практичне заняття 5

Коди, що виправляють помилки. Систематичні коди. Код Хеммінга.

Коди, що виправляють одну помилку, повинні мати мінімальну кодову відстань $d_{min} \geq 3$. Найбільшого поширення серед двійкових кодів, що виправляють однократні помилки, одержали систематичні (лінійні, групові) блокові коди.

Систематичними називають такі коди, в яких інформаційні та коригувальні символи розташовані по суворо визначеній системі і завжди займають строго певні місця в кодових комбінаціях.

У систематичних кодах формування перевірочних елементів відбувається за m інформаційними елементами кодової комбінації. У канал зв'язку йде n елементна комбінація, що складається з m інформаційних і k перевірочних розрядів. Перевірочні символи утворюються шляхом різних лінійних комбінацій інформаційних символів.

Декодування систематичних кодів засновано на перевірці лінійних співвідношень між символами, що стоять на певних перевірочних позиціях. У разі двійкових кодів, цей процес зводиться до перевірки на парність.

Код Хеммінга належить до систематичних кодів і складається з комбінації з m інформаційних і k перевірочних символів. Перевірочні символи стоять на місцях 2^i де i =0,1,2,3,… тобто 1, 2, 4, 16, 32 ... Надлишкова частина коду будується таким чином, щоб під час декодування можна було встановити не тільки наявність помилки, але і її розташування всередині кодової комбінації. Досягається це шляхом багаторазової перевірки прийнятої кодової комбінації на парність. Сума одиниць на перевірочних позиціях(табл 5.1) повинна бути парною. Якщо сума парна - значення контрольного коефіцієнта дорівнює нулю, в іншому випадку – одиниці

При цьому число перевірок завжди дорівнює числу контрольних розрядів k. При кожній перевірці охоплюється частина інформаційних символів і один з контрольних розрядів, в ході перевірки отримують один перевірочний символ.

В результаті перевірок виходить k-розрядне двійкове число, яке вказує номер позиції спотвореного символу. Якщо в результаті перевірки отримана комбінація з k нулів, значить помилок в кодовій комбінації не виявлено. Код Хеммінга виправляє одиночні помилки.

Таблиця 5.1 Перевірочні позиції

1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**	**21**	
k	k	m	k	m	m	m	k	m	m	m	m	m	m	m	k	m	m	m	m	m	
x		x		x		x		x		x		x		x		x		x		x	**1**
	x	x			x	x			x	x			x	x			x	x			**2**
			x	x	x	x					x	x	x	x					x	x	**4**
							x	x	x	x	x	x	x	x							**8**
															x	x	x	x	x	x	**16**

k – перевірочні символи
m – інфомаційні символи
x – перевірочні позиції

Контрольні питання

1. До яких кодів належить код Хеммінга?
2. На яких місцях стоять перевірочні символи?
3. Як знаходять перевірочні символи для коду Хеммінга?
4. Як виконують декодування коду Хеммінга?
5. Скільки помилок виправляє код Хеммінга?

Задачі для самостійної роботи

Задача1 Закодувати кодом Хеммінга комбінацію 1 0 0 1 1. Визначити надмірність коду.

Розв'язання. Число інформаційних розрядів m = 5. Число перевірочних розрядів k = 4. Загальна кількість розрядів n = m + k = 9
Значення інформаційних символів відомі заздалегідь, тому перевірочні символи необхідно вибирати таким чином, щоб сума одиниць була числом парним.
Перевірочні елементи будуть розташовані на позиціях 1, 2, 4, і 8(табл.5.1.1)

Таблиця 5.1.1

a1	a2	a3	a4	a5	a6	a7	a8	a9
k1	k2	m1	k3	m2	m3	m4	k4	m5
k1	k2	1	k3	0	0	1	k4	1

1. Знаходимо перший перевірочний символ

$k1 = m1 \oplus m2 \oplus m4 \oplus m5 = 1 \oplus 0 \oplus 1 \oplus 1 = 1$

2. Знаходимо другий перевірочний символ

$k2 = m1 \oplus m3 \oplus m4 = 1 \oplus 0 \oplus 1 = 0$

3. Знаходимо третій перевірочний символ

$k3 = m2 \oplus m3 \oplus m4 = 0 \oplus 0 \oplus 1 = 1$

4.Знаходимо четвертий перевірочний символ

k4 = m5 = 1

Розставивши одержані контрольні символи, отримаємо число, закодоване кодом Хеммінга.

10011 $\rightarrow$ 101100111

Нехай в комбінації коду Хеммінга виникла однократна помилка(табл 5.1.2)

101100111 $\rightarrow$ 101110111

Таблиця 5.1.2

a1	a2	a3	a4	a5	a6	a7	a8	a9
k1	k2	m1	k3	m2	m3	m4	k4	m5
1	0	1	1	1	0	1	1	1

Для виявлення і виправлення помилки у декодері виконують перевірки на парність з урахуванням перевірочних елементів. Результат першої перевірки дає цифру молодшого розряду синдрому в двійковому запису. Результат другої перевірки дає цифру другого розряду і т.д.

- 1-а перевірка k1⊕m1⊕m2⊕m4⊕m5 = 1⊕1⊕1⊕1⊕1 = 1
- 2-а перевірка k2⊕m1⊕m3⊕m4 = 0⊕1⊕0⊕1 = 0
- 3-я перевірка k3⊕m2⊕m3⊕m4 = 1⊕1⊕0⊕1 = 1
- 4-а перевірка k4⊕m5 = 1⊕1 = 0

Визначаємо, що спотворено елемент із порядковим номером $0101_2 = 5_{10}$, тобто елемент m_2. Виправляємо його за допомогою інверсії та одержуємо правильну кодову комбінацію – 101100111.

Надмірність коду R = k/n =4/9

Задача 2 Закодувати кодом Хеммінга комбінації двійкового простого коду A_1 та A_2(табл 5.2.1). Показати на прикладі виправлення будь-якої однократної помилки в отриманих кодових комбінаціях коду Хеммінга і визначити надмірність коду.

Таблиця 5.2.1

№ варіанта	A_1	A_2
1	0011	1010
2	11001	00110
3	0101010	1110000
4	01110001010	00011100011
5	001100110010	111000111000

Задача 3 Закодувати двійковим кодом Хеммінга комбінацію двійкового простого коду та виправити будь-яку однократну помилку, якщо комбінацією простого коду є запис поточного року в двійковій системі числення.

Задача 4 Побудувати двійковий код Хеммінга для виправлення однократної помилки при k = 9 і 17, Побудувати такий самий код для передачі десятирозрядної (k = 10) інформаційної комбінації 1101011101. Показати процес виявлення та виправлення помилки, що виникла в дев’ятому розряді комбінації коду Хеммінга.

Практичне заняття 6
Циклічні коди

Дана назва походить від основної властивості цих кодів, а саме, якщо деяка кодова комбінація належить циклічним кодом, то комбінація, отримана циклічної перестановкою вихідної комбінації (циклічним зрушенням), також належить даному коду: (A1, a2, ..., an) → (an, a1, a2, ..., an-1), наприклад 01110→00111→10011

Другою властивістю всіх дозволених комбінацій циклічних кодів є їх подільність без залишку на деякий вибраний поліном, який називається твірним (утворюючим).

Ці властивості використовуються при побудові кодів, кодуючих і декодуючих пристроїв, а також при виявленні і виправленні помилок.

Циклічний код відноситься до систематичних блокових (n, k) -кодів, в яких k перших розрядів являють собою комбінацію первинного коду, а наступні (n - k) розрядів є перевірочними.

В основі побудови циклічних кодів лежить операція ділення переданої кодової комбінації на твірний поліном ступеня r(r - число надлишкових елементів в коді). *Твірний поліном- це многочлен, який не може бути представлений у вигляді добутку многочленів нижчих степенів, тобто такий многочлен ділитися тільки на самого себе або на одиницю і не ділитися ні на який інший многочлен. Для визначення степеня твірного полінома можна скористатися виразом* $2^r - 1 \geq n$, *де n - довжина циклічного коду.* Залишок від ділення використовується при формуванні перевірочних розрядів. При цьому операції ділення передує операція множення, що здійснює зрушення вліво k-розрядної інформаційної кодової комбінації на r = (n - k) розрядів.

При декодуванні прийнятої n-розрядної кодової комбінації знову проводить -ся розподіл на твірний поліном.

Синдромом помилки в цих кодах є наявність залишку від ділення прийнятої кодо вої комбінації на твірний поліном. Якщо синдром дорівнює нулю, то вважається, що помилок немає. В іншому випадку, за допомогою отриманого синдрому можна ви -значити номер розряду прийнятої кодової комбінації, в якому сталася помилка, і виправити її.

Таким чином, циклічним називається код, безліч комбінацій якого ді - литься на деякий многочлен G (x) ступеня (n-k) без залишку, причому многочлен G (x) являється одним із співмножників бінома x^n+ 1. G (x) називається утворюючим(твірним) поліномом.

Подання кодової комбінації у вигляді многочлена

Циклічні коди зручно розглядати не у вигляді послідовності "0" і "1", а у вигляді полінома від змінної x. Запис комбінації у вигляді полінома знадобилася для того, щоб відобразити формалізованим способом операцію циклічного зсуву вихідної кодової комбінації. Так, n-елементну кодову комбінацію можна описати поліномом (n - 1) ступеня, у вигляді:

$$A_{n-1}(x) = a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \ldots + a_1 x + a_0,$$

де ai = {0, 1}, причому ai = 0 відповідають нульовим елементам комбінації, ai=1-ненульовим.

Наприклад, комбінація 101101 може бути представлена у вигляді: $x^5+x^3+x^2+1$

Операції додавання і віднімання виконуються за модулем 2. Вони є еквівалентними і асоціативними:

$G_1(x) + G_2(x) = G_3(x)$

$G_1(x) - G_2(x) = G_3(x)$

$G_2(x) + G_1(x) = G_3(x)$

наприклад,

$G_1(x) = x^5 + x^3 + x$

$G_2(x) = x^4 + x^3 + 1$

$G_3(x) = G_1(x) + G_2(x) = x^5 + x^4 + x + 1$

Операція поділу є звичайним поділом многочленів, тільки замість віднімання використовується додавання за модулем 2:

$G_1(x) = x^6 + x^4 + x^3$

$G_2(x) = x^3 + x^2 + 1$

$x^6 + x^4 + x^3$ | $x^3 + x^2 + 1$

$x^6 + x^5 + x^3$ | $x^3 + x^2$

$x^5 + x^4$

$x^5 + x^4 + x^2$

----

x^2

Приклади твірних полиномів, дані в таблиці 6.1:

Таблиця 6.1 Твірні поліноми

Кількість перевірочних елементів r	Твірний поліном $P(x)$	Двійковий запис полінома
3	x^3+x+1	1011
3	x^3+x^2+1	1101
4	x^4+x+1	10011
4	x^4+x^3+1	11001
5	x^5+x^2+1	100101
5	x^5+x^3+1	101001
5	$x^5+x^3+x^2+x+1$	101111
5	$x^5+x^4+x^2+x+1$	110111
6	$x^6+x^5+x^4+1$	1110001
8	$x^8+x^7+x^6+x^5+x^2+x+1$	111100111
9	$x^9+x^5+x^3+1$	1000101001

Приклад розв’язання задачі

Закодувати двійковим циклічним кодом, що виправляє однократні помилки, кодову комбінацію двійкового простого коду 1110 та показати процес виправлення будь-якої однократної помилки в одержаній комбінації циклічного коду. Визначити надмірність коду.

Розв’язання. Для того, щоб закодувати комбінацію простого коду циклічним кодом, необхідно вибрати твірний поліном. Степінь твірного поліному $P(x)$ визначається кількістю перевірочних елементтів r у комбінації циклічного коду, а величина r при $d_{min} = 3$ визначається з виразу $2^r - 1 \geq n$. Тобто, при $k = 4$ маємо $r = 3$. Таким чином з табл. 1 вибираємо поліном степені 3: $P(x) = x^3+x+1$

Виконуємо кодування комбінації двійкового простого коду 1110. Для цього

– записуємо її у вигляді полінома:

$$Q(x) = x^3+x^2+x$$

– помножимо $Q(x)$ на x^r; оскільки $r = 3$, то

$$Q(x)\,x^3 = (x^3+x^2+x)\,x^3 = x^6+x^5+x^4;$$

– поділимо $Q(x)x^3$ *на* $P(x)$ з метою визначення остачі $R(x)$, коефіцієнти при степенях x якого є перевірочними елементами комбінації циклічного коду:

$$\begin{array}{r|l}
x^6 \oplus x^5 \oplus x^4 & x^3 \oplus x \oplus 1 \\ \cline{2-2}
\oplus\; x^6 \oplus x^4 \oplus x^3 & x^3 \oplus x^2 \\ \cline{1-1}
x^5 \oplus x^3 & \\
\oplus\; x^5 \oplus x^3 \oplus x^2 & \\ \cline{1-1}
x^2 &
\end{array}$$

Одержуємо остачу $R(x)=x^2$, якій відповідає трирозрядний вектор ($r = 3$) – 100; додаємо остачу $R(x)$ до $Q(x)x^3$ і отримуємо кодову комбінацію двійкового циклічного коду

$$F(x)=Q(x)x^3R(x)=x^6+ x^5+ x^4+ x^2 \text{ ------- } F = 1110100.$$

Покажемо процес виправлення однократної помилки. Для цього припустимо, що при передачі виникла однократна помилка, поліном та вектор якої відповідно $E(x) = x^3$ та 0001000. Тоді поліном F*(x) прийнятої комбінації

$F^*(x)=F(x)+E(x)=x^6 +x5+x4 +x^3+x^2$ ———————— 1111100.

Декодер виконує перевірочне ділення $F^*(x)$ на той же твірний поліном $P(x)$, який був використаний при кодуванні:

$$
\begin{array}{rl|l}
\oplus & x^6\oplus x^5\oplus x^4\oplus x^3\oplus x^2 & x^3\oplus x\oplus 1 \\ \cline{3-3}
 & x^6\oplus x^4\oplus x^3 & x^3\oplus x^2\oplus 1 \\ \cline{2-2}
\oplus & x^5\oplus x^2 & \\
 & x^5\oplus x^3\oplus x^2 & \\ \cline{2-2}
\oplus & x^3 & \\
 & x^3\oplus x\oplus 1 & \\ \cline{2-2}
 & x\oplus 1 & .
\end{array}
$$

Отже, остача $R(x)=x+1$ або R = 011.

Оскільки остача від ділення не дорівнює нулю, робимо висновок про наявність помилки у прийнятій комбінації $F^*(x)$.

Для визначення місця помилки скористуємося методом гіпотез.

Крок 1. Висуваємо гіпотезу про помилку у молодшому розряді комбінації циклічного коду $F^*(x)$, тобто вважаємо, що поліном та вектор помилки відповідно $E_1(x)$ =1 та E_1= 0000001.

Беремо суму за модулем 2 $F^*(x)+ E_1(x)$:

$F^*(x+) E_1(x) = (x^6+ x^5+x^4+x^3+x^2)+1= x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+1;$

ділимо отриману суму на $P(x)$ з метою підтвердження (у разі нульової остачі) або спростування (у разі ненульової остачі) висунутої гіпотези:

$$
\begin{array}{rl|l}
\oplus & x^6\oplus x^5\oplus x^4\oplus x^3\oplus x^2\oplus 1 & x^3\oplus x\oplus 1 \\ \cline{3-3}
 & x^6\oplus x^4\oplus x^3 & x^3\oplus x^2\oplus 1 \\ \cline{2-2}
\oplus & x^5\oplus x^2\oplus 1 & \\
 & x^5\oplus x^3\oplus x^2 & \\ \cline{2-2}
\oplus & x^3\oplus 1 & \\
 & x^3\oplus x\oplus 1 & \\ \cline{2-2}
 & x & .
\end{array}
$$

Остача $R(x) = x$, тобто $R(x)\neq 0$, і гіпотеза відхиляється.

Крок 2 . Висуваємо гіпотезу про помилку у другому розряді F*(x), тобто вважаємо, що $E_2(x) = x\rightarrow E_2 = 0000010$. Беремо суму за модулем $2\ F^*(x)\ E_2(x)$:

$F * (x)+ E\ 2 (x) = (x^6+ x^5+ x^4+ x^3+ x^2)+ x = x^6+ x^5+ x^4+ x^3+ x^2+ x ;$

ділимо цю суму на $P(x)$ з метою підтвердження або спростування гіпотези:

$$
\begin{array}{rl|l}
\oplus & x^6\oplus x^5\oplus x^4\oplus x^3\oplus x^2\oplus x & x^3\oplus x\oplus 1 \\
 & x^6\oplus x^4\oplus x^3 & \hline x^3\oplus x^2\oplus 1 \\
\hline
\oplus & x^5\oplus x^2\oplus x & \\
 & x^5\oplus x^3\oplus x^2 & \\
\hline
\oplus & x^3\oplus x & \\
 & x^3\oplus x\oplus 1 & \\
\hline
 & 1 & .
\end{array}
$$

Остача R(x) = 1, тобто R(x)≠0, і гіпотеза відхиляється.

Крок 3. Висуваємо гіпотезу про помилку у третьому розряді *F*(x),* тобто вважаємо, що $E_3(x) = x2 \rightarrow E_3 = 0000100$. Беремо суму му за модулем 2 $F^*(x) + E_3(x)$:

$$F^*(x) + E_3(x) = (x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2) + x^2 = x^6 + x^5 + x^4 + x;$$

ділимо цю сумму на *P(x)* з метою підтвердження або спростування гіпотези:

$$
\begin{array}{rl|l}
\oplus & x^6\oplus x^5\oplus x^4\oplus x^3 & x^3\oplus x\oplus 1 \\
 & x^6\oplus x^4\oplus x^3 & \hline x^3\oplus x^2\oplus 1 \\
\hline
\oplus & x^5 & \\
 & x^5\oplus x^3\oplus x^2 & \\
\hline
\oplus & x^3\oplus x^2 & \\
 & x^3\oplus x\oplus 1 & \\
\hline
 & x^2\oplus x\oplus 1 & .
\end{array}
$$

Остача $R(x) = x^2 + x + 1$, тобто $R(x) \neq 0$, і гіпотеза відхиляється.

Крок 4. Висуваємо гіпотезу про помилку у четвертому розряді *F*(x)*, тобто вважаємо, що $E_4(x) = x^3 \rightarrow E4 = 0001000$. Беремо суму за модулем *2* $F^*(x) + E_4(x)$:

$$F^*(x) + E_4(x) = (x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2) + x^3 = x^6 + x^5 + x^4 + x^2\ ;$$

ділимо отриману суму на *P(x)* з метою підтвердження або спростування гіпотези:

$$
\begin{array}{rl|l}
\oplus & x^6\oplus x^5\oplus x^4\oplus x^2 & x^3\oplus x\oplus 1 \\
 & x^6\oplus x^4\oplus x^3 & \hline x^3\oplus x^2 \\
\hline
\oplus & x^5\oplus x^3\oplus x^2 & \\
 & x^5\oplus x^3\oplus x^2 & \\
\hline
 & 0 & .
\end{array}
$$

Остача $R(x) = 0$, тобто помилка дійсно була у четвертому розряді, а вихідна комбінація циклічного коду має вигляд:

$F(x) = F^*(x) + E_4(x) = x^6 + x^5 + x^4 + x^2 \rightarrow F = 1110100.$

Надмірність коду $R = r / n = 3 / 7$.

Контрольні питання

1 Які коди належать до циклічних
2 Як вибирається твірний поліном у двійкових циклічних кодах?
3 Які є методи побудови двійкових циклічних кодів?
4 Як виявляються та виправляються помилки в двійкових циклічних кодах?
5 Скільки помилок може виправити циклічний код?

Задачі для самостійної роботи

Задача 1 Закодувати двійковим циклічним кодом, що виправляє однократні помилки, кодову комбінацію двійкового простого коду $Q(x) = x^5 + x^2$ і виправити будь-яку однократну помилку в одержаній комбінації циклічного коду. Визначити надмірність коду.

Задача 2 Закодувати двійковим циклічним кодом з $d_{min} = 3$, що виправляє однократні помилки, комбінацію двійкового простого коду $Q(x)$ довжиною k інформаційних елементів згідно з варіантом, поданим в таблиці 6.2 Твірний поліном $P(x)$ визначити з таблиці 6.1. Показати процес виправлення будь-якої однократної помилки і визначити надмірність коду.

Таблиця 6.2

№ варіанта	k	Поліном комбінації двійкового простого коду $Q(x)$
1	4	$x^2 \oplus x \oplus 1$
2	5	$x^4 \oplus x^2 \oplus x$
3	6	$x^5 \oplus x^2 \oplus 1$
4	7	$x^6 \oplus x \oplus 1$
5	8	$x^7 \oplus x^6 \oplus x^4 \oplus x$
6	9	$x^7 \oplus x^5 \oplus x^3 \oplus 1$
7	10	$x^9 \oplus x^6 \oplus x^2 \oplus x \oplus 1$
8	11	$x^{10} \oplus x^9 \oplus x^8 \oplus x^4 \oplus x$
9	12	$x^{11} \oplus x^{10} \oplus x^7 \oplus x^6 \oplus x^3 \oplus 1$
10	14	$x^{13} \oplus x^{12} \oplus x^{10} \oplus x^9 \oplus x^3 \oplus x^2$

Задача 3 Визначити кількість перевірних елементів двійкового циклічного коду, що виправляє однократну помилку, якщо кількість Його інформаційних елементів $k = 9$.

Задача 4 Визначити, яка з чотирьох прийнятих комбінацій 0111011, 1011010, 1111110, 0111010 двійкового коду помилкова, якщо твірний поліном коду $P(x) = x^3 + x + 1$, Виправити виявлену помилку.

Задача 5 Обчисліть, правильно чи з помилками одержаний циклічний код $G(7,4)$ 1001011 з твірним багаточленом $P(x) = x^3+x^2+1$

ДОДАТКИ

Таблиця 1 Функції Крампа

X	Ф(X)	X	Ф(X)	X	Ф(X)	X	Ф(X)
0,00	0,000	0,60	0,451	1,20	0,769	1,80	0,928
0,01	0,008	0,61	0,458	1,21	0,773	1,81	0,929
0,02	0,016	0,62	0,464	1,22	0,777	1,82	0,931
0,03	0,023	0,63	0,471	1,23	0,781	1,83	0,932
0,04	0,031	0,64	0,477	1,24	0,785	1,84	0,934
0,05	0,039	0,65	0,484	1,25	0,788	1,85	0,935
0,06	0,047	0,66	0,490	1,26	0,792	1,86	0,937
0,07	0,055	0,67	0,497	1,27	0,795	1,87	0,938
0,08	0,063	0,68	0,503	1,28	0,799	1,88	0,939
0,09	0,071	0,69	0,509	1,29	0,202	1,89	0,941
0,10	0,079	0,70	0,516	1,30	0,806	1,90	0,942
0,11	0,087	0,71	0,522	1,31	0,809	1,91	0,943
0,12	0,095	0,72	0,528	1,32	0,813	1,92	0,945
0,13	0,103	0,73	0,536	1,33	0,816	1,93	0,946
0,14	0,111	0,74	0,540	1,34	0,819	1,94	0,947
0,15	0,119	0,75	0,546	1,35	0,823	1,95	0,948
0,16	0,127	0,76	0,552	1,36	0,826	1,96	0,95
0,17	0,135	0,77	0,558	1,37	0,829	1,97	0,951
0,18	0,142	0,78	0,564	1,38	0,832	1,98	0,952
0,19	0,150	0,79	0,570	1,39	0,835	1,99	0,953
0,20	0,158	0,80	0,576	1,40	0,838	2,00	0,954
0,21	0,166	0,81	0,572	1,41	0,841	2,05	0,959
0,22	0,174	0,82	0,587	1,42	0,844	2,10	0,964
0,23	0,181	0,83	0,593	1,43	0,847	2,15	0,968
0,24	0,189	0,84	0,598	1,44	0,850	2,20	0,972
0,25	0,197	0,85	0,604	1,45	0,852	2,25	0,975

Продовження таблиці 1 Функції Крампа

X	Ф(X)	X	Ф(X)	X	Ф(X)	X	Ф(X)
0,35	0,278	0,95	0,657	1,55	0,878	2,75	0,9940
0,36	0,281	0,96	0,663	1,56	0,881	2,80	0,9949
0,37	0,288	0,97	0,668	1,57	0,883	2,85	0,9956
0,38	0,296	0,98	0,673	1,58	0,885	2,90	0,9963
0,39	0,303	0,99	0,677	1,59	0,888	2,95	0,9963
0,40	0,310	1,00	0,682	1,60	0,890	3,00	0,9973
0,41	0,318	1,01	0,687	1,61	0,892	3,10	0,9980
0,42	0,325	1,02	0,632	1,62	0,894	3,20	0,9986
0,43	0,332	1,03	0,697	1,63	0,896	3,30	0,999
0,44	0,340	1,04	0,701	1,64	0,899	3,40	0,9993
0,45	0,347	1,05	0,706	1,65	0,901	3,50	0,9995
0,46	0,354	1,06	0,710	1,66	0,903	3,60	0,9996
0,47	0,316	1,07	0,715	1,67	0,905	3,70	0,9997
0,48	0,368	1,08	0,719	1,68	0,907	3,80	0,9998
0,49	0,375	1,09	0,724	1,69	0,909	3,90	0,9999
0,50	0,382	1,10	0,728	1,70	0,910	4,00	0,99994
0,51	0,389	1,11	0,733	1,71	0,912	4,10	0.99995
0,52	0,396	1,12	0,737	1,72	0,914	4,20	0,99997
0,53	0,403	1,13	0,741	1,73	0,916	4,30	0,99998
0,54	0,410	1,14	0,745	1,74	0,918	4,40	0,999989
0,55	0,417	1,15	0,749	1,75	0,919	4,50	0,999993
0,56	0,424	1,16	0,754	1,76	0,921	4,60	0,999996
0,57	0,431	1,17	0,758	1,77	0,923	4,70	0,999997
0,58	0,438	1,18	0,762	1,78	0,924	4,80	0,999998
0,59	0,444	1,19	0,766	1,79	0,926	4,892	$1-10^{-6}$
						5.327	$1-10^{-7}$

Таблиця 2. Розподіл ймовірностей букв в українських текстах (без обліку ймовірності появи в текстах пропуску між словами)

Буква	Середня ймовірність появи	$-p_i \log_2 p_i$	Буква	Середня ймовірність появи	$-p_i \log_2 p_i$
А	0,085	0,302293	О	0,102	0,335923
Б	0,018	0,104325	П	0,028	0,144436
В	0,053	0,224607	Р	0,045	0,201327
Г	0,015	0,090883	С	0,038	0,179279
Д	0,028	0,144436	Т	0,050	0,216096
Е	0,046	0,204342	У	0,036	0,172651
Є	0,004	0,031863	Ф	0,002	0,017932
Ж	0,008	0,055726	Х	0,009	0,061163
З	0,019	0,108639	Ц	0,007	0,050109
И	0,062	0,248718	Ч	0,013	0,081449
І	0,064	0,253810	Ш	0,011	0,071570
Ї	0,007	0,050109	Щ	0,009	0,061163
Й	0,019	0,108639	Ь	0,024	0,129140
К	0,036	0,172651	Ю	0,007	0,050109
Л	0,038	0,179279	Я	0,017	0,099931
М	0,026	0,136899	'	0,013	0,081449
Н	0,061	0,246138			

Таблиця 3 Розподіл ймовірностей букв в англійських текстах (без обліку ймовірності появи в текстах пропуску між словами)

Буква	Середня ймовірність появи	$-p_i \log_2 p_i$	Буква	Середня ймовірність появи	$-p_i \log_2 p_i$
A	0,0800	0,291508	N	0,0700	0,268555
B	0,0150	0,090883	O	0,0800	0,291508
C	0,0300	0,151767	P	0,0200	0,112877
D	0,0400	0,185754	Q	0,0025	0,021610
E	0,1300	0,382644	R	0,0650	0,256322
F	0,0200	0,112877	S	0,0600	0,243534
G	0,0150	0,090883	T	0,0900	0,312654
H	0,0600	0,243534	U	0,0300	0,151767
I	0,0650	0,256322	V	0,0100	0,066439
J	0,0050	0,038219	W	0,0150	0,090883
K	0,0050	0,038219	X	0,0050	0,038219
L	0,0350	0,169278	Y	0,0200	0,112877
M	0,0300	0,151767	Z	0,0025	0,021610

Таблиця 4. Таблиця двійкових логарифмів цілих чисел

x	$\log_2 x$	x	$\log_2 x$	x	$\log_2 x$	x	$\log_2 x$
1	0,000	35	5,129	69	6,109	103	6,687
2	1,000	36	5,170	70	6,129	104	6,700
3	1,585	37	5,209	71	6,150	105	6,714
4	2,000	38	5,248	72	6,170	106	6,728
5	2,322	39	5,285	73	6,190	107	6,741
6	2,585	40	5,322	74	6,209	108	6,755
7	2,807	41	5,358	75	6,229	109	6,768
8	3,000	42	5,392	76	6,248	110	6,781
9	3,170	43	5,426	77	6,267	111	6,794
10	3,332	44	5,459	78	6,285	112	6,807
11	3,459	45	5,492	79	6,304	113	6,820
12	3,585	46	5,524	80	6,322	114	6,833
13	3,700	47	5,555	81	6,340	115	6,845
14	3,807	48	5,585	82	6,358	116	6,858
15	3,907	49	5,615	83	6,375	117	6,870
16	4,000	50	5,644	84	6,392	118	6,883
17	4,087	51	5,672	85	6,409	119	6,895
18	4,170	52	5,700	86	6,426	120	6,907
19	4,248	53	5,728	87	6,443	121	6,919
20	4,322	54	5,755	88	6,459	122	6,931
21	4,392	55	5,781	89	6,476	125	6,966
22	4,459	56	5,807	90	6,492	128	7,000
23	4,524	57	5,833	91	6,508	200	7,644
24	4,585	58	5,858	92	6,524	256	8,000
25	4,644	59	5,883	93	6,539	300	8,229
26	4,700	60	5,907	94	6,555	400	8,644
27	4,755	61	5,931	95	6,570	500	8,966
28	4,807	62	5,951	96	6,585	512	9,000
29	4,858	63	5,977	97	6,600	600	9,229
30	4,907	64	6,000	98	6,615	700	9,451
31	4,954	65	6,022	99	6,629	800	9,644
32	5,000	66	6,044	100	6,644	900	9,814
33	5,044	67	6,066	101	6,658	1000	9,965
34	5,087	68	6,087	102	6,672	10000	13,288

Таблиця 5. Значення функції $-p \log_2 p$

p	$-p \log_2 p$	p	$-p \log_2 p$	p	$-p \log_2 p$
0,001	0,0099	0,270	0,5100	0,640	0,4121
0,005	0,0382	0,280	0,5142	0,650	0,4040
0,010	0,0664	0,290	0,5179	0,660	0,3957
0,015	0,0909	0,300	0,5211	0,670	0,3871
0,020	0,1129	0,310	0,5228	0,680	0,3784
0,025	0,1330	0,320	0,5260	0,690	0,3694
0,030	0,1518	0,330	0,5378	0,700	0,3602
0,035	0,1693	0,340	0,5292	0,710	0,3508
0,040	0,1858	0,350	0,5301	0,720	0,3412
0,045	0,2013	0,360	0,5306	0,730	0,3314
0,050	0,2161	0,370	0,5307	0,740	0,3215
0,055	0,2301	0,380	0,5304	0,750	0,3113
0,060	0,2435	0,390	0,5298	0,760	0,3009
0,065	0,2563	0,400	0,5288	0,770	0,2903
0,070	0,2686	0,410	0,5274	0,780	0,2796
0,075	0,2803	0,420	0,5256	0,790	0,2687
0,080	0,2915	0,430	0,5236	0,800	0,2575
0,085	0,3023	0,440	0,5211	0,810	0,2462
0,090	0,3127	0,450	0,5184	0,820	0,2348
0,095	0,3226	0,460	0,5153	0,830	0,2231
0,100	0,3322	0,470	0,5120	0,840	0,2113
0,110	0,3503	0,480	0,5083	0,850	0,1993
0,120	0,3671	0,490	0,5043	0,860	0,1871
0,130	0,3826	0,500	0,500	0,870	0,1748
0,140	0,3971	0,510	0,4954	0,880	0,1623
0,150	0,4105	0,520	0,4906	0,890	0,1496
0,160	0,4230	0,530	0,4854	0,900	0,1368
0,170	0,4346	0,540	0,4800	0,910	0,1238
0,180	0,4453	0,550	0,4744	0,920	0,1107
0,190	0,4552	0,560	0,4684	0,930	0,0974
0,200	0,4644	0,570	0,4623	0,940	0,0839
0,210	0,4728	0,580	0,4558	0,950	0,0703
0,220	0,4806	0,590	0,4491	0,960	0,0565
0,230	0,4877	0,600	0,4422	0,970	0,0426
0,240	0,4941	0,610	0,4350	0,980	0,0286
0,250	0,500	0,620	0,4276	0,990	0,0140
0,260	0,5053	0,630	0,4199		

Список використаної та рекомендованої літератури

1 *Стеклов В. К., Беркман Л. Н.* Теорія електричного зв’язку. – К.: Техніка, 2006. – 552 с.

2 Загальні поняття про сигнали та канали зв’язку. Навчальний посібник підготовлено для самостійної роботи студентів вищих навчальних закладів / *Л.Н.Беркман, С.І.Отрох, С.І.Тарбаєв, Н.С.Чумак*. – Київ: ДУТ ННІТІ, 2017. – 132

3 Кодування джерел інформації та каналів зв’язку. Навч. посібник підготовлено для самостійної роботи студентів вищих навчальних закладів за кредитно-модульною організацією навчального процесу /*Л.Н Беркман., А.П.Бондарчук, Г.І.Гайдур, Н.С. Чумак*.– Київ: ННІТІ ДУТ, 2018. – 91с

4 Жураковський Ю.П., - Теорія інформації та кодування : підручник / Ю.П. Жураковський, В. П. Полторак. - К. : Вища школа, 2001. - 255 с.

5 Подлевський Б. М., Теорія інформації в задачах : підручник/ Б. М. Подлевський, Р. Є. Рикалюк. - К. : Центр учбової літератури, 2021. – 271 с.

6. Жураковський Ю. П Теорія інформації та кодування в задачах: Навчальний посібник., /Ю. П Жураковський, В. В.Гніліцький. – Житомир: ЖІТІ, 2002.–230 с.

7 Іващенко П.В. Основи теорії інформації: навчальний посібник / Одеса: ОНАЗ ім. А.С. Попова, 2015. – 53с.

8 Оптимальне приймання сигналів. Основи теорії завадостійкості. Підруч. для студентів ВНЗ. О.Г.Варфоломеєва, С.І.Отрох, М.Г.Твердохліб, О.І. Чумак - К.:ДУТ , 2018. — 97 с.

9 Хорунжий О. І. Проектування тракту передачі даних. Навчальний посібник – К. : ННІТІ ДУІКТ, 2009. – 54 с.

10 *Richard W. Hamming* Coding and information theory Prentice-Hall 1986 – 269с.

11 Stefan M. Moser, Po-Ning Chen A Student’s Guide to Coding and Information Theory Cambridge University Press 2012 – 191с.

12 *Zoran Gacovski* Information and coding theory in computer science Canada Arcler Press 2023-416 с.