

Державна служба спеціального зв'язку та захист інформації України  
Адміністрація Державної служби спеціального зв'язку та захист інформації України

---

ОДЕСЬКА НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ ЗВ'ЯЗКУ ім. О.С. ПОПОВА

---

Кафедра фізики оптичного зв'язку

# КОЛИВАННЯ ТА ХВИЛІ

**ФІЗИКА**  
**МОДУЛЬ 2**  
**ЧАСТИНА 3**

**Методичне керівництво**  
**до лабораторного циклу №2**  
**з фізики**

для студентів 1-го курсу всіх спеціальностей

ОДЕСА 2011

Укладачі: Криськів С.К, Марколенко П.Ю.

Безупинно зростаючі темпи технічного прогресу призводять до того, що інженер, який володіє вузькою підготовкою для роботи тільки в даній конкретній області, втрачає кваліфікацію через 10-15 років, оскільки в межах цього терміну галузь його роботи зазнає змін. Отже, він мусить володіти достатніми фундаментальними знаннями, які є підґрунтям будь-яких прикладних питань, що дозволяє засвоювати нові прилади та технології.

Методичне керівництво призначено для самостійної роботи студентів з розділу "Коливання та хвилі", який є фундаментом для вивчення приладів і засобів телекомунікації. Основну увагу приділено опису коливань фізичних систем і хвильових процесів у різних середовищах. Для забезпечення певної системи у навчанні, паралельно розглядаються механічні та електричні коливання та хвилі, що підкреслює загальний підхід до розв'язання всіх коливальних і хвильових задач.

Методичне керівництво розраховано для студентів усіх спеціальностей за напрямом "Телекомунікації", "Мережі та системи поштового зв'язку".

ЗАТВЕРДЖЕНО

методичною радою

академії

Протокол № 8

від 11.02.2011 р.

СХВАЛЕНО

на засіданні кафедри

фізики оптичного зв'язку

і рекомендовано до друку

Протокол № 4

від 24.11.2010 р.

## СТРУКТУРА МОДУЛЯ 2 “КОЛИВАННЯ ТА ХВИЛІ”

| Змістовий модуль                               | Лекції<br>(год.) | Заняття        |                  | Самостійна<br>робота | Індиві-<br>дуальна<br>робота |
|--|------------------|----------------|------------------|----------------------|------------------------------|
|  |                  | прак-<br>тичні | лабора-<br>торні |                      |                              |
| <b>Модуль 3 “КОЛИВАННЯ ТА ХВИЛІ” (66 год.)</b> |                  |                |                  |                      |                              |
| Коливання                                      | 10               | 4              | 12               | 14                   | 3                            |
| Хвилі  | 6                | 4              | 4                | 6                    | 3                            |
|  | 16               | 8              | 16               | 20                   | 6                            |

### ЗМІСТ МОДУЛЯ

|  |
|--|
| <b>КОЛИВАННЯ.</b> Способи подання гармонічних коливань. Гармонічні системи. Характеристики коливань (2 год.).  |
| Рівняння коливань. Власні коливання. Затухаючі коливання та їх характеристики. Вимушені коливання. Векторні діаграми (2 год.).                                       |
| Фазові співвідношення між струмом та напругою на елементах контуру. Резонанс напруг (2 год.).  |
| Резонанс струмів. Робота та потужність змінного струму (2 год.).   |
| Складання коливань. Биття. Складання взаємно перпендикулярних коливань. Фігури Лі сажу (2 год.).   |
| <b>ХВИЛІ.</b> Хвильове рівняння і частковий випадок його розв’язання. Швидкість поширення пружних хвиль у різних середовищах. Звукові хвилі. Ефект Доплера (2 год.). |
| Електромагнітні хвилі вздовж проводів. Стоячі електромагнітні хвилі (2 год.).  |
| Вільні електромагнітні хвилі. Основи радіозв’язку (2 год.).  |

### ТЕМИ ЛАБОРАТОРНИХ РОБІТ МОДУЛЯ 2 “КОЛИВАННЯ ТА ХВИЛІ”

| № з/п. | Тема   | Години |
|--------|--|--------|
| 1      | № 4-1. Дослідження гармонічних коливань механічних систем  | 2      |
| 2      | № 4-2. Вивчення складання електричних гармонічних коливань                                       | 2      |
| 3      | № 4-3. Визначення параметрів згасаючих коливань за допомогою фізичного маятника                  | 2      |
| 4      | № 4-4. Дослідження згасаючих електричних коливань  | 2      |
| 5      | № 4-5. Дослідження вимушених механічних коливань. Механічний резонанс                            | 2      |
| 6      | № 4-6. Дослідження вимушених коливань у коливальному контурі                                     | 2      |
| 7      | № 5-1. Дослідження стоячих хвиль методом Мельде  | 2      |
| 8      | № 5-2. Визначення швидкості розповсюдження звукових хвиль у повітрі за допомогою явища резонансу | 2      |
| 9      | № 5-3. Визначення довжини стоячої електромагнітної хвилі   |        |

## **МЕТОДИЧНЕ КЕРІВНИЦТВО З ВИКОНАННЯ ЛАБОРАТОРНИХ РОБІТ**

Лабораторні роботи виконуються фронтальним методом, коли вся студентська група виконує одну й ту ж саму роботу.

Виконанню роботи в лабораторії обов'язково передуює домашня підготовка з теорії та методики виконання роботи, а також заготовлення протоколу, в якому має бути креслення схеми пристрою, таблиці приладів і прямих вимірювань, написання і розшифровка робочих формул. За попередньою вказівкою викладача студент відповідає на певні контрольні питання письмово.

Допуск до лабораторної роботи отримують студенти, які виконали домашню роботу, завершили попередню лабораторну роботу і дали правильні відповіді при експрес-опитуванні в лабораторії.

### ***ЗМІСТ ПРОТОКОЛІВ УСІХ РОБІТ ПОВИНЕН БУДИ ТАКИМ:***

1. Тема лабораторної роботи.
2. Мета роботи.
3. Схема пристрою, перелік її елементів.
4. Таблиця вимірювальних приладів.
5. Робочі формули з поясненнями величин.
6. Таблиця прямих вимірювань у стандартному вигляді для кожної вимірювальної величини. Обов'язково після її заповнення подається на підпис викладачу.
7. Обробка результатів вимірювань (за багаторазових однотипних обчислень наводиться одна підстановка).
8. Зведення результатів у стандартній формі (у вигляді довірчого інтервалу і відносної похибки у графічному вигляді).
9. Висновок.
10. Дата виконання та прізвище студента.

При підготовці до виконання лабораторних робіт, окрім даного методичного керівництва, рекомендовано користуватися літературою, вказаною в кінці керівництва.

### ***ПЕРЕЛІК ЗНАНЬ ТА ВМІНЬ ДО МОДУЛЯ 2***

1. Знати основні фізичні величини для опису явищ у системах електроніки, електрозв'язку та радіозв'язку.
2. Знати основні фізичні явища для класифікації процесів у системах електроніки, електрозв'язку та радіозв'язку.
3. Знати формулювання фізичних законів для опису явищ в системах електроніки, електрозв'язку та радіозв'язку, використовуючи довідкову літературу.
4. Вміти переводити фізичні величини в систему одиниць СІ для можливості розв'язання задач за допомогою довідкової літератури.

5. Вміти проводити вимірювання окремих фізичних величин і параметрів для визначення режимів роботи елементів у системах електроніки, електрозв'язку та радіозв'язку, використовуючи стандартні засоби вимірювання.

6. Вміти порівнювати результати практичних вимірів з теоретичними результатами для оцінки похибок вимірювань, використовуючи довідкову літературу.

### ***КРИТЕРІЇ ОЦІНКИ ЗНАНЬ***

***При оцінці лабораторних робіт студент отримує:***

- за кожне правильно виконане та оформлене домашнє завдання – 20 балів;
- за правильну відповідь на всі запитання письмового теоретичного опитування – 40 балів;
- за правильну відповідь не на всі запитання письмового теоретичного опитування в залежності від кількості правильних відповідей – від 0 до 35 балів;
- за правильно оформлену й завершену лабораторну роботу – 40 балів.

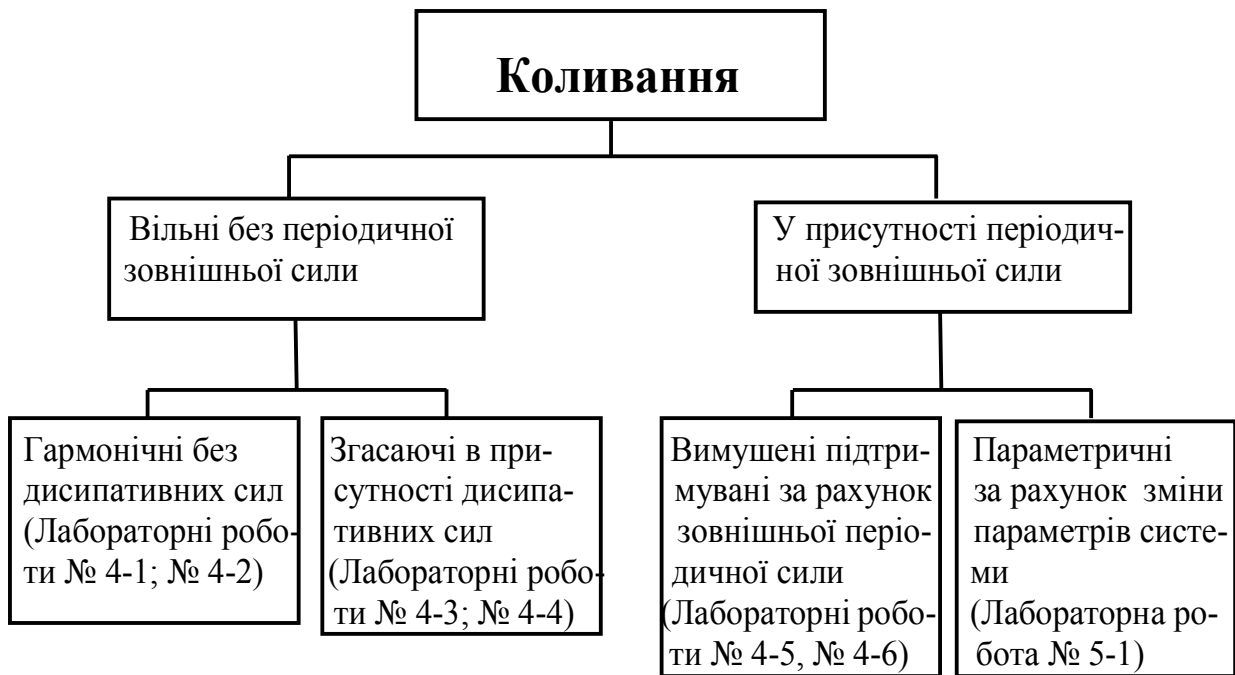
Оцінка виставляється виходячи з таких критеріїв:

- “Відмінно” – від 95 до 100 балів,
- “Добре” – від 80 до 95 балів,
- “Задовільно” – від 60 до 80 балів,
- “Незадовільно” – менше 60 балів.

## ВСТУП

Дане методичне керівництво призначене для вивчення розділу “Коливання та хвилі” курсу фізики, основні закони якого використовуються в техніці передавання даних. Вісім лабораторних робіт дозволять студентам вивчити основи даного курсу і навчитися експериментально визначати основні параметри хвиль і коливних систем (табл. 1). Керівництво містить достатню теоретичну інформацію, доповнену детальними описами використовуваного в роботах устаткування і методів вимірювання досліджуваних величин.

Таблиця 1.



## Лабораторна робота № 4-1 ДОСЛІДЖЕННЯ ГАРМОНІЧНИХ КОЛИВАНЬ

### 1. Мета роботи

1. Дослідження незгасаючих коливань фізичного маятника.
2. Розрахунок моменту інерції і зведеної довжини фізичного маятника.

### 2. Основні поняття

**Коливаннями** називаються рухи або зміни стану, що мають повторюваність у часі. Коливання називаються **періодичними**, якщо значення фізичних величин, що змінюються в процесі коливань, повторюються через рівні проміжки часу.

Положення системи, в якому вона може знаходитися нескінченно довго, без дії на неї зовнішніх сил називають **станом рівноваги**.

Рух механічної системи біля її положення рівноваги називають **механічними коливаннями**.

**Вільні коливання** (незгасаючі (власні) та згасаючі коливання) це такі коливання, які відбуваються за відсутності зовні прикладеної змінної дії до системи. **Змушені коливання** устанавлюються у системі в результаті дії на неї змінних зовнішніх сил (періодична зовнішня сила в механічних системах або змінна ЕРС генератора в електромагнітних системах).

Найпростішу модель коливальної системи називають **гармонічним осцилятором**.

**Власними** або **незгасаючими** називаються коливання, за яких коливальна система не віддає енергію в зовнішнє середовище. Такі коливання описуються диференціальним рівнянням другого порядку, яке називають рівнянням гармонічного осцилятора:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0 \quad \text{або} \quad \ddot{x} + \omega_0^2 x = 0. \quad (1)$$

**Гармонічними коливаннями** називаються коливання, в яких коливна величина  $x$  змінюється протягом часу за законом синуса або косинуса. Загальне розв'язання диференціального рівняння (1) буде рівнянням власних гармонічних коливань:

$$x(t) = A \cdot \cos(\omega_0 t + \varphi_0) \quad \text{або} \quad x(t) = A \cdot \sin(\omega_0 t + \varphi_0 + \pi/2), \quad (2)$$

де  $A$ ,  $\omega_0$  і  $\varphi_0$  – постійні величини, причому  $A > 0$  і  $\omega_0 > 0$ ;  $x(t)$  – зміщення коливної величини відносно положення рівноваги.

Вираз

$$\omega_0 t + \varphi_0 = \Phi \quad (3)$$

визначає значення зміщення  $x$  в даний момент часу і називається **фазою коливання**. У момент початку відліку часу ( $t = 0$ ) фаза дорівнює **початковій фазі коливань**  $\varphi_0$ .

Одиниця вимірювання фази – радіан [рад].

Якщо маятник вперше відхилиться ліворуч, тоді

$$x = x(t = 0) = -A \quad \text{і} \quad \varphi_0 = \pi, \quad (4)$$

при його відхиленні праворуч

$$x = x(t = 0) = +A \quad \text{і} \quad \varphi_0 = 0. \quad (4a)$$

Диференціювання (3) дає:

$$\omega_0 = \frac{d\varphi}{dt}, \quad (5)$$

отже, **циклічна (колова)** частота  $\omega$  – похідна фази за часом (швидкість зміни фази), одиниця вимірювання – радіан за секунду [рад/с].

## ПАРАМЕТРИ КОЛИВАНЬ

**Періодом коливання  $T$**  називається той найменший проміжок часу, після закінчення якого повторюються значення всіх величин, що характеризують коливальний рух. За цей час здійснюється одне повне коливання.

**Частотою періодичних коливань  $\nu$**  називається число повних коливань, які здійснюються за одиницю часу:

$$\nu = 1/T. \quad (6)$$

Одиниця вимірювання частоти – Герц [ $\Gamma\text{ц} = \text{с}^{-1}$ ].

Фазовий цикл одного повного коливання відповідає  $2\pi$  радіанам (як період гармонічної функції). Тоді колова частота (5) є числом фазових циклів за проміжок часу:

$$\omega = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{T}, \quad (7)$$

а період коливань дорівнює

$$T = \frac{2\pi}{\omega}. \quad (8)$$

Одиниця вимірювання періоду – [с].

### 2.1 Гармонічні коливання фізичного маятника

**Власні гармонічні коливання** – тип вільних коливань, які здійснює система під дією тільки однієї поперечної сили, яка прикладена до центру тяжіння системи і спрямована до положення рівноваги. **Повертну силу  $F_{\text{пов}}$**  також називають **квазіпружною силою  $F$** . Квазіпружна сила – це сила, яка спрямована до положення рівноваги і пропорційна відстані  $x$  від положення рівноваги до точки прикладення сили.

Назва «квазіпружна сила» пов'язана з тим, що вона аналогічна силі, що виникає за малих деформацій пружних сил (закон Гука), так званої сили пружності

$$F_{\text{пов}} = -kx, \quad (9)$$

де  $x$  – зміщення від положення рівноваги;  $k$  – коефіцієнт пружності. Знак мінус у рівнянні (9) показує, що сила пружності завжди спрямована протилежно зміщенню.



Квазіпружною силою можна вважати поворотну складову сили тяжіння, яка діє на математичний маятник при його малих відхиленнях від вертикалі.

Таким чином, квазіпружні сили – це сили, які не є пружними за своєю природою, але подібні пружним за характером залежності їх від координати.

**Ідеальна система** – це ідеальна фізична модель системи без будь-яких енергетичних втрат. У реальних системах завжди є сили опору, які збільшують період коливань і зменшують їх амплітуду (див. лаб. роботу № 4-3). Якщо коливання у системі відбуваються без дисипації (розсіювання) енергії в зовнішнє середовище, то вони називаються **власними коливаннями**, а їх частота – **власною частотою**. Параметри власних коливань записуються з індексами “0”.

Розглянемо власні механічні коливання фізичного маятника (рис. 1). **Фізичний маятник** – тверде тіло, закріплене одним кінцем до нерухомого підвісу в будь-якій точці, що здійснює коливання під дією сили тяжіння навколо нерухомої горизонтальної осі, яка проходить вище центру тяжіння тіла.

Метод опису таких коливань полягає у складанні і розв’язанні диференціальних рівнянь відповідних рухів. Якщо маятник виведений з положення рівноваги, тоді на нього діє обертаючий момент квазіпружної сили (рис. 1):

$$M = F_{\text{пов}} \cdot a = -m \cdot g \cdot a \cdot \sin \alpha, \quad (10)$$

де  $m$  – маса маятника;  $a$  – відстань від точки підвісу  $O$  стрижня (осі обертання) до центру тяжіння маятника (точка  $C$ );  $\alpha$  – малий кут відхилення маятника від положення рівноваги.

Застосуємо основне рівняння динаміки обертального руху

$$M = J \cdot \varepsilon \quad (11)$$

для опису руху маятника. У цьому рівнянні

$\varepsilon = \frac{d^2 \alpha}{dt^2}$  – кутове прискорення;  $J$  – момент інерції

фізичного маятника. З (10) і (11) отримаємо

$$-m \cdot g \cdot a \cdot \sin \alpha = J \cdot \varepsilon.$$

Момент інерції  $J$  є фізичним еквівалентом маси твердого обертаючого тіла. Наприклад, момент інерції обертаючої точки масою  $m$ , яка знаходиться на відстані  $l$  від осі обертання

$$J = m \cdot l^2. \quad (12)$$

Одиниця вимірювання моменту інерції в одиницях СІ –  $[\text{кг} \cdot \text{м}^2]$ .

**Математичний маятник** – матеріальна точка, закріплена на невагомій, нерозтяжній нитці, що здійснює коливання біля положення рівноваги.

Оскільки кут відхилення  $\alpha$  дуже малий, то  $\sin \alpha \approx \alpha$  (радіан). Отримаємо диференціальне рівняння коливань фізичного маятника:

$$-mga \cdot \alpha = J \frac{d^2 \alpha}{dt^2}$$

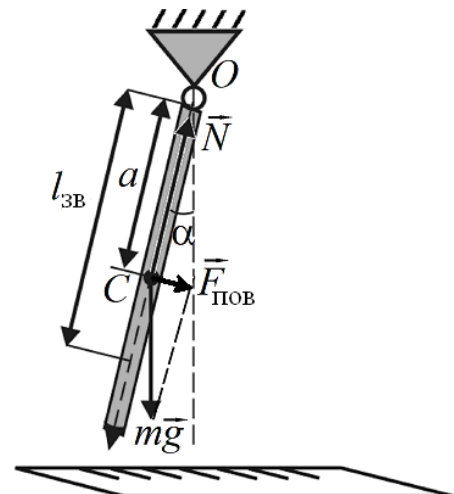


Рисунок 1– Повертна сила фізичного маятника

або

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \frac{mga}{J}\alpha = 0 \quad \text{або} \quad \frac{d^2\alpha}{dt^2} + \omega_0^2 \cdot \alpha = 0, \quad (13)$$

де коефіцієнт при  $\alpha$  у рівнянні (13) є квадрат циклічної частоти власних коливань  $\frac{mga}{J} = \omega_0^2$ . Власна частота і період таких коливань мають вигляд:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{mga}{J}} \quad (14)$$

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{J}{mga}}. \quad (15)$$

Таким чином, коливальний рух фізичного маятника описується лінійним однорідним диференціальним рівнянням другого порядку (13). Загальне розв'язання такого рівняння буде рівнянням коливань фізичного маятника і має вигляд

$$\alpha = \alpha_m \cdot \cos(\omega_0 t + \varphi_0). \quad (16)$$

В окремому випадку (12), якщо маятник математичний,  $J = m \cdot l_{зв}^2$ , а період коливань такого маятника

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{l_{зв}}{g}}. \quad (17)$$

Порівнюючи періоди (15) і (17), бачимо, що можна підібрати математичний маятник такої довжини

$$l_{зв} = \frac{J}{ma}, \quad (18)$$

за якої він матиме такий самий період, як і даний фізичний.  $l_{зв}$  називають *зведеною довжиною* фізичного маятника.

Використовуючи формулу (15) можна визначити момент інерції фізичного маятника

$$J = \frac{T_0^2 mga}{4\pi^2}, \quad (19)$$

а за формулою (18) – зведену довжину фізичного маятника  $l_{зв}$ .

### 3. Опис установки та методика вимірювання

**Прилади:** фізичний маятник, секундомір, міліметрова лінійка.

У даній роботі ми спостерігаємо власні коливання фізичного маятника, який є металевим стрижнем, здатним вільно обертатися у вертикальній площині (рис. 1). Вісь обертання стрижня проходить через один з його кінців і розташована перпендикулярно стрижню.

**Прямі вимірювання.** Маса маятника задана на металевому стрижні. Довжина маятника вимірюється за допомогою лінійки один раз, але з високою точністю. Приладова точність – 0,001м.

Викликають коливання маятника шляхом відхилення його на невеликі кути  $3^\circ \dots 5^\circ$  від положення рівноваги, тільки в цьому випадку коливання будуть близькими до гармонічних.

За невеликих кутів відхилення  $\alpha$  значення амплітуди обчислюється за допомогою рівняння:

$$A = l \cdot \sin \alpha = l \cdot \alpha = \frac{l \cdot \pi \cdot \alpha^\circ}{180^\circ} \quad (20)$$

де  $l$  – довжина маятника.

Подальші вимірювання проводяться п'ять разів.

Для визначення періоду коливань маятника  $T_i$ , за допомогою секундоміра вимірюється час 10 або більше повних коливань (це необхідно для збільшення точності його визначення). Секундомір запускають в той момент, коли маятник знаходиться в одному з крайніх положень, після чого ведуть відлік коливань. Розділивши цей час на число коливань, отримуємо період коливання маятника. Період обчислювати з точністю до тисячних часток секунди. Середній період коливань  $\langle T \rangle$  визначається як середнє арифметичне від періодів отриманих в результаті п'яти вимірювань.

Підставляючи в (7) середнє значення періоду коливань, розраховується середня циклічна частота, і записується рівняння коливань маятника з числовими коефіцієнтами  $A$ ,  $\omega_0$ ,  $\varphi_0$ .

**Непряме вимірювання моменту інерції.** Студентам пропонується визначити момент інерції даного маятника, використовуючи отримані дані. Центр тяжіння однорідного стрижня знаходиться посередині його довжини, отже

$$a = l/2. \quad (21)$$

Підставивши (21) в (19), можна отримати рівняння для розрахунку експериментального значення моменту інерції:

$$J_{\text{екс}} = \frac{T_0^2 mgl}{8\pi^2}. \quad (22)$$

Вважати, що прискорення вільного падіння дорівнює  $9,81 \text{ м/с}^2$ .

**Теоретичне значення моменту інерції.** З теоретичної механіки відомо, що момент інерції обертаючогося стрижня навколо осі, яка проходить через один з його кінців, визначається виразом:

$$J_{\text{теор}} = \frac{ml^2}{3}. \quad (23)$$

#### 4. Статистична обробка результатів вимірювань

Для отримання результату **прямих вимірювань** величини  $x$  необхідно:

1) Експериментально визначити значення вимірюваної величини  $n$  разів ( $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ ) і записати результат цих вимірювань у другому стовпці таблиці вимірювань. У першому стовпці таблиці вимірювань записується порядкове число вимірювання.

2) Обчислити **середнє значення** вимірюваної величини:

$$\langle x \rangle = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n}{n} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n x_i. \quad (24)$$

3) Знайти **відхилення**  $\Delta x_i$  отриманих величин від середнього значення вимірюваної величини і записати результати в третьому стовпці таблиці вимірювань:

$$\Delta x_1 = \langle x \rangle - x_1; \quad \Delta x_2 = \langle x \rangle - x_2; \quad \dots; \quad \Delta x_n = \langle x \rangle - x_n. \quad (25)$$

4) Піднести кожне відхилення до квадрата і записати в четвертому стовпці таблиці вимірювань. Потім підсумувати їх:

$$\sum_{i=1}^n (\Delta x_i)^2 = (\Delta x_1)^2 + (\Delta x_2)^2 + \dots + (\Delta x_n)^2. \quad (26)$$

5) Знайти абсолютну **статистичну похибку** результатів вимірювання  $\Delta x_{\text{ст}}$  за допомогою формули Стюдента:

$$\Delta x_{\text{ст}} = t_{\alpha, n} \cdot \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (\Delta x_i)^2}{n(n-1)}}. \quad (27)$$

де  $\alpha$  – довірна ймовірність;  $n$  – число вимірювань;  $t_{\alpha, n}$  – коефіцієнт Стюдента.

6) Якщо на приладі не зазначена його **абсолютна похибка**  $\Delta x_{\text{пр}}$ , то її можна визначити, знаючи клас точності приладу  $\beta$  за формулою:

$$\Delta x_{\text{пр}} = \frac{\beta \cdot x_{\text{max}}}{100}, \quad (28)$$

де  $x_{\text{max}}$  – межа шкали.

7) Знайти **повну абсолютну похибку** вимірювань:

$$\Delta x = \sqrt{(\Delta x_{\text{ст}})^2 + (\Delta x_{\text{пр}})^2}. \quad (29)$$

8) Обчислити **відносну похибку** вимірювань:

$$\delta = \frac{\Delta x}{\langle x \rangle}. \quad (30)$$

9) Записати **кінцевий результат** у вигляді **довірчого інтервалу** і **відносної похибки**:

$$x = (\langle x \rangle \pm \Delta x)_{\delta} = (\dots \pm \dots)_{0,95}; \quad \delta_x \% = \frac{\Delta x}{\langle x \rangle} \cdot 100\% = \dots \%. \quad (31)$$

Для отримання результату **непрямого вимірювання** величини у необхідно:

1) Обчислити **середнє значення** вимірюваної величини  $\langle y \rangle$  за формулою, підставляючи в неї середні значення змінних величин  $\langle a \rangle$ ,  $\langle b \rangle$ ,  $\langle c \rangle$ , наприклад:

$$\langle y \rangle = \frac{8 \langle a \rangle^4 \cdot \sqrt[3]{\langle b \rangle^2}}{7 \langle c \rangle^5}. \quad (32)$$

2) Обчислити **відносну похибку** вимірюваної величини  $\delta_y$  за задалегідь отриманою формулою, підставивши до неї відносні похибки вимірюваних прямих величин  $\delta_a$ ,  $\delta_b$ ,  $\delta_c$ . Для нашого прикладу:

$$\delta_y = \sqrt{(4\delta_a)^2 + \left(\frac{2}{3}\delta_b\right)^2 + (5\delta_c)^2} = \sqrt{\left(4\frac{\Delta a}{\langle a \rangle}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\frac{\Delta b}{\langle b \rangle}\right)^2 + \left(5\frac{\Delta c}{\langle c \rangle}\right)^2}, \quad (33)$$

де  $\Delta a$ ,  $\Delta b$ ,  $\Delta c$  – абсолютні похибки виміряних прямих величин;  $\langle a \rangle$ ,  $\langle b \rangle$ ,  $\langle c \rangle$  – їх середні значення.

3) Знайти **абсолютну похибку** вимірюваної величини

$$\Delta y = \langle y \rangle \cdot \delta_y. \quad (34)$$

4) Записати **кінцевий результат** у вигляді **довірчого інтервалу** і **відносної похибки**:

$$y = (\langle y \rangle \pm \Delta y)_{0,95} = (\dots \pm \dots)_{0,95}; \quad \delta_y \% = \delta_y \cdot 100\% = \dots \%. \quad (35)$$

**Всі розраховані значення повинні містити три значущі цифри.**

## 5. Порядок виконання роботи й обробка результатів вимірювання

1. Зміряйте довжину маятника  $l$  з точністю, на яку розрахована лінійка. Запишіть масу маятника з металевого стрижня з точністю 0,001кг.

2. Зробіть прямі вимірювання часу 10-ти повних коливань за допомогою секундоміра і запишіть отримані дані в таблицю вимірювань. Повторіть це вимірювання, п'ять разів.

3. Визначте середнє значення періоду коливань (24), відхилення від середнього значення (25) і суму квадратів відхилень (26), абсолютну (29) і відносну (30) похибки періоду коливань. Запишіть кінцевий результат прямих вимірювань періоду у вигляді, як показано в (31).

4. Визначте амплітуду коливань маятника з допомогою (20) для кутових відхилень від стану рівноваги  $3^\circ \dots 4^\circ$ . Визначте циклічну частоту  $\omega_0$  згідно з (7) (початкову фазу  $\varphi_0$  вважати рівною нулю). Запишіть рівняння коливань маятника (у метрах) з числовими коефіцієнтами  $A$ ,  $\omega_0$  (див. формулу (2)).

5. Обчисліть експериментальне значення моменту інерції маятника  $J_{\text{екс}}$ , використовуючи формулу (22), і порівняйте його з теоретичним значенням  $J_{\text{теор}}$ , розрахованим за формулою (23). Обчисліть відносну (33) і абсолютну (34) похибки моменту інерції. Запишіть кінцевий результат непрямого вимірювання моменту інерції у вигляді, як показано (35).

6. Обчисліть середнє значення зведеної довжини  $l_{\text{зв}}$  фізичного маятника (18).

## 6. Контрольні питання

1. Які коливання називаються періодичними?
2. Що таке фізичний і математичний маятники?
3. Дайте визначення періоду, частоти, циклічної частоти? Як вони зв'язані?
4. Які коливання називаються гармонічними? За яких умов коливання можна вважати вільними?
4. Що називається квазіпружною силою? Як це виявляється у разі фізичного маятника?

5. Запишіть рівняння квазіпружної сили і залежності її моменту від кута відхилення маятника від стану рівноваги.
6. Поясніть, в чому полягає метод опису коливань?
7. Запишіть диференційне рівняння фізичних коливань маятника.
8. Виведіть рівняння періоду коливань фізичного маятника.
9. Виведіть вираз моменту інерції фізичного маятника.
10. Що таке зведена довжина фізичного маятника?
11. Як прискорення вільного падіння і маса впливають на період коливань фізичного маятника?

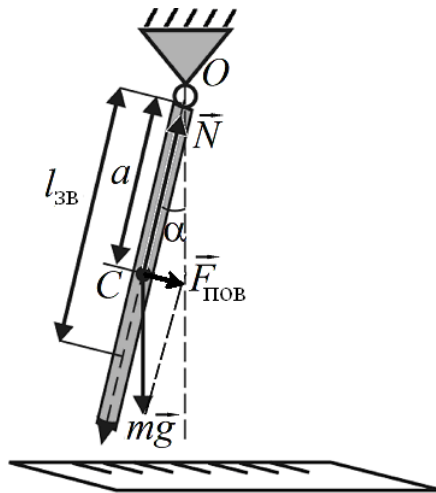
## 7. Протокол виконання лабораторної роботи № 4-1

1) **Тема:** Дослідження гармонічних коливань механічних систем.

2) **Мета роботи:**

1. Вивчення методу опису незгасаючих коливань фізичного маятника.
2. Ознайомлення з методом визначення моменту інерції і зведеної довжини фізичного маятника.

3) **Схема приладу або установки**



4) **Таблиця приладів**

| № з/п. | Найменування | Тип    | Заводський № | Межа шкали | Ціна поділки | Клас точності |
|--------|--------------|--------|--------------|------------|--------------|---------------|
| 1      | Секундомір   | УХЛ-42 |              | 99,99 с    | 0,01 с       | 0,01 с        |
| 2      | Лінійка      | У      | —            | 1000 мм    | 1 мм         | 1мм           |

5) **Формули розрахунку величин та їхніх похибок:**

$$1) x = A \cos(\omega_0 t + \varphi_0), \text{ де } \varphi_0 = 0; \omega_0 = \frac{2\pi}{\langle T \rangle}; A = l \sin \alpha \approx l\alpha = \frac{l\alpha^0 \pi}{180^0};$$

$$2) \Delta T = t_{\alpha, n} \cdot \sqrt{\frac{\sum (\Delta T_i)^2}{n(n-1)}}, \text{ де } t_{0,95;5} = 2,77; \alpha = 0,95;$$

$$3) \text{ Експериментальне значення моменту інерції: } \langle J \rangle = \frac{\langle T \rangle^2 mgl}{8\pi^2};$$

4) Значення:

$$\text{відносної похибки моменту інерції } \delta_J = \sqrt{\left(2 \frac{\Delta T}{\langle T \rangle}\right)^2 + \left(\frac{\Delta m}{m}\right)^2 + \left(\frac{\Delta l}{l}\right)^2};$$

абсолютної похибки моменту інерції  $\Delta J = \langle J \rangle \cdot \delta_J$ .

5) Теоретичне значення моменту інерції:  $J = \frac{ml^2}{3}$ ;

$$6) l_{\text{зв}} = \frac{2 \cdot \langle J \rangle}{ml}.$$

**б) Таблиця вимірювань**

$m =$  \_\_\_\_\_ кг;  $\Delta m = 0,001$  кг;  $l =$  \_\_\_\_\_ м;  $\Delta l = 0,001$  м;

| №                     | $t_i, \text{с}$ | $T_i, \text{с}$ | $\Delta T_i, \text{с}$ | $(\Delta T_i)^2, \text{с}^2$ |
|-----------------------|-----------------|-----------------|------------------------|------------------------------|
| 1.                    |                 |                 |                        |                              |
| 2.                    |                 |                 |                        |                              |
| 3.                    |                 |                 |                        |                              |
| 4.                    |                 |                 |                        |                              |
| 5.                    |                 |                 |                        |                              |
| $\langle T \rangle =$ |                 |                 |                        | $\Sigma(\Delta T_i)^2 =$     |

**7) Розрахунки величин та їхніх похибок:**

**8) Запис остаточних результатів:**

$$1) T = (\langle T \rangle \pm \Delta T)_\alpha \text{ с}; \delta_{T\%} = \frac{\Delta T}{\langle T \rangle} \cdot 100\%;$$

$$2) x = A \cos(\omega_0 t + \varphi_0) \text{ м};$$

$$3) J = (\langle J \rangle \pm \Delta J)_\alpha \text{ кг} \cdot \text{м}^2; \delta_{J\%} = \frac{\Delta J}{\langle J \rangle} \cdot 100\% ;$$

$$4) l_{\text{зв}} = \dots \text{ м}.$$

**9) Висновок:** (порівняти момент інерції, отриманий в роботі (формула (3)) і розрахунковий момент інерції (формула (5))).

**10) Роботу виконав:**

Роботу перевірів:

**Лабораторна робота № 4-2**  
**ВИВЧЕННЯ СКЛАДАННЯ ЕЛЕКТРИЧНИХ**  
**ГАРМОНІЧНИХ КОЛИВАНЬ**

### 1. Мета роботи

Вивчення складання електричних гармонічних коливань за допомогою осцилографа.

### 2. Основні поняття

#### 2.1. Складання однаково спрямованих коливань рівних частот

При складанні двох гармонічних коливань

$$x_1 = A_1 \cdot \cos(\omega_0 t + \varphi_1) \text{ і } x_2 = A_2 \cdot \cos(\omega_0 t + \varphi_2) \quad (36)$$

результуюче гармонічне коливання має зміщення  $x = x_1 + x_2$ , відбувається в тому самому напрямі і з тією самою частотою  $\omega_0$

$$x = A \cdot \cos(\omega_0 t + \varphi),$$

де  $A$  – амплітуда зміщення результуючого коливання;  $\varphi$  – його початкова фаза. З векторної діаграми (рис. 2) неважко побачити, що  $A$  і  $\varphi$  можна визначити як

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)} \quad (37)$$

$$\varphi = \arctg \frac{A_1 \sin \varphi_1 + A_2 \sin \varphi_2}{A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2}. \quad (38)$$

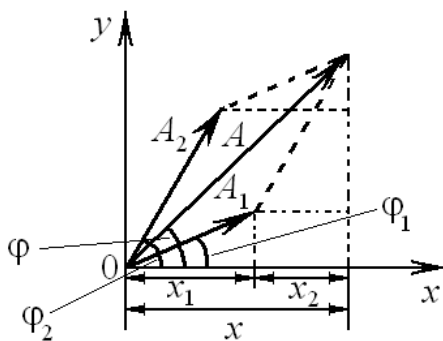


Рисунок 2 – Складання однаково спрямованих гармонічних коливань

Проаналізуємо вираз (37) для амплітуди.  $\cos(\varphi_2 - \varphi_1)$  не може бути більше +1 або менше -1, тому можливі значення амплітуди  $A$

поміщені в межах

$$A_1 + A_2 \geq A \geq |A_2 - A_1|$$

(при цьому враховується, що, за визначенням амплітуди, вона не може бути негативною).

Окремі випадки складання коливань:

а)  $\varphi_2 - \varphi_1 = 2n\pi$ , де  $n = 0, 1, 2, \dots$ ; тоді  $A = A_1 + A_2$ .

б)  $\varphi_2 - \varphi_1 = (2n + 1)\pi$ , де  $n = 0, 1, 2$ ; тоді  $A = |A_2 - A_1|$ .

#### 2.2. Биття (складання коливань з близькими частотами)

При складанні двох однаково спрямованих коливань  $x_1 = A \cdot \cos \omega_1 t$  і  $x_2 = A \cdot \cos \omega_2 t$ , де  $\omega_1 = \omega_0 - \Delta\omega$ , а  $\omega_2 = \omega_0 + \Delta\omega$ , причому  $\Delta\omega \ll \omega_0$ , результуюче коливання має вигляд:

$$x = x_1 + x_2 = 2A \cdot \cos \frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t \cdot \cos \frac{\omega_2 + \omega_1}{2} t = 2A \cos(\Delta\omega \cdot t) \cdot \cos \omega_0 t.$$



Його графік зображений на рис. 3. Як видно з графіка, результуюче коливання не є гармонічним. Його можна розглядати як «майже косинусоїдальне» з «умовним періодом»  $T = 2\pi/\omega_0$  і з повільно змінною амплітудою  $|2A \cdot \cos(\Delta\omega t)|$ .

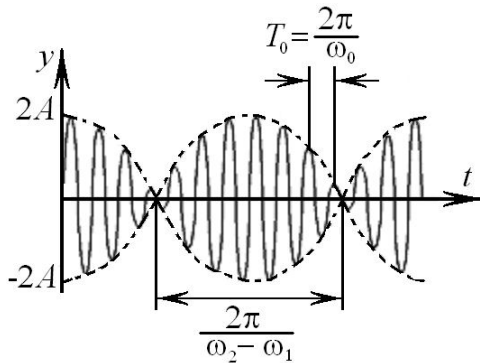


Рисунок 3 – Биття при складанні коливань з близькими частотами

Періодичні зміни «амплітуди» описаного вище коливання називають **биттям**.

Період биття

$$T = \frac{\pi}{\Delta\omega} = \frac{2\pi}{\omega_2 - \omega_1},$$

а частота

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega_2 - \omega_1}{2\pi} = \nu_2 - \nu_1.$$

У лініях зв'язку биття використовуються для амплітудної модуляції (АМ) вхідного сигналу.

### 2.3. Складання двох взаємно перпендикулярних коливань рівних частот.

Розглянемо складання двох взаємно перпендикулярних гармонічних коливань з однаковою частотою  $\omega_0$ , що здійснюються уздовж координатних осей  $x$  і  $y$ :

$$x = A_1 \cdot \cos(\omega_0 t + \varphi_1) \quad \text{і} \quad y = A_2 \cdot \cos(\omega_0 t + \varphi_2). \quad (39)$$

Зробимо перетворення:

$$\frac{x}{A_1} = \cos(\omega_0 t + \varphi_1) = \cos \omega_0 t \cos \varphi_1 - \sin \omega_0 t \sin \varphi_1; \quad (40)$$

$$\frac{y}{A_2} = \cos(\omega_0 t + \varphi_2) = \cos \omega_0 t \cos \varphi_2 - \sin \omega_0 t \sin \varphi_2. \quad (41)$$

Помноживши (40) на  $\cos \varphi_2$ , а (41) на  $\cos \varphi_1$ , і взявши їх різницю (оскільки  $\sin \varphi_2 \cos \varphi_1 - \sin \varphi_1 \cos \varphi_2 = \sin(\varphi_2 - \varphi_1)$ ), отримаємо

$$\frac{x}{A_1} \cos \varphi_2 - \frac{y}{A_2} \cos \varphi_1 = \sin \omega_0 t \cdot \sin(\varphi_2 - \varphi_1); \quad (42)$$

помноживши (40) на  $\sin \varphi_2$ , а (41) на  $\sin \varphi_1$ , і взявши їх різницю, отримаємо

$$\frac{x}{A_1} \sin \varphi_2 - \frac{y}{A_2} \sin \varphi_1 = \cos \omega_0 t \cdot \sin(\varphi_2 - \varphi_1). \quad (43)$$

Підносячи до квадрата і склавши (42) і (43), отримаємо

$$\left(\frac{x}{A_1}\right)^2 + \left(\frac{y}{A_2}\right)^2 - \frac{2xy}{A_1 A_2} \cos(\varphi_2 - \varphi_1) = \sin^2(\varphi_2 - \varphi_1). \quad (44)$$

Це рівняння еліпса, орієнтація і величина півосей якого залежать від різниці фаз  $\varphi_1 - \varphi_2$  і амплітуд  $A_1$  і  $A_2$ .

## 2.4. Окремі випадки складання двох взаємно перпендикулярних коливань

а)  $\varphi_2 - \varphi_1 = 0$ . Рівняння (44) набуде вигляду  $\left(\frac{x}{A_1} - \frac{y}{A_2}\right)^2 = 0$  або  $y = x \frac{A_2}{A_1}$ , з

чого бачимо, що траєкторією буде відрізок прямої, середина якого знаходиться в центрі координат з напівдовжиною  $r = \sqrt{A_1^2 + A_2^2}$  (рис. 4, а). Коливна точка здійснює гармонічні коливання вздовж цієї прямої згідно з законом  $r = \sqrt{A_1^2 + A_2^2} \cos \omega_0 t$ , тобто з частотою  $\omega_0$  і амплітудою  $r$ ;

б)  $\varphi_2 - \varphi_1 = \pm \pi$ . Рівняння (44) набуде вигляду  $\frac{x}{A_1} + \frac{y}{A_2} = 0$ , з чого бачимо,

що результуючий рух є гармонічним коливанням уздовж прямої  $y = x \frac{A_2}{A_1}$

(рис. 4, б);

в)  $\varphi_2 - \varphi_1 = \pm \pi/2$ . У цьому випадку рівняння (44) набуде вигляду

$$\left(\frac{x}{A_1}\right)^2 + \left(\frac{y}{A_2}\right)^2 = 1.$$

Це рівняння є рівнянням еліпса з півосями, що дорівнюють відповідним амплітудам. Якщо амплітуди  $A_1$  і  $A_2$  однакові, еліпс має вигляд кола.

Випадки  $\varphi_2 - \varphi_1 = +\pi/2$  і  $\varphi_2 - \varphi_1 = -\pi/2$  відрізняються напрямом руху по еліпсу або колу. Якщо  $\varphi_2 - \varphi_1 = +\pi/2$ , рівняння (39) можна записати у вигляді:

$$x = A_1 \cdot \cos \omega_0 t \quad \text{і} \quad y = A_2 \cdot \cos \omega_0 t.$$

У момент часу  $t=0$  коливна точка знаходиться в положенні С (рис. 4, в). У подальші моменти часу координата  $x$  зменшується, а  $y$  – стає негативною. Отже, рух здійснюється за годинниковою стрілкою, а при  $\varphi_2 - \varphi_1 = -\pi/2$  – проти годинникової стрілки.

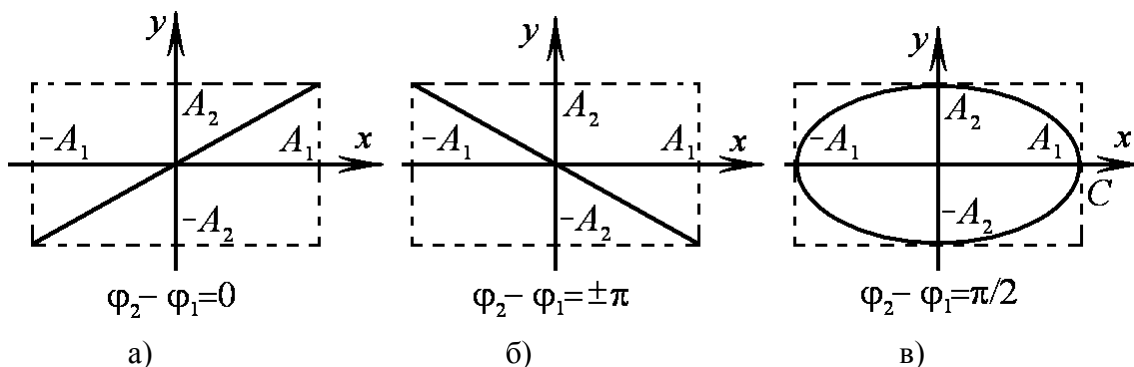


Рисунок 4 – Окремі випадки складання двох взаємно перпендикулярних коливань

## 2.5. Фігури Лісажу

Якщо скласти два взаємно перпендикулярних коливання з різними частотами, у разі раціонального відношення частот  $\frac{\omega_2}{\omega_1}$ , траєкторії руху будуть замкнуті. Такі криві називаються фігурами Лісажу. Вигляд фігур Лісажу залежить від відношень  $\frac{\omega_2}{\omega_1}$ ,

$\frac{A_2}{A_1}$  та  $\varphi_1 - \varphi_2$ . Якщо частоти взаємно

перпендикулярних коливань відрізняються на дуже малу величину  $\Delta\omega_0$ , їх можливо розглядати як коливання однакової частоти, але з повільно змінюючоюся різницею фаз.

Результуюче коливання в цьому випадку відбувається за кривою, що змінює свій вигляд, і яка буде послідовно приймати форму відповідно до всіх значень різниці фаз від  $-\pi$  до  $+\pi$ . На рис. 5 наведені криві Лісажу для різних значень відношення  $\frac{\omega_2}{\omega_1}$ . Рівняння кривих Лісажу опусується параметричним

рівнянням:

$$\begin{cases} x = A_1 \cos(\omega_1 t + \Delta\varphi) \\ y = A_2 \cos \omega_2 t. \end{cases} \quad (45)$$

## 3. Опис установки та методика вимірювання

Експериментальна установка складається з електронно-променевої трубки (осцилограф) і генератора синусоїдальних коливань (ГЗ–36) (див. протокол лабораторної роботи нижче).

Складання двох взаємно перпендикулярних коливань спостерігається при подачі на осцилограф двох синусоїдальних напруг на вхід  $Y$  і на вхід  $X$ . На вхід  $Y$  подають сигнал (змінна напруга) від генератора ГЗ–36, частоту якого можна змінювати, а на вхід  $X$  напругу від мережі з частотою 50 Гц.

Задача полягає у визначенні частоти керуючого сигналу  $\nu_x$ . Якщо частота генератора  $\nu_y$  буде раціонально відноситися до частоти керуючого сигналу  $\nu_x$ , тоді електронний промінь осцилографа окреслить одну з кривих Лісажу на екрані осцилографа (див. тримірну модель на сайті <http://phy.hk/wiki/englishhtm/Lissajous.htm> або <http://www.magnet.fsu.edu/education/tutorials/java/lissajous/index.html>).

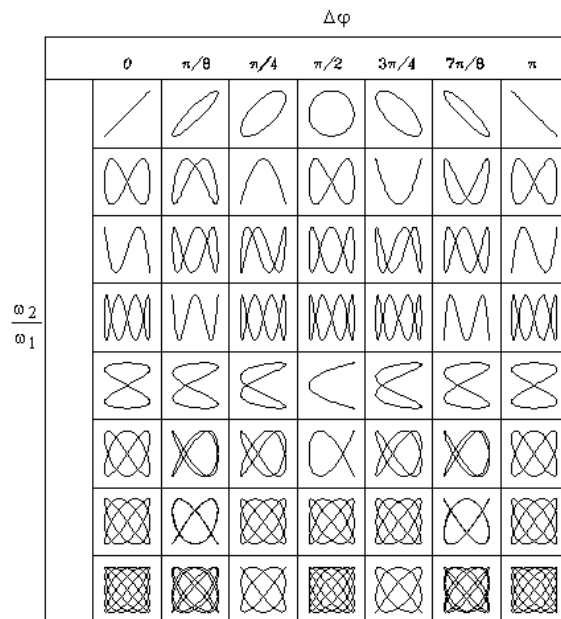


Рисунок 5 – Фігури Лісажу для різних відношень  $\omega_2/\omega_1$  з різницею фаз  $\Delta\varphi$

Кожний тип кривої відповідає кожному значенню відношення  $\frac{v_x}{v_y}$ . Відношення частот може бути легко

визначене таким методом. Проведіть дві будь-які вертикальні і горизонтальні лінії, що перетинають криву Лісажу. Лінії повинні бути проведені так, щоб вони не проходили через точку перетину кривої. Порахуйте кількість точок перетину  $N_y$  вертикальної лінії і кривої й кількість точок перетину  $N_x$  горизонтальної лінії і кривої.

Тоді  $\frac{v_x}{v_y} = \frac{N_y}{N_x}$ . На рис. 6 наведено приклад визначення

відношення для випадку  $\frac{v_x}{v_y} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$ . Частота  $v_y$  задана генератором,

визначаючи відношення  $\frac{v_x}{v_y}$  за фігурою Лісажу, ми можемо визначити частоту керуючого сигналу  $v_x$ .

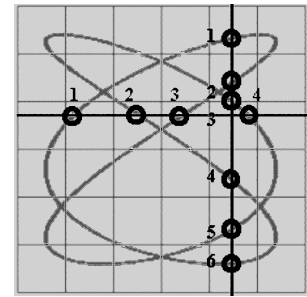


Рисунок 6 – Визначення відношення частот за кривою Лісажу

#### 4. Статистична обробка результатів вимірювань

Проводиться аналогічно тому, як показано в лабораторній роботі № 4-1.

#### 5. Порядок виконання роботи й обробка результатів вимірювання

1. Увімкніть генератор коливальних ГЗ–36 і осцилограф. Почекайте п'ять хвилин, поки вони не нагріються.

2. Змінюючи частоту звукового генератора  $v_y$ , отримайте на екрані осцилографа стійке зображення всіх кривих Лісажу, перелічених у таблиці вимірювань. Набуте значення  $v_y$  запишіть у таблицю вимірювань.

3. Визначте для кожної кривої відношення частот  $\frac{v_x}{v_y} = \frac{N_y}{N_x}$  і запишіть їх в

таблицю вимірювань.

4. Визначте частоту керуючого сигналу  $v_x$  для кожної кривої, її середнє значення  $\langle v_x \rangle$ , абсолютну і відносну похибки.

5. Результат подайте у стандартному вигляді.

6. Наприкінці зробіть висновок про точність вимірювання керуючого сигналу.

#### 6. Контрольні питання

1. Виведіть рівняння результуючого коливання, що отримуються при складанні однаково спрямованих гармонічних коливань однакової частоти.

2. У чому полягає метод векторного складання коливань?

3. Дослідіть залежність амплітуди результуючого коливання від різниці фаз у разі однаково спрямованих гармонічних коливань однакової частоти.
4. Що таке биття? Отримайте рівняння биття. Який їх період? Поясніть діаграму биття.
5. Отримайте рівняння результуючого коливання для випадку складання двох взаємно перпендикулярних коливань з рівними частотами.
6. Розгляньте окремі випадки складання двох взаємно перпендикулярних коливань з рівними частотами. Зробіть відповідні рисунки.
7. Що таке криві Лісажу? Запишіть рівняння кривих Лісажу в параметричній формі. Поясніть значення всіх величин, що входять в це рівняння.
8. Як визначити відношення частот  $\frac{\nu_x}{\nu_y}$  за кривою Лісажу?

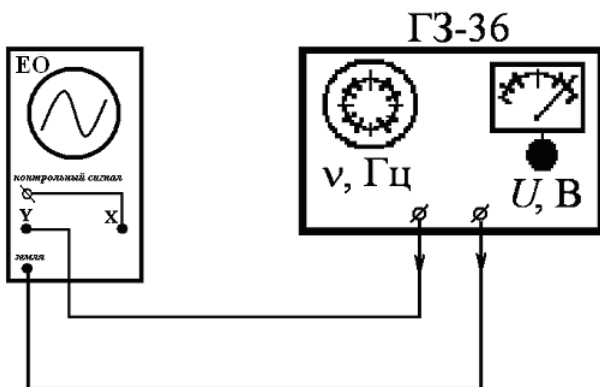
### 7. Протокол виконання лабораторної роботи № 4-2

1) **Тема:** Вивчення складання гармонічних електричних коливань.

2) **Мета роботи:**

1. Вивчення складання взаємно перпендикулярних гармонічних коливань за допомогою осцилографа.
2. Визначення частоти контрольного сигналу осцилографа за допомогою фігур Лісажу.

3) **Схема приладу або установки**



ГЗ-36 – генератор звуку;  
ЕО – електронний осцилограф

4) **Таблиця приладів**














| № з/п. | Найменування    | Тип     | Заводський № | Межа шкали    | Ціна поділки | Клас точності |
|--------|-----------------|---------|--------------|---------------|--------------|---------------|
| 1      | Осцилограф      | ЕО-7    |              |               | 1 мм         | 0,5 мм        |
| 2      | Генератор звуку | ГЗ – 36 |              | 20 – 20000 Гц |              |               |

5) **Формули розрахунку величин та їхніх похибок:**

$$1) \nu_x = \nu_y \frac{N_y}{N_x};$$

$$2) \Delta v_x = t_{\alpha, n} \cdot \sqrt{\frac{\sum (\Delta v_{xi})^2}{n(n-1)}}, \text{ де } t_{0,95;5} = 2,77; \alpha = 0,95.$$

**6) Таблиця вимірювань**

| $v_y,$<br>Гц | Вигляд фігур Лісажу   |   |   |   |   | $\frac{N_y}{N_x}$ | $v_x,$ Гц               | $\Delta v_{xi},$<br>Гц | $(\Delta v_{xi})^2,$<br>Гц <sup>2</sup> |
|--------------|---|---|---|---|---|-------------------|-------------------------|------------------------|---|
|              |  |  |  |  |  |                   |                         |                        |   |
|              |  |   |   |   |  |                   |                         |                        |   |
|              |  |   |   |   |  |                   |                         |                        |   |
|              |  |   |   |   |  |                   |                         |                        |   |
|              |  |   |   |   |  |                   |                         |                        |   |
|              |   |   |   |   |   |                   | $\langle v_x \rangle =$ |                        | $\sum (\Delta v_{xi})^2 =$              |

**7) Розрахунки величин та їхніх похибок:**

**8) Запис остаточних результатів:**

$$v_x = (\langle v_x \rangle \pm \Delta v_x)_\alpha = (\dots \pm \dots)_{0,95} \text{ Гц}; \quad \delta_{v_x, \%} = \frac{\Delta v_x}{\langle v_x \rangle} \cdot 100\% = \dots \%$$

**9) Висновок:**

**10) Роботу виконав:**

Роботу перевірів:

**Лабораторна робота № 4-3**  
**ВИЗНАЧЕННЯ ПАРАМЕТРІВ ЗГАСАЮЧИХ КОЛИВАНЬ**  
**ЗА ДОПОМОГОЮ ФІЗИЧНОГО МАЯТНИКА**

**1. Мета роботи:**

Вивчення основних параметрів і методу опису згасаючих коливань механічних систем за допомогою фізичного маятника.

**2. Основні поняття**

Реальні коливальні системи зазнають різних протидій, і через деякий час припиняють коливальний рух, якщо для його підтримки не надходить енергія ззовні. **Згасаючі коливання** – такий вид вільних коливань, енергія яких зменшується з часом.

Механічна енергія коливальної системи поступово зменшується, переходячи в тепло, що виділяється в зовнішнє середовище. Цей процес називається дисипацією енергії, а така система – дисипативною.

При коливальному русі реальної системи на неї одночасно діють дві сили:

- 1) повертна сила, сила пружності (квазіпружна сила), яка діє в природних коливальних системах і визначається законом Гука

$$F_{\text{пов}} = -k \cdot x;$$

- 2) сила опору середовища, яке, за законом Ньютона для малих швидкостей, визначається по формулі:

$$F_{\text{оп}} = -rv, \quad (46)$$

де  $v$  – швидкість руху маятника;  $r$  – коефіцієнт опору. “Мінус” в рівнянні (46) показує, що сила опору завжди спрямована протилежно напрямку швидкості.

Оскільки за другим законом Ньютона сума всіх діючих сил у системі дорівнює множенню маси на прискорення, то для реальної дисипативної системи маємо

$$ma = -kx - rv. \quad (47)$$

Оскільки механічні коливання є одним із розділів механіки, основне завдання якої полягає у визначенні положення тіла у будь-який момент часу, нам необхідно записати рівняння залежності координати від часу. Тому, замінивши швидкість і прискорення в рівнянні (47) скалярними значеннями

$v = \frac{dx}{dt}$  і  $a = \frac{d^2x}{dt^2}$  і зробивши переніс доданків ліворуч, отримаємо диференціальне рівняння згасаючих коливань

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + r \frac{dx}{dt} + kx = 0, \quad (48)$$

де  $m$  – маса коливного тіла (системи коливних тіл);  $x$  – зміщення тіла від положення рівноваги;  $k$  – коефіцієнт пружності (деформації системи). Поділивши обидві частини рівняння (48) на  $m$ , отримаємо:

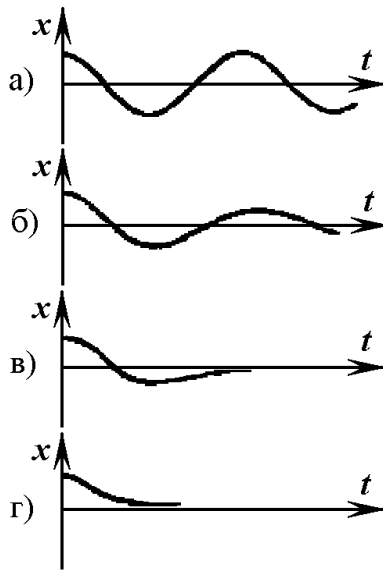


Рисунок 8 – Разні режими в коливальних системах

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0, \quad (49)$$

де

$$2\beta = \frac{r}{m}, \quad \omega_0^2 = \frac{k}{m}.$$

Рішення цього диференційного рівняння дає залежність зміщення  $x$  від часу  $t$ , яку називають рівнянням згасаючих коливань в інтегральній формі:

$$x(t) = A_0 \cdot e^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi_{01})$$

$$\text{або } x(t) = A_0 \cdot e^{-\beta t} \cdot \sin(\omega t + \varphi_{02}), \quad (50)$$

де коефіцієнт згасання

$$\beta = \frac{r}{2m} \quad (51)$$

і циклічна (колова) частота згасаючих коливань

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} \quad (52)$$

– основні параметри згасаючих коливань;  $\omega_0$  – циклічна частота власних (незгасаючих)

коливань цієї системи;  $A_0 \cdot e^{-\beta t}$  – експоненційно убуваюча амплітуда згасаючих коливань;  $A_0$  – початкова амплітуда, визначувана енергією системи у момент часу  $t = 0$ .

На рис. 7 представлені залежності амплітуди згасаючих коливань від часу (пунктирна лінія) і зміщення від часу (суцільна лінія).

Згасаючі коливання є **неперіодичними коливаннями**, оскільки в них ніколи не повторюються значення фізичних величин, що їх характеризують (наприклад, такі, як зміщення, швидкість і прискорення). Саме тому до них незастосовне поняття періоду і частоти в тому сенсі, як вони введені для періодичних (незгасаючих) коливань.

**Умовним періодом**  $T_{\text{ум}}$  згасаючих коливань називається проміжок часу між двома послідовними станами коливної системи (рис. 7). Оскільки

$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$  і  $\omega = 2\pi/T$ , отримаємо умовний період коливань

$$T_{\text{ум}} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}. \quad (53)$$

Період згасаючих коливань (53) більше періоду власних коливань тіла (системи)  $T_0 = 2\pi/\omega_0$ , тобто коливань, які були б у відсутності сил тертя.

Залежно від величини коефіцієнта згасання, спостерігаються різні режими коливальних систем (рис. 8):

а)  $\beta = 0$ , тоді  $r = 0$ ,  $T = 2\pi/\omega_0 = T_0$  – **незгасаючі коливання**;

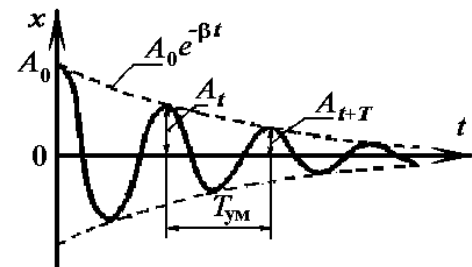


Рисунок 7 – Залежність згасаючих коливань від часу



б)  $\beta < \omega_0$ , тоді  $\omega_0^2 - \beta^2 > 0$ ,  $T = 2\pi / \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} > T_0$  – *згасаючі коливання* (майже періодичні);

в)  $\beta = \omega_0$ , тоді  $\omega_0^2 - \beta^2 = 0$ ,  $T \rightarrow \infty$  – *аперіодичний* (критичний) *режим* (коливання відсутні);

г)  $\beta > \omega_0$ , тоді  $\omega^2 - \beta^2 < 0$ ,  $T$  – уявна величина – *супераперіодичний режим*.

Основними характеристиками згасаючих коливань є:

1. **Декремент згасання** – це відношення двох послідовних амплітуд одного і того ж знаку, віддалених одна від іншої за часом на період

$$\varepsilon = \frac{A_t}{A_{t+T}} = \frac{A_0 e^{-\beta t}}{A_0 e^{-\beta(t+T)}} = e^{\beta T}. \quad (54)$$

2. У практичних розрахунках частіше використовується **логарифмічний декремент згасання**

$$\delta = \ln \varepsilon = \ln e^{\beta T} = \beta T. \quad (55)$$

Позначаючи  $\tau$  проміжок часу, за який амплітуда коливань зменшується в  $e$  разів ( $e = 2,7183$  – основа натурального логарифма), можна записати

$$\frac{A_t}{A_{t+\tau}} = e^{\beta \tau} = e, \quad (56)$$

отже,  $\beta \tau = 1$  або

$$\beta = \frac{1}{\tau}. \quad (57)$$

Таким чином, коефіцієнт згасання  $\beta$  – *величина зворотна часу  $\tau$ , протягом якого амплітуда коливань зменшується в  $e$  разів* (фізичний смисл  $\beta$ ). За час  $\tau$  система встигає зробити  $N_e = \frac{\tau}{T}$  коливань, тому

$$\delta = \beta T = \frac{1}{\tau} \cdot \frac{\tau}{N_e} = \frac{1}{N_e}. \quad (58)$$

Отже, **логарифмічний декремент згасання** – *величина зворотна числу коливань, що здійснюються за час, протягом якого амплітуда коливань зменшується в  $e$  разів* (фізичний смисл  $\delta$ ).

3. Для характеристики коливань часто використовується величина, яку називають **добротністю коливальної системи**

$$Q = \frac{\pi}{\delta} = \pi N_e \quad \text{або} \quad Q = \frac{\pi}{\delta} = \frac{\pi}{\beta \cdot T} = \frac{\pi \cdot \omega}{\beta \cdot 2\pi} = \frac{\omega}{2\beta}. \quad (59)$$

Отже, бачимо, що **добротність пропорційна числу коливань  $N_e$ , що здійснюються системою за час  $\tau$ , протягом якого амплітуда зменшується в  $e$  разів** (фізичний смисл  $Q$ ).

У практичних розрахунках при малих згасаннях звичайно вважають  $\delta = \beta T_0$ , де  $T_0$  – період незгасаючих коливань тієї ж системи. Тоді можна вважати, що  $Q = \frac{\omega_0}{2\beta}$ .

Чим більше добротність, тим менше згасання у системі.

### 3. Опис установки та методика вимірювання

**Прилади:** фізичний маятник з гальмуючим рух пристроєм, секундомір, міліметрова лінійка.

Коливальною системою в даній роботі служить фізичний маятник 1 (використовуваний в лабораторній роботі № 4-1) з пластинкою 3, що кріпиться за допомогою рухомої муфти 2 (рис. 9). Муфта дає можливість закріплювати пластинку в будь-якому місці стрижня маятника і під будь-яким кутом до площини коливань. Змінюючи кут між площиною коливань і площиною пластинки, можна створювати різну величину сили тертя між коливною системою і повітрям. Вільний кінець маятника закінчується вістрям 4, за допомогою якого вимірюється величина амплітуди коливань.

Коли маятник нерухомий, під вістря поміщають лінійку, суміщаючи нуль з вістря маятника. Відстань між вістря і шкалою не повинна перевищувати 1...2 мм.

У цій роботі ми за допомогою секундоміра вимірюємо час  $\tau$ , протягом якого амплітуда зменшується в  $e = 2,7$  разів і рахуємо число коливань, здійснених системою за цей час.

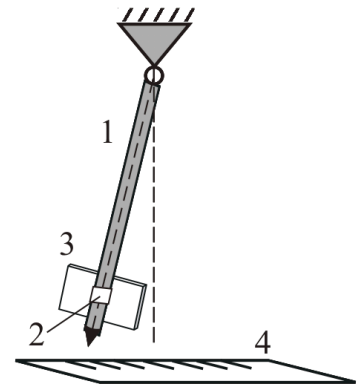


Рисунок 9 – Фізичний маятник зі згасанням:  
1 – фізичний маятник;  
2 – рухома муфта;  
3 – пластинка;  
4 – лінійка

### 4. Статистична обробка результатів вимірювань

Проводиться аналогічно тому, як показано в лабораторній роботі 4-1.

### 5. Порядок виконання роботи й обробка результатів вимірювання

1. Запишіть масу маятника (вона задана на металевому стрижні). Зміряйте довжину маятника за допомогою лінійки один раз, але з високою точністю. Приладова точність – 0,001м.

2. Установіть пластинку 3 (рис. 9) на довільну висоту, так, щоб площина пластинки складала з площиною коливань маятника  $90^\circ$  (з доступною вам точністю).

3. Викличте коливання маятника шляхом відхилення його на 70...80 мм від положення рівноваги, за шкалою горизонтально лежачої лінійки.

4. Дочекайтеся, поки відхилення маятника буде дорівнювати 54 мм і включити секундомір. Рахуючи повні коливання маятника  $N_e$ , вимкнуті секундомір, коли амплітуда коливань буде 20 мм, тобто зменшиться в  $e$  разів. Запишіть дані про час згасання  $\tau$  і вимірне число коливань  $N_e$  в таблицю вимірювань.

5. За допомогою відношення  $T = t/N_e$  визначте період згасаючих коливань. Запишіть набутого значення в таблицю вимірювань.

Повторіть ці прямі вимірювання п'ять разів.

6. Визначте середні значення часу згасання, числа коливань і умовного періоду (24), відхилення умовного періоду від його середнього значення (25), суму квадратів відхилень (26), абсолютну (29) і відносну (30) похибки періоду коливань. Запишіть кінцевий результат прямих вимірювань періоду у вигляді, як показано в (31).

7. Визначте циклічну частоту  $\omega$  згідно з (7) і коефіцієнт згасання  $\beta$  (57).

8. В кінцевих результатах запишіть рівняння зміщення для згасаючих коливань фізичного маятника (див. формулу (50)) з числовими коефіцієнтами  $A_0$ ,  $\beta$ ,  $\omega$  (початкова фаза  $\varphi_0$  дорівнює 0).

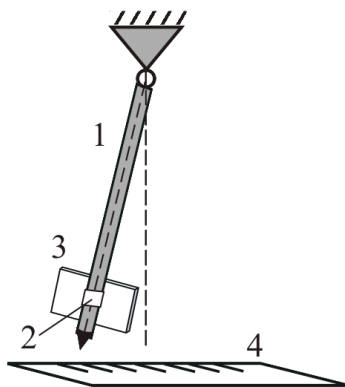
9. Обчисліть логарифмічний декремент згасання згідно з (58) і добротність коливальної системи згідно з (59). Запишіть їх значення у кінцевих результатах.

## 6. Контрольні питання

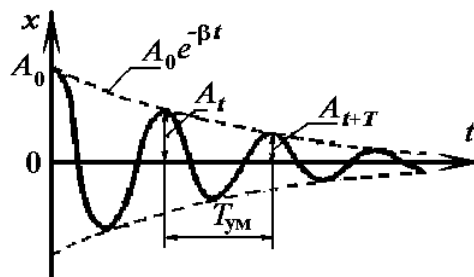
1. Які механічні системи ми називаємо дисипативними?
2. Які коливання називаються згасаючими? Чи є вони періодичними? Чому?
3. Чому дорівнює період згасаючих коливань?
4. Як описуються механічні згасаючі коливання (диференціальне рівняння)?
5. Виведіть диференціальне рівняння для механічних згасаючих коливань.
6. Запишіть рівняння для згасаючих коливань в інтегральній формі і пояснить значення фізичних величин в ньому.
7. Поясніть фізичний смисл декременту згасання. Що таке час згасання? Як величина декременту згасання впливає на умовний період?
8. Що таке логарифмічний декремент згасання, його фізичний смисл?
9. Що таке добротність, її фізичний смисл?

## 7. Протокол виконання лабораторної роботи № 4-3

- 1) **Тема:** Визначення параметрів згасаючих коливань за допомогою фізичного маятника.
- 2) **Мета роботи:** Вивчення основних параметрів і методу опису згасаючих коливань механічних систем.
- 3) **Схема приладу або установки**



- 1 – фізичний маятник;  
2 – рухома муфта;  
3 – пластина;  
4 – лінійка.



#### 4) Таблиця приладів

| № з/п. | Найменування | Тип    | Заводський № | Межа шкали | Ціна поділки | Клас точності |
|--------|--------------|--------|--------------|------------|--------------|---------------|
| 1      | Секундомір   | УХЛ-42 |              | 99,99 с    | 0,01 с       | 0,01 с        |
| 2      | Лінійка      | У      | –            | 1000 мм    | 1 мм         | 1мм           |

#### 5) Формули розрахунку величин та їхніх похибок:

1)  $A_0/A_T = e$ , де  $A_0 = 54$  мм,  $A_T = 20$  мм;

2)  $\Delta T = t_{\alpha,n} \cdot \sqrt{\frac{\sum (\Delta T_i)^2}{n(n-1)}}$ , де  $t_{0,95;5} = 2,77$ ,  $\alpha = 0,95$ ;

3)  $\langle \beta \rangle = 1/\langle t \rangle$ ; 4)  $\langle \delta \rangle = \langle \beta \rangle \cdot \langle T \rangle$ ; 5)  $\langle \omega \rangle = 2\pi/\langle T \rangle$ ; 6)  $\langle Q \rangle = \pi \cdot \langle N_e \rangle$ ;

7)  $x = A_0 e^{-\beta t} \cos \langle \omega \rangle t$ .

#### 6) Таблиця вимірювань

| №  | $t_i$ , с               | $N_{ei}$                | $T_i$ , с             | $\Delta T_i$ , с | $(\Delta T_i)^2$ , с <sup>2</sup> |
|----|-------------------------|-------------------------|-----------------------|------------------|-----------------------------------|
| 1. |                         |                         |                       |                  |                                   |
| 2. |                         |                         |                       |                  |                                   |
| 3. |                         |                         |                       |                  |                                   |
| 4. |                         |                         |                       |                  |                                   |
| 5. |                         |                         |                       |                  |                                   |
|    | $\langle t_i \rangle =$ | $\langle N_e \rangle =$ | $\langle T \rangle =$ |                  | $\sum (\Delta T_i)^2 =$           |

#### 7) Розрахунки величин та їхніх похибок:

1)  $\Delta T =$  с; 2)  $\langle T \rangle =$  с; 3)  $\langle \beta \rangle =$  с<sup>-1</sup>;

4)  $\langle \delta \rangle =$  ; 5)  $\langle \omega \rangle =$  рад/с; 6)  $\langle Q \rangle =$  ;

#### 8) Запис остаточних результатів:

1)  $T = (\langle T \rangle \pm \Delta T)_\alpha$  с; 2)  $\delta_{T\%} = \frac{\Delta T}{\langle T \rangle} \cdot 100\%$ ; 3)  $x = A_0 e^{-\beta t} \cos \langle \omega \rangle t$ , м;

4)  $\langle \beta \rangle =$  с<sup>-1</sup>; 5)  $\langle \delta \rangle =$  ; 6)  $\langle Q \rangle =$  .

#### 9) Висновок:

10) Роботу виконав:

Роботу перевірів:

## Лабораторна робота № 4 - 4

### ДОСЛІДЖЕННЯ ЗГАСАЮЧИХ ЕЛЕКТРИЧНИХ КОЛИВАНЬ

#### 1. Мета роботи:

1.1. Ознайомлення з процесами, що відбуваються в ідеальному коливальному контурі і методом їхнього опису.

1.2. Ознайомлення з процесами, що відбуваються в реальному коливальному контурі, методом їхнього опису, а також вимірювання фізичних величин, що характеризують електричні коливання, визначення параметрів контуру.

#### 2. Основні поняття

##### 2.1. Ідеальний коливний контур

Аналогічно опису механічних коливань (див. лабораторну роботу № 4-1), розглянемо, як відбуваються електричні коливання в коливальному контурі, який складається з котушки індуктивності  $L$ , активним опором  $R$  якої можна знехтувати, та конденсатора ємності  $C$  (рис. 10).

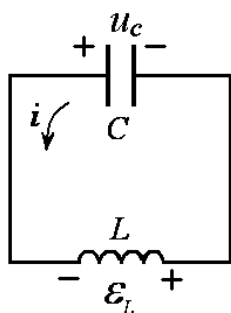


Рисунок 10 – Ідеальний коливний контур

Для збудження в контурі коливань конденсатор заздалегідь заряджають, передаючи його пластинам заряд  $q_0$ . Тоді в початковий момент часу він почне розряджатися і в контурі потече наростаючий з часом струм  $i$ . Енергія електричного поля конденсатора

$W_E = \frac{Cu_C^2}{2} = \frac{q_0^2}{2C}$  почне зменшуватися, а енергія

магнітного поля котушки індуктивності  $W_M = \frac{Li^2}{2}$

зростатиме. Оскільки  $R \approx 0$ , то повна енергія контура не змінюється, а електрична енергія поля конденсатора повністю переходить в енергію магнітного поля котушки індуктивності. З цієї миті струм в контурі убаватиме, отже, почне слабшати магнітне поле котушки, і в ній почне індукуватися струм, який тече (згідно з правилом Ленца) в тому ж напрямі, що і струм розрядки конденсатора. Конденсатор почне перезаряджатися, виникне електричне поле, яке прагне ослабити струм, котрий, врешті-решт, перетвориться на нуль, а заряд на пластинах конденсатора досягне початкового значення  $q_0$ . Енергія магнітного поля котушки індуктивності повністю переходить у енергію електричного поля конденсатора (конденсатор перезарядився). Потім ті ж процеси протікають у зворотному напрямі.

Видно, що в ході розглянутого процесу такі величини, як заряд  $q$  на пластинах конденсатора, різниця потенціалів (напряга)  $u_C$  між пластинами конденсатора і величина струму  $i$ , що протікає через індуктивність, здійснюють періодичні коливання.

Для опису електромагнітних коливань використовуємо другий закон Кірхгофа (сума падінь напруг в будь-якому замкнутому контурі дорівнює сумі

ЕРС в ньому), тоді в нашому випадку:  $u_C = \mathcal{E}$ . Під час власних електричних коливань напруга на конденсаторі  $u_C = \frac{q}{C}$  дорівнює ЕРС самоіндукції

$\mathcal{E}_L = -L \frac{di}{dt}$  у контурі, знак мінус показує, що індукційний струм спрямований протилежно струму розряду конденсатора.

Вважаючи коливання в контурі квазістаціонарними, матимемо

$$L \frac{di}{dt} + \frac{q}{C} = 0; \quad L \frac{d^2q}{dt^2} + \frac{q}{C} = 0 \quad \text{або} \quad \frac{d^2q}{dt^2} + \frac{1}{LC} q = 0, \quad (61)$$

де  $\frac{di}{dt} = \frac{d^2q}{dt^2}$ , оскільки  $i = \frac{dq}{dt}$ . Враховуючи, що  $\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}$  – циклічна (колова) частота власних коливань контуру, **диференційне рівняння коливання заряду в контурі** можна показати у вигляді

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \omega_0^2 q = 0 \quad \text{або} \quad \ddot{q} + \omega_0^2 q = 0. \quad (62)$$

Порівнюючи рівняння (62) і (13) можна зазначити, що між механічними і електричними коливаннями існує глибока аналогія:

| Механічні коливання     | Електричні коливання     | Механічні коливання    | Електричні коливання  |
|-------------------------|--------------------------|------------------------|-----------------------|
| $x$                     | $q$                      | $T_0 = 2\pi\sqrt{m/k}$ | $T_0 = 2\pi\sqrt{LC}$ |
| $k$                     | $1/C$                    | $v = dx/dt$            | $i = dq/dt$           |
| $m$                     | $L$                      | $W_K = mv^2/2$         | $W_M = Li^2/2$        |
| $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ | $\omega_0 = \sqrt{1/LC}$ | $W_{\Pi} = kx^2/2$     | $W_E = Cu_c^2/2$      |

Рішення диференційного рівняння (62) аналогічно рішенню рівняння (13). Рішенням є гармонічне коливання, що має вигляд

$$q = q_0 \cdot \cos(\omega_0 t + \varphi_0). \quad (63)$$

Це рівняння називається **рівнянням коливань заряду в інтегральній формі**.

Для періоду коливань матиме так звану **формулу Томсона**:

$$T_0 = 2\pi\sqrt{LC}. \quad (64)$$

Напруга на ємності відрізняється від заряду на множник  $1/C$ :

$$u_C = \frac{q}{C} = \frac{q_0}{C} \cos(\omega_0 t + \varphi_0) = u_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0). \quad (65)$$

Продиференціювавши рівняння (63) за часом, отримаємо закон зміни величини струму в контурі

$$i = \frac{dq}{dt} = -\omega_0 q_0 \cdot \sin(\omega_0 t + \varphi_0) = -i_0 \cdot \sin(\omega_0 t + \varphi_0) = i_0 \cdot \cos\left(\omega_0 t + \varphi_0 + \frac{\pi}{2}\right). \quad (66)$$

З (65) і (66) випливає, що  $u_0 = q_0/C$  і  $i_0 = \omega_0 q_0$ , і, враховуючи, що  $\omega_0 = \sqrt{1/LC}$ , одержимо зв'язок між напругою на ємності і струмом у контурі:

$$u_0 = i_0 \sqrt{L/C}. \quad (67)$$

Величина  $\sqrt{L/C}$  називається хвильовим опором контура і характеризує якість перетворення енергії електричного поля в енергію магнітного поля і навпаки.

## 2.2. Реальний коливальний контур

Реальний коливальний контур має опір, що характеризує втрати енергії в котушці індуктивності та з'єднаних проводах (рис. 11). Вільні коливання в контурі, що містить ємність  $C$ , індуктивність  $L$  і активний опір  $R$ , можуть виникнути за різних початкових умов:

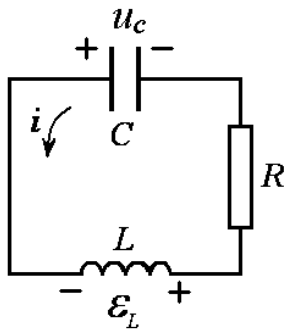


Рисунок 11 – Реальний коливальний контур

- а) коло контуру замкнуте після зарядки конденсатора;
- б) коло контуру замкнуте і, за рахунок зовнішнього впливу, в котушці індуктивності  $L$  індукується ЕРС;
- в) коло контуру замкнуте на задалегідь заряджений конденсатор в мить, коли в котушці індуктивності наведена ЕРС.

Початкові умови, за яких виникають вільні коливання, визначають початкову фазу процесу та амплітуду коливань. Характер перебігу процесу коливань залежатиме від властивостей конкретно заданого контуру.

Процес вільних коливань у реальному контурі полягає в циклічному перезарядженні конденсатора та протіканні змінного струму в колі контуру. За цих коливань електрична енергія поля зарядженого конденсатора й енергія магнітного поля струму, який протікає в контурі, по черзі переходять одна в одну.

В результаті того, що в реальному контурі є активний опір, початковий запас енергії системи витрачається на виділення тепла в проводах, які з'єднують елементи контуру (див. закон Джоуля-Ленца). Тому коливання, що виникають в реальному контурі, не будуть повністю періодичними. Амплітуда напруги на конденсаторі (величина заряду або струму в колі конденсатора) після кожної його перезарядки стає все меншою.

Падіння напруги на активному опорі контуру

$$u_R = i \cdot R, \quad (68)$$

де величина струму  $i$  в контурі пов'язана із зарядом  $q$  і напругою  $u_C$  на конденсаторі співвідношенням

$$i = \frac{dq}{dt} = [dq = C \cdot du_C] = C \frac{du_C}{dt}, \quad (69)$$

а  $u_C = q/C$  – різниця потенціалів на пластинах конденсатора.

Зміна величини струму в контурі викликає електрорушійну силу самоіндукції в індуктивності  $L$ , що дорівнює

$$\mathcal{E}_L = -L \frac{di}{dt} = \left[ \frac{di}{dt} = \frac{d^2q}{dt^2} = C \frac{d^2u_C}{dt^2} \right] = -LC \frac{d^2u_C}{dt^2}. \quad (70)$$

Застосувавши другий закон Кірхгофа (див. вище) і, вважаючи коливання квазістаціонарними, отримаємо:  $u_R + u_C = \mathcal{E}$ . Підставляючи значення  $u_R$ ,  $u_C$  і  $\mathcal{E}_L$  з (68), (69) і (70) в (71), отримаємо диференційне рівняння вільних (згасаючих) коливань в реальному контурі, що складається з котушки індуктивністю  $L$  та конденсатора ємністю  $C$ , з'єднаних між собою провідниками опором  $R$ :

$$R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = -L \frac{d^2q}{dt^2} \quad \text{або} \quad L \frac{d^2q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = 0. \quad (72)$$

Розділивши (72) на  $L$ , отримаємо **диференційне рівняння згасаючих електричних коливань** у вигляді

$$\frac{d^2q}{dt^2} + 2\beta \frac{dq}{dt} + \omega_0^2 q = 0. \quad (73)$$

Розв'язанням цього рівняння є **рівняння згасаючих електричних коливань в інтегральній формі**

$$q = q_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi_1) \quad \text{або} \quad q = q_0 e^{-\beta t} \sin(\omega t + \varphi_2), \quad (74)$$

де  $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{LC}\right) - \left(\frac{R}{2L}\right)^2}$  – циклічна (колова) частота згасаючих

коливань;  $\beta = \frac{R}{2L}$  – коефіцієнт згасання;  $\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}$  – частота власних коливань в контурі;  $\varphi_1$  і  $\varphi_2$  – початкові фази коливань;  $q = q_0 e^{-\beta t}$  – амплітуда згасаючих коливань;  $q_0$  – початкова амплітуда коливань.

На рис. 12 пунктиром показана залежність зміни амплітуди заряду від часу, а суцільною лінією – залежність заряду від часу.

Проміжок часу між двома найближчими точками відхилень суцільної ліній, які знаходяться в однаковій фазі, являє собою **період згасаючих коливань**.

Як видно з формули періоду згасаючих коливань (умовного періоду)  $T_{\text{ум}} = 2\pi / \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$ , він є більший за період  $T_0 = 2\pi / \omega_0 = 2\pi \sqrt{LC}$  незгасаючих коливань у контурі, які були б за відсутності активного опору.

За аналогією з механічними згасаючими коливаннями (лаб. робота № 4-3) для характеристики швидкості згасання коливань у контурі вводиться поняття **декременту згасання**

$$\varepsilon = \frac{q_t}{q_{t+T}} = \frac{q_0 e^{-\beta t}}{q_0 e^{-\beta(t+T)}} = \frac{q_0 e^{-\beta t}}{q_0 e^{-\beta t} e^{-\beta T}} = e^{\beta T}.$$

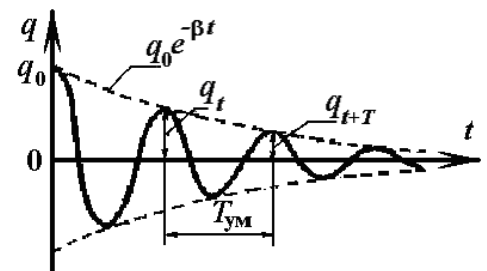


Рисунок 12 – Згасаючі електричні коливання



Натуральний логарифм декременту згасання називають *логарифмічним декрементом згасання*, згідно з (55), отримаємо

$$\delta = \ln \varepsilon = \ln e^{\beta T} = \beta T.$$

З (58) видно, що  $\delta$  величина зворотна числу коливань  $N_e$ , що здійснюються коливною величиною за час релаксації  $\tau$  (*фізичний смисл*  $\delta$ ).

*Добротність коливальної системи*, за аналогією з (59)

$$Q = \frac{\pi}{\delta} = \frac{\omega}{2\beta} = \frac{1}{2\sqrt{LC}} \frac{2L}{R} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}.$$

Режими коливання фізичних величин ( $q$ ,  $u$ ,  $i$ ) в контурі, залежно від величини коефіцієнта згасання, аналогічні розглянутим в лабораторній роботі №4-3. Тому всі висновки, зроблені для коливних механічних систем, в межах аналогії можна застосувати і до електричних процесів в коливальних контурах.

Слід зазначити, що аперіодичний режим в коливальному контурі настає, коли опір контуру  $R$  буде дорівнювати критичній величині

$$R_k = 2\sqrt{\frac{L}{C}}. \quad (75)$$

### 3. Опис установки та методика вимірювання

Згасаючі електричні коливання створюються в реальному коливальному контурі з послідовно поєднаними резистором з опором  $R$ , котушкою з індуктивністю  $L$  і конденсатором з ємністю  $C$ , за допомогою імпульсних періодичних зарядів конденсатора контуру (рис. 13). Здійснюється така зарядка конденсатора за допомогою генератора П-подібних імпульсів (ГПІ). Час тривалості одного імпульсу повинен бути значно менше часу надходження

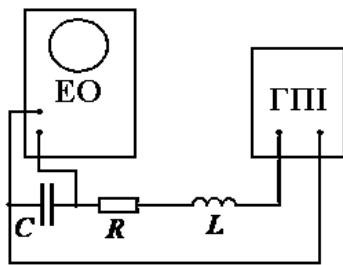


Рисунок 13 – Схема установки

наступного. Таким чином, ємність, отримавши заряд за час імпульсу, встигає кілька разів перезарядитися, викликаючи цим згасаючі коливання в контурі, поки не прийде наступний імпульс і все повторюється спочатку.

Якщо частота розгортки електронного променя осцилографа збігається з частотою проходження П-імпульсів, то на екрані осцилографа буде нерухоме зображення “цугу” затухаючих коливань (рис. 12).

За допомогою масштабної сітки на екрані осцилографа можна виміряти амплітудні значення коливань напруги в поділках сітки (в мм), оскільки напруга, що подається на осцилограф, прямо пропорційна зміщенню променя на екрані вздовж вертикалі. А це означає, що, при обчисленні логарифмічного декременту згасання, враховуючи (54) і (55), можна записати:

$$\delta = \ln(\varepsilon) = \frac{U_t}{U_{t+T}} = \frac{A_t}{A_{t+T}} \quad \text{або} \quad \delta = \frac{\ln(A_1/A_n)}{n-1}, \quad (76)$$

де  $n-1$  – кількість періодів від амплітуди  $A_1$  до амплітуди  $A_n$ .

Умовний період згасаючих коливань можна визначити, порівнюючи зображення “цугу” згасаючих коливань з незгасаючими коливаннями відомої частоти. Очевидно, що за частоту згасаючих коливань  $\nu$  можна взяти частоту незгасаючих  $\nu_0$ . Для цього на екрані осцилографа потрібно заміряти число  $n$  періодів “цугу”, а потім подати напругу від генератора ГЗ-36 незгасаючих коливань, підібравши її частоту так, щоб на екрані вмістилося таке ж число  $n$  періодів уже незгасаючих коливань.

Так, вимірюючи  $A_1$ ,  $A_n$  і  $n$  за допомогою сітки осцилографа, ми можемо визначити логарифмічний декремент згасання за формулою (76).

#### 4. Статистична обробка результатів вимірювань

Проводиться аналогічно тому, як показано в лабораторній роботі № 4-1.

#### 5. Порядок виконання роботи і обробка результатів вимірювання

1. Включіть осцилограф і генератор П-імпульсів (ГПІ). Зачекайте п'ять хвилин, поки вони не прогріються.

2. З набору ємностей, індуктивностей і на магазині опорів установіть певні значення  $C$ ,  $L$  і  $R$ .

3. Ручками осцилографа “Діапазон частот”, “Частота плавно”, “Посилення  $Y$ ” і “Посилення  $X$ ” досягають стійкого зображення “цугу” згасаючого коливання (один “цуг” на екрані осцилографа). **Положення ручок керування осцилографа в подальшому не змінювати.**

4. Виміряйте значення першої амплітуди  $A_1$  і  $n$ -ої амплітуди  $A_n$  за допомогою масштабної сітки екрана і запишіть його в таблицю вимірювань. Значення  $n$  буде визначено викладачем.

5. Зміряйте відстань  $l$  (у міліметрах) між  $A_1$  і  $A_n$  за допомогою масштабної сітки екрана і запишіть його в таблиці вимірювань. Відключіть осцилограф від ГПІ.

6. Включіть генератор синусоїдальних сигналів ГЗ-36 і, після нагрівання, подайте з нього напругу на  $Y$ -вхід осцилографа, яке не перевищує (в мм сітки екрана)  $A_1$ . Величину амплітуди незгасаючих коливань регулюють ручкою “Напруга” на генераторі.

7. Змінюючи частоту генератора сигналів ГЗ-36 рукояткою “Множник частот” й обертаючи лімб відліку частоти, добийтеся збігу кількості періодів  $T_0$  незгасаючих коливань з кількістю періодів  $T$  згасаючих коливань на довжині “цугу”  $l$ . Зробити відлік отриманої частоти  $\nu = \nu_0$  по лімбу генератора і записати це значення в таблиці вимірювань як  $\nu_{\text{ген}}$ .

8. Зміряйте вихідну напругу генератора  $U_{\text{ген}}$  і напишіть його значення в таблиці вимірювань.

9. Обчисліть логарифмічний декремент згасання.

10. Обчисліть коефіцієнт згасання  $\beta$ .

11. Обчисліть індуктивність контуру  $L$ .

12. Визначте критичний опір контуру  $R_k$ .

13. Визначте добротність контуру  $Q$ .

14. Напишіть рівняння згасаючих коливань з числовими коефіцієнтами, взявши початкову фазу довільно.

## 6. Контрольні питання

1. Що називається ідеальним коливальним контуром? Отримайте диференційне рівняння незгасаючих коливань заряду в цьому колі контуру. Напишіть його рішення.

2. Отримайте співвідношення між амплітудними значеннями струму в контурі і напруги на конденсаторі. Що таке хвильовий опір?

3. Що називається реальним коливальним контуром? Які причини для зменшення амплітуди вільних коливань в такому контурі?

4. Отримайте диференційне рівняння згасаючих коливань заряду в цьому контурі. Напишіть його рішення. Поясніть значення всіх фізичних величин, які знаходяться в рівняннях.

5. Який період згасаючих коливань? Від чого він залежить?

6. Які параметри характеризують згасаючі коливання? Поясніть фізичний смисл кожного з них.

7. За яких умов коливання в колі контуру будуть аперіодичними?

## 7. Протокол виконання лабораторної роботи № 4-4

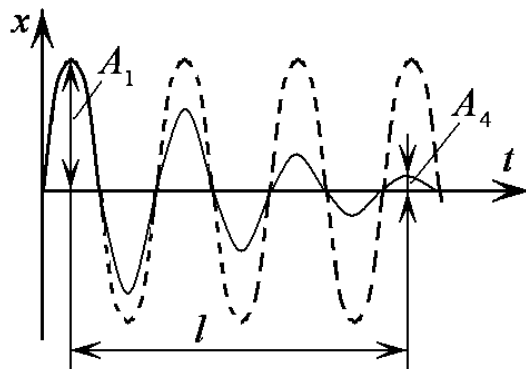
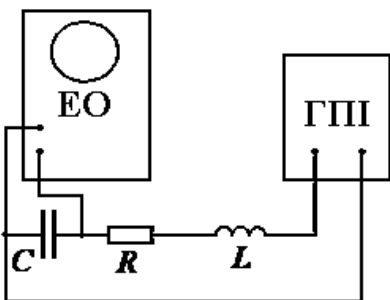
1) **Тема:** Дослідження згасаючих електричних коливань.

2) **Мета роботи:**

1. Ознайомлення з процесами, що відбуваються в електричному коливальному контурі і методом їх опису.

2. Вимірювання фізичних величин, що характеризують електричні згасаючі коливання, і параметрів контура.

3) **Схема приладу або установки**



4) **Таблиця приладів**

| № з/п. | Найменування    | Тип   | Заводський № | Межа шкали    | Ціна поділки | Клас точності |
|--------|-----------------|-------|--------------|---------------|--------------|---------------|
| 1      | Осцилограф      | ЕО-7  |              |               | 1 мм         | 1 мм          |
| 2      | Генератор звуку | ГЗ-36 |              | 20 – 20000 Гц |              |               |

**5) Формули розрахунку величин та їхніх похибок:**

$$1) \delta = \frac{\ln(A_1/A_n)}{n-1}; \quad 2) Q = \frac{\pi}{\delta}; \quad 3) \beta = \frac{\delta}{T} = \delta \cdot \nu_{\text{ген}}; \quad 4) \omega = 2\pi\nu_{\text{ген}};$$

$$5) \omega_0 = \sqrt{\omega^2 + \beta^2}; \quad 6) L = \frac{1}{\omega_0^2 C}; \quad 7) R_k = 2\sqrt{\frac{L}{C}}; \quad 8) R = 2\beta L;$$

$$9) u = u_0 e^{-\beta t} \cos \omega t.$$

( $\nu_{\text{ген}}$  підбираємо на ГЗ-36 так, щоб на довжині  $l$  уклалося стільки піків синусоїди, скільки укладалося піків ( $n$ ) згасаючих коливань.  $U_{\text{ген}}$  вибираємо за шкалою ГЗ-36 і регулюємо так, щоб амплітуда піків на осцилографі дорівнювала амплітуді  $A_1$ ).

**6) Таблиця вимірювань**

| $A_1$ , мм | $A_n$ , мм | $l$ , мм | $n$ | $U_{\text{ген}}$ , В | $C, \Phi$ | $\nu_{\text{ген}}$ , Гц |
|------------|------------|----------|-----|----------------------|-----------|-------------------------|
|            |            |          |     |                      |           |                         |

**7) Розрахунки величин та їхніх похибок:****8) Запис остаточних результатів:**

$$1) \delta = \quad ; \quad 2) Q = \quad ; \quad 3) \beta = \quad \text{с}^{-1}; \quad 4) \omega = \quad \text{рад/с}^{-1}; \quad 5) \omega_0 = \quad \text{рад/с}^{-1};$$

$$6) L = \quad \text{Гн}; \quad 7) R_k = \quad \text{кОм}; \quad 8) R = \quad \text{кОм}; \quad 9) U = U_0 e^{-\beta t} \cos \omega t \text{ В.}$$

**9) Висновок:**

10) Роботу виконав:

Роботу перевірів:

**Лабораторна робота 4-5**  
**ДОСЛІДЖЕННЯ ВИМУШЕНИХ МЕХАНІЧНИХ КОЛИВАНЬ.**  
**МЕХАНІЧНИЙ РЕЗОНАНС**

**1 Мета роботи:**

Вивчення вимушених механічних коливань, явища резонансу і причини, за яких це явище виникає.

**2. Основні поняття**

За результатами лабораторної роботи № 4-3 видно, що якщо механічна система віддана сама собі (здійснює вільні коливання), то амплітуда таких коливань з часом зменшується. Енергія системи розсіюється, перетворюючись на теплову. Втрата механічної енергії відбувається внаслідок дії різноманітних сил опору. Компенсувати втрати енергії можна, діючи на коливну систему зовнішньою періодичною силою (силами), виконуючи над системою деяку позитивну роботу.

Нехай зовнішня сила, що діє на систему, змінюється за періодичним законом

$$F_{\text{зов}} = F_0 \cos \Omega t,$$

де  $F_0$  – амплітудне значення сили;  $\Omega$  – її циклічна частота. У системі, на яку діє така сила, можуть виникнути вимушені коливання.

**Вимушеними коливаннями** називають незгасаючі коливання системи, які виникають під дією на неї зовнішньої сили (сил)  $F(t)$ , що періодично змінюється з часом. Сила  $F(t)$ , під дією якої виникають вимушені коливання, називається **змушуючою силою**.

Для опису вимушених коливань складемо диференціальне рівняння цього руху. Очевидно, на систему діятимуть сили:

1) попертна пружна або квазіпружна, яка визначається за законом Гука  $F_{\text{пов}} = -kx$ , де  $k$  – коефіцієнт пружності;

2) опору рухові, яка за малих коливань системи пропорційна швидкості  $F_{\text{оп}} = -rv$ , де  $r$  – коефіцієнт опору;

3) зовнішня періодична змушуюча  $F_{\text{зов}} = F_0 \cos \Omega t$ .

За законом Ньютона сума цих сил дорівнює  $F = ma$ . Тоді для вимушених коливань отримаємо рівняння

$$F_{\text{пов}} + F_{\text{оп}} + F_{\text{зов}} = ma;$$

виражаючи швидкість  $v = dx/dt$  і прискорення  $a = d^2x/dt^2$  через зміщення, отримаємо

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + r \frac{dx}{dt} + kx = F_0 \cos \Omega t. \quad (77)$$

Розділивши обидві частини цього рівняння на  $m$ , отримаємо неоднорідне лінійне **диференціальне рівняння** (другого порядку) **механічних вимушених коливань**

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \cos \Omega t, \quad (78)$$

де  $\beta = r/2m$  – коефіцієнт згасання;  $\omega_0 = \sqrt{k/m}$  – власна циклічна частота незгасаючих коливань системи. Рішення рівняння (78) має вигляд

$$x = A_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi) + A \cos(\Omega t + \Phi). \quad (79)$$

Перший доданок в (79) є загальне розв'язання однорідного рівняння, яке з часом перетворюється на нуль, тобто власні згасаючі коливання системи з частотою  $\omega$  досить швидко згасають. Що ж до другого доданку, то він є постійним вимушеним коливанням, частота якого повинна збігатися з частотою  $\Omega$  змушуючої сили  $F_{зм}$ . Амплітуда вимушених коливань  $A$  повинна бути сталою величиною, тому що амплітудне значення змушуючої сили  $F_0$  не змінюється з часом. Тому, нехтуючи вільними коливаннями системи, які мають суттєве значення лише на самому початку процесу, можна вважати, що розв'язання рівняння (78) має вигляд

$$x = A \cos(\Omega t + \Phi). \quad (80)$$

Це **рівняння вимушених механічних коливань в інтегральній формі**, де  $A$  – амплітуда сталих коливань;  $\Phi$  – зсув фаз між змушуючою та повертною силами.

Визначимо амплітуду  $A$  і зсув фаз  $\Phi$ , для цього продиференціюємо вираз (80) двічі за часом і підставимо ці похідні в рівняння (78):

$$A\Omega^2 \cos(\Omega t + \Phi + \pi) + 2A\beta\Omega \cos\left(\Omega t + \Phi + \frac{\pi}{2}\right) + A\omega_0^2 \cos(\Omega t + \Phi) = \frac{F_0}{m} \cos \Omega t. \quad (81)$$

З рівняння (81) видно, що гармонічне коливання  $\frac{F_0}{m} \cos \Omega t$  є сумою трьох гармонічних коливань з амплітудами відповідно:  $A\Omega^2$ ;  $2A\beta\Omega$  і  $A\omega_0^2$  тієї ж частоти  $\Omega$ .

Скориставшись векторною діаграмою, зобразимо коливання у вигляді векторів довжиною, що дорівнює амплітудним значенням, та, враховуючи різницю фаз між ними, відкладемо вектори в прямокутній системі координат. Відкладемо вектор  $A\omega_0^2$  (амплітуда третього коливання) уздовж осі  $ox$ , тоді, як видно з рівняння (81), вектор  $2A\beta\Omega$  (амплітуда другого коливання) буде спрямований перпендикулярно третьому вектору (коливання відрізняються за фазою на  $\pi/2$ ), а вектор  $A\Omega^2$  (амплітуда першого коливання) повернений на кут  $\pi$ , оскільки перше складове коливання знаходиться в протифазі з третім (рис. 14). Додавши ці вектори, отримаємо

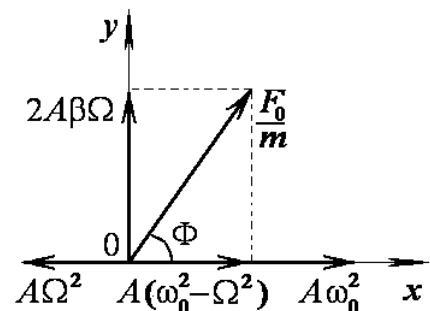


Рисунок 14 – Векторна діаграма вимушуючих механічних коливань

результуючий вектор  $F_0/m$ , який і є сумарним коливанням.

З рисунку 14 випливає, що

$$A^2(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4A^2\beta^2\Omega^2 = \frac{F_0^2}{m^2}, \quad \text{звідки}$$

$$A = \frac{F_0}{m\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\beta^2\Omega^2}}. \quad (82)$$

Як видно, амплітуда вимушених коливань не залежить від часу. Зсув фаз  $\Phi$  між результуючим коливанням і зовнішньою силою, що зумовила його, визначається з рисунку 14, і дорівнює

$$\text{tg}\Phi = \frac{2\beta\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}. \quad (83)$$

Проаналізуємо формулу (82). З неї видно, що амплітуда вимушених коливань залежить від багатьох чинників, зокрема від співвідношення власної частоти системи  $\omega_0$  та частоти  $\Omega$  зовнішньої сили. Незалежно від того, яка з цих частот більша, вираз  $(\omega_0^2 - \Omega^2)^2$  завжди буде величиною позитивною. Залежно від абсолютного значення цієї величини, амплітуда набуватиме більшого або меншого значення.

Амплітуда набуде максимального значення тоді, коли підкореневий вираз у (82) набуде мінімального значення. Щоб знайти цей мінімум, потрібно від підкореневого виразу взяти похідну за змінною  $\Omega$  та прирівняти її до нуля:

$$\frac{d}{d\Omega}[(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\beta^2\Omega^2] = -2(\omega_0^2 - \Omega^2) \cdot 2\Omega + 8\beta^2\Omega = 0 \quad (84)$$

або 
$$4(\Omega^2 - \omega_0^2) + 8\beta^2 = 0,$$

звідки 
$$\Omega = \omega_{\text{рез}} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}, \quad (85)$$

тоді як частота вільних затухаючих коливань

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}. \quad (86)$$

Частоту  $\Omega$ , за якої амплітуда вимушених коливань буде максимальна, називають **резонансною частотою** і позначають  $\Omega_{\text{рез}}$ . З (85) і (86) видно, що за наявності згасання резонанс настає за такої частоти вимушених коливань, яка менша за власну частоту  $\omega_0$  та частоту вільних згасаючих коливань  $\omega$ .

Для визначення резонансної амплітуди підставляємо значення резонансної частоти (85) у формулу (82):

$$A_{\text{рез}} = \frac{F_0}{2m\beta\sqrt{(\omega_0^2 - \beta^2)}} = \frac{F_0}{2m\beta\omega}. \quad (87)$$

Підставивши  $\omega_{\text{рез}}$  в формулу (83), отримаємо

$$\text{tg}\Phi = \frac{2\beta\omega_{\text{рез}}}{\omega_0^2 - \omega_{\text{рез}}^2} = \frac{\sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}}{\beta} = \sqrt{\frac{\omega_0^2}{\beta^2} - 2}. \quad (88)$$

Якщо коефіцієнт згасання  $\beta$  малий, то  $\omega_0^2/\beta^2 \gg 2$  і двійкою можна знехтувати, тоді

$$\operatorname{tg}\Phi = \frac{\omega_0}{\beta}. \quad (89)$$

Це значення  $\operatorname{tg}\Phi$  і відповідатиме резонансу. Якщо  $\omega/\beta$  – значна величина, то  $\Phi \approx \pi/2$  (якщо  $\omega_0 = \Omega$ , то  $\Phi = \pi/2$ ).

Таким чином, під дією періодичної змушуючої сили виникають гармонічні вимушені коливання з тією ж частотою  $\Omega$ . Амплітуда вимушених коливань, відповідно до (82), прямо пропорційна амплітуді зовнішньої змушуючої сили  $F_0$ , залежить від характеристик коливної системи  $m$ ,  $\beta$ ,  $\omega_0$ , крім того, є функцією циклічної частоти  $\Omega$  коливань змушуючої сили  $F_{\text{зм}}$ .

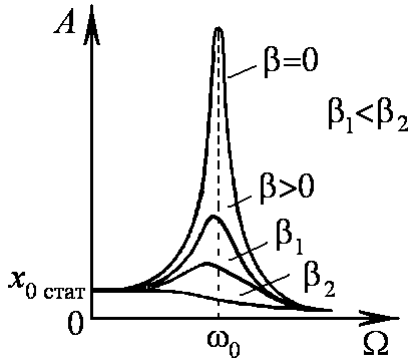


Рисунок 15 – Залежність амплітуди від частоти для різних величин коефіцієнта згасання

Графіки залежності  $A$  для декількох значень  $\beta$  представлені на рис. 15, з якого видно, що амплітуда вимушених коливань залежить від співвідношення частот  $\Omega$  і  $\omega_0$ . Різні криві відповідають різним значенням коефіцієнта згасання  $\beta$ . Як видно з графіків, характер залежності  $A = f(\Omega)$  відмінний для трьох областей циклічної частоти вимушених коливань  $\Omega$ .

1. Область малих частот:  $\Omega \ll \omega_0$ . У цій області зсув фаз  $\Phi$  близький до нуля, вираз для амплітуди, з урахуванням (82), матиме вигляд

$$A = \frac{F_0}{m\omega_0^2} = \frac{F_0}{k} = x_{0\text{стат}}, \quad (90)$$

де  $x_{0\text{стат}}$  – статистичне зміщення точки під дією постійної сили  $F = F_0$ . При  $0 < \Omega \ll \omega_0$  та малому коефіцієнті згасання наближено отримаємо  $x \approx F_0 \cos \Omega t$ , тобто зміщення коливної точки без спотворень прямує за зміною змушуючої сили.

2. Область великих частот:  $\Omega \gg \omega_0$ . За таких частот  $\Phi \approx -\pi$  і коливання системи відбуваються в протифазі зі змушуючою силою. Внаслідок цього амплітуда  $A$  зменшується зі зростанням частоти  $\Omega$ :

$$A = \frac{F_0}{m\omega_0^2} \left( \frac{\omega_0}{\Omega} \right)^2 \approx x_{0\text{стат}} \left( \frac{\omega_0}{\Omega} \right)^2. \quad (91)$$

3. Область резонансу:  $\Omega \approx \omega_0$ . За таких частот  $\Phi \approx \pi/2$  і коливання системи відбуваються з великим зростанням амплітуди. З (82) слідує, що

$$A = \frac{F_0}{m\omega_0^2} \frac{\omega_0}{2\beta} \approx x_{0\text{стат}} \frac{\omega_0}{2\beta}, \quad (92)$$

і чим менший коефіцієнт тертя, тим більша амплітуда. Якщо  $r \rightarrow 0$ , то  $A \rightarrow \infty$ . Це явище різкого зростання амплітуди вимушених коливань при  $\Omega = \omega_0$  і носить назву механічного резонансу.



### 3. Опис установки та методика вимірювання

Установка для дослідження вимушених коливань являє собою систему двох маятників. Один з них важкий, з великим запасом енергії та з незмінним періодом коливань  $T$  протягом тривалого часу, використовується як задаючий. Інший маятник легкий, служить резонатором і розгойдується під дією коливання маятника-вібратора (рис. 16).

Маятник-вібратор являє собою масивний стрижень з насадженою на нього кулею, яку можна переміщати вздовж стрижня, змінюючи його період. У верхній частині маятника-вібратора на невеличкому кронштейні прикріплений маятник-резонатор, яким є маленька кулька, підвішена на нитці. Нитка проходить через кронштейн і прикріплена до вібратора муфтою, за допомогою якої можна змінювати довжину маятника-резонатора, змінюючи його період  $T_0$ . За допомогою горизонтальної шкали під маятником-вібратором можна задавати його амплітуду коливань, яка при кожному запуску маятника-вібратора повинна бути однаковою. Вертикальна шкала призначена для визначення амплітуди вимушених коливань маятника-резонатора.

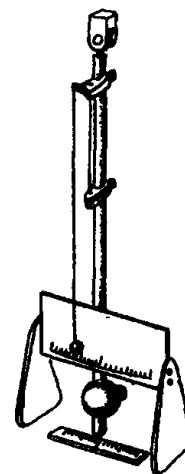


Рисунок 16 – Система маятників

При вимірюванні періодів коливань маятників їх можна відхилити тільки на  $3^\circ \dots 4^\circ$ , що можливо зробити, знаючи довжину маятників, оскільки  $A_0 = l\alpha$  для малих кутів  $\alpha$  ( $l$  – довжина маятника;  $A_0$  – максимальне початкове відхилення, яке дорівнює амплітуді коливань). Змінюючи висоту закріплення кулі на маятнику-вібраторі, піднімаючи або опускаючи його через кожен позначку, можна змінювати період  $T$  змушуючої сили  $F_{зм}$ . За знайденими значеннями періодів, очевидно, можна визначити циклічні частоти  $\omega_0$  і  $\Omega$ .

При вимірюванні одного з періодів маятника-вібратора необхідно одночасно зміряти максимальне зміщення маятника-резонатора, тобто його амплітуду, коли коливання можна вважати сталими.

### 4. Статистична обробка результатів вимірювань

Проводиться аналогічно тій, як показано в лабораторній роботі № 4-1.

### 5. Порядок виконання роботи й обробка результатів вимірювання

1. Відхиліть маятник-резонатор на  $3^\circ \dots 4^\circ$  і відпустивши, зміряйте час 50-ти коливань маятника-резонатора  $t_{pi}$ , запишіть результат в таблицю вимірювань. Дослід повторіть 3 рази.

2. За даними вимірювань визначте період  $T_{0i} = t_{pi}/50$  і середній період

коливань маятника-резонатора  $\langle T_0 \rangle = \frac{\sum_{i=1}^{n=3} T_{0i}}{n}$  з точністю до тисячних часток секунди, запишіть результат в таблицю вимірювань.

3. Закріпіть кулю на стрижні маятника-вібратора в самому нижньому положенні так, щоб нижня поділка шкали на стрижні була впритул з верхом кулі.

4. Обчисліть, на яку відстань  $A_0 = l\alpha$  від положення рівноваги необхідно відхилити маятник-вібратор, щоб це відхилення ( $A_0$  – амплітуда змушених коливань) не перевищувало  $3^\circ \dots 4^\circ$ . Довжину маятника вібратора взяти з результатів лабораторної роботи № 4-1. Запишіть результат в таблицю вимірювань.

5. Відхиліть маятник-вібратор на відстань  $A_0$  за горизонтальною шкалою під ним і відпустивши, зміряйте час 50-ти коливань маятника-вібратора  $t_{vi}$ . Одночасно спостерігаючи коливання маятника-резонатора, зміряйте амплітуду сталих коливань  $A_i$  за вертикальною шкалою ( $i$  – номер досліду). Запишіть результати  $t_{vi}$  і  $A_i$  в таблицю вимірювань. Дослід повторіть три рази.

6. Визначте період маятника-вібратора  $T_{vi} = t_{vi}/50$  і середній період

коливань маятника-вібратора  $\langle T_v \rangle = \frac{\sum_{i=1}^{n=3} T_{vi}}{n}$  з точністю до тисячних часток секунди, запишіть результат в таблицю вимірювань.

7. Повторити пункти 5 і 6 (шість разів), закріплюючи кульку на стрижні маятника-вібратора на одну поділку вище за попередню. Всі дані вимірювань і обчислень внести в таблицю.

8. Знайдіть відношення  $\frac{T_0}{T_{vi}}$  і внесіть результат у відповідну колонку таблиці вимірювань.

9. Побудуйте графік залежності  $A = f(T_0/T_{vi})$ .

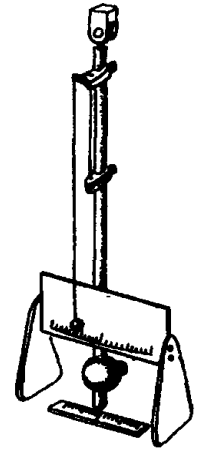
## 6. Контрольні питання

1. Які коливання називаються вимушеними? Які сили діють на систему, що здійснює вимушені коливання?
2. У чому полягає метод опису вимушених коливань?
3. Вивести рівняння вимушених механічних коливань.
4. Якою формулою визначається амплітуда вимушених коливань? Зсув фази між змушуючою силою і зміщенням вимушених коливань?
5. У чому суть резонансу? Умова його виникнення.
6. За яких умов амплітуда вимушених коливань набуває максимального значення?

7. Чому при викликанні коливань маятника-вібратора, в ході виконання роботи, необхідно кожного разу відхиляти його на одну і ту ж відстань  $A_0$ ?

### 7. Протокол виконання роботи № 4-5

- 1) **Тема:** Дослідження вимушених механічних коливань. Механічний резонанс.
- 2) **Мета роботи:** Вивчення вимушених механічних коливань, явища резонансу і причин, при яких це явище настає.
- 3) **Схема приладу або установки**
- 4) **Таблиця приладів**



| № з/п. | Найменування     | Тип    | Заводський № | Межа шкали | Ціна поділки | Клас точності |
|--------|------------------|--------|--------------|------------|--------------|---------------|
| 1      | Маятник-вібратор |        |              |            |              |               |
| 2      | Секундомір       | УХЛ-42 |              | 99,99 с    | 0,01 с       | 0,01 с        |

#### 5) Формули розрахунку величин та їхніх похибок:

1)  $T_{0i} = t_{pi} / 50$ ; 2)  $A_0 = l\alpha$ ; 3)  $T_{bi} = t_{bi} / 50$

#### 6) Таблиця вимірювань

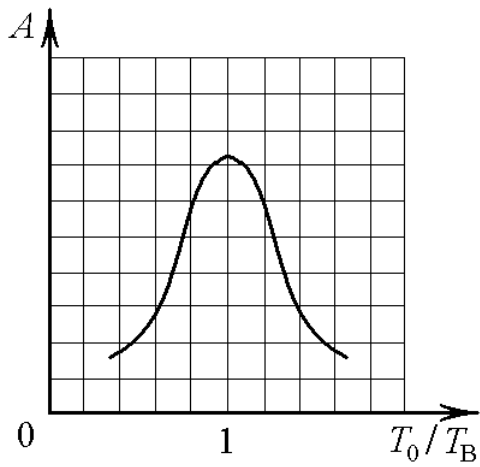
$l =$  \_\_\_\_\_ мм ;  $A_0 =$  \_\_\_\_\_ мм

|   |       |                       | 1  |  |                          | 2  |  |                          | 3  |  |                          |                       |
|---|-------|-----------------------|--|--|--------------------------|--|--|--------------------------|--|--|--------------------------|-----------------------|
| № | $t_B$ | $T_{Bi}$              | №  | $t_B$  | $T_{Bi}$                 | $A_i$  | $t_B$  | $T_{Bi}$                 | $A_i$  | $t_B$  | $T_{Bi}$                 | $A_i$                 |
| 1 |       |                       | 1  |  |                          |  |  |                          |  |  |                          |                       |
| 2 |       |                       | 2  |  |                          |  |  |                          |  |  |                          |                       |
| 3 |       |                       | 3  |  |                          |  |  |                          |  |  |                          |                       |
|   |       | $\langle T_0 \rangle$ |  |  | $\langle T_{B1} \rangle$ | $\langle A_1 \rangle$                            |  | $\langle T_{B2} \rangle$ | $\langle A_2 \rangle$                            |  | $\langle T_{B3} \rangle$ | $\langle A_3 \rangle$ |
|   |       |                       |  | $\langle T_0 \rangle / \langle T_{B1} \rangle =$ |                          |  | $\langle T_0 \rangle / \langle T_{B2} \rangle =$ |                          |  | $\langle T_0 \rangle / \langle T_{B3} \rangle =$ |                          |                       |
|   |       |                       | 4  |  |                          | 5  |  |                          | 6  |  |                          |                       |
| № | $t_B$ | $T_{Bi}$              | $A_i$  | $t_B$  | $T_{Bi}$                 | $A_i$  | $t_B$  | $T_{Bi}$                 | $A_i$  | $t_B$  | $T_{Bi}$                 | $A_i$                 |
| 1 |       |                       |  |  |                          |  |  |                          |  |  |                          |                       |
| 2 |       |                       |  |  |                          |  |  |                          |  |  |                          |                       |
| 3 |       |                       |  |  |                          |  |  |                          |  |  |                          |                       |
|   |       |                       | $\langle T_{B4} \rangle$                         | $\langle A_4 \rangle$                            | $\langle T_{B5} \rangle$ | $\langle A_5 \rangle$                            |  | $\langle T_{B6} \rangle$ | $\langle A_6 \rangle$                            |  |                          |                       |
|   |       |                       | $\langle T_0 \rangle / \langle T_{B4} \rangle =$ |  |                          | $\langle T_0 \rangle / \langle T_{B5} \rangle =$ |  |                          | $\langle T_0 \rangle / \langle T_{B6} \rangle =$ |  |                          |                       |

7) **Розрахунки величин та їхніх похибок:**

8) **Графік залежності** . (Для графіка залишити половину сторінки зошита).

Приклад залежності  $A = f(T_0/T_{вi})$ :



9) **Висновок:**

10) Роботу виконав:

Роботу перевірів:

**Лабораторна робота 4-6**  
**ДОСЛІДЖЕННЯ ВИМУШЕНИХ КОЛИВАНЬ**  
**В КОЛИВАЛЬНОМУ КОНТУРІ**  
**(послідовний RLC-КОНТУР)**

### 1. Мета роботи:

1.1. Дослідження залежності напруги на ємності, на індуктивності та величини струму в коливальному контурі від співвідношення частот вимушених і власних коливань у ньому.

1.2. Дослідження резонансних явищ у коливальному контурі.

### 3. Основні поняття

**Вимушеними коливаннями** називають незгасаючі коливання системи, які виникають під дією на неї зовнішньої сили (сил)  $F(t)$ , що періодично змінюється з часом. Для того, щоб коливання здійснювалися в часі нескінченно довго, необхідно компенсувати енергію, що виділяється в зовнішнє середовище в результаті сил опору, дією зовнішньої періодичної сили.

Будь-який електричний коливальний контур має ємність, індуктивність і опір.

Якщо в контур з послідовно ввімкненими (рис. 17) конденсатором  $C$  (лише ємність контуру), котушкою  $L$  (лише індуктивність контуру) і резистором  $R$  (лише активний опір контуру) увімкнути зовнішню ЕРС, що періодично змінюється, то в контурі виникнуть **електричні вимушені коливання**.

Розглянемо вимушені коливання в контурі під дією змушуючої ЕРС, що змінюється згідно із законом

$$\mathcal{E}_{\text{зов}} = \mathcal{E}_0 \cdot \cos(\Omega t + \varphi_0), \quad (93)$$

де  $\mathcal{E}_0$  – амплітудне значення змушуючої ЕРС;  $\Omega$  – циклічна частота змушуючої ЕРС;  $\varphi_0$  – початкова фаза ЕРС. На підставі II закону Кірхгофа (в будь-якому замкненому контурі сума падінь напруги дорівнює сумі ЕРС у цьому контурі) можна записати:

$$u_R + u_C = \mathcal{E}_L + \mathcal{E}_{\text{зов}}. \quad (94)$$

Підставивши значення  $u_R$ ,  $u_C$ ,  $\mathcal{E}_L$  і  $\mathcal{E}_{\text{зов}}$  з (68), (69), (70) і (93) в (94), отримаємо диференціальне рівняння вимушених електричних коливань у контурі

$$Ri + \frac{q}{C} = -L \frac{di}{dt} + \mathcal{E}_0 \cdot \cos(\Omega t + \varphi_0) \quad \text{або} \quad L \frac{d^2 q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = \mathcal{E}. \quad (95)$$

Розділивши (95) на  $L$  й увівши позначення  $\beta = \frac{R}{2L}$  і  $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$ , отримаємо

**диференціальне рівняння вимушених електричних коливань** у вигляді

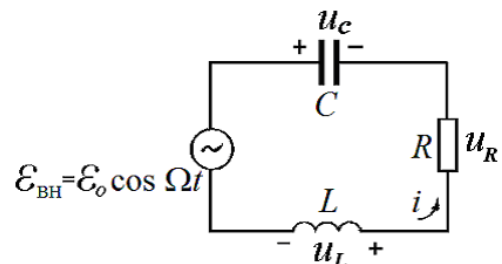


Рисунок 17 – Послідовний коливальний контур

$$\frac{d^2 q}{dt^2} + 2\beta \frac{dq}{dt} + \omega_0^2 q = (\mathcal{E}_0 / L) \cdot \cos(\Omega t + \varphi_0), \quad (96)$$

яке аналогічно неоднорідному лінійному диференційному рівнянню другого порядку механічних вимушених коливань (див. рівняння (78)).

Рішенням цього рівняння є **рівняння вимушених електричних коливань в інтегральній формі**

$$q = q_0 \cos(\Omega t + \varphi_{01}) \quad \text{або} \quad q = q_0 \sin(\Omega t + \varphi_{02}). \quad (97)$$

Оскільки  $i = dq/dt$ , то сила струму в колі змінюватиметься відповідно до закону:

$$\begin{aligned} i &= -q_0 \Omega \sin(\Omega t + \varphi_{01}) = -i_0 \sin(\Omega t + \varphi_{01}), \\ \text{або} \quad i &= q_0 \Omega \cos(\Omega t + \varphi_{02}) = i_0 \cos(\Omega t + \varphi_{02}). \end{aligned} \quad (98)$$

Як видно з (93) і (98), струм у контурі за вимушених коливань змінюється за тим же законом і з тією ж циклічною частотою  $\Omega$ , що і ЕРС, але фази зміни різні.

Взявши початкові фази струму і ЕРС рівними нулю, а зсув фаз між ними  $\Phi$ , отримаємо

$$i = i_0 \cos \Omega t, \quad (99)$$

$$\mathcal{E}_{\text{зм}} = \mathcal{E}_0 \cdot \cos(\Omega t + \Phi), \quad (100)$$

де  $i_0$  – амплітудне значення струму, яке необхідно визначити.

Для знаходження амплітудної величини струму і зсуву фаз  $\Phi$  між ЕРС і струмом підставимо миттєві значення струму і заряду в рівняння (95) і розглянемо докладніше кожний доданок:

1) Напряга на індуктивності  $u_L$ , очевидно, дорівнює ЕРС самоіндукції, оскільки ми припустили, що індуктивність активного опору не має

$$u_L = L \frac{di}{dt} = -L \Omega i_0 \sin(\Omega t) = u_{L0} \cos\left(\Omega t + \frac{\pi}{2}\right), \quad (101)$$

де  $u_{L0} = L \Omega i_0$  – амплітудне значення напруги на індуктивності.

2) Напряга на активному опорі

$$u_R = iR = R i_0 \cos \Omega t = u_{R0} \cos \Omega t, \quad (102)$$

де  $u_{R0} = R i_0$  – амплітудне значення напруги на активному опорі.

3) Напряга на ємності  $u_C = q/C$  і, оскільки  $i = dq/dt$ , то  $dq = idt$ , звідки

$$q = \int idt = \int i_0 \cos(\Omega t) dt = \frac{i_0}{\Omega} \sin \Omega t = \frac{i_0}{\Omega} \cos\left(\Omega t - \frac{\pi}{2}\right), \quad (103)$$

тоді

$$u_C = \frac{q}{C} = \frac{i_0}{\Omega C} \cos\left(\Omega t - \frac{\pi}{2}\right) = u_{C0} \cos\left(\Omega t - \frac{\pi}{2}\right), \quad (104)$$

де  $u_{C0} = i_0 / \Omega C$  – амплітудне значення напруги на ємності.

Вирази для амплітудних значень напруг (101), (102) і (104) нагадують закон Ома, де  $X_L = \Omega L$  називається **індуктивним опором**, або **реактивним**

**опором індуктивності** і вимірюється в Ом, а  $X_C = 1/\Omega C$  називається **опором ємності**, або **реактивним опором ємності** і також вимірюється в Ом.

Підставивши в рівняння (95) знайдені значення напруг (101), (102) і (104), отримаємо, з урахуванням амплітудних значень

$$u_{L0} \cos\left(\Omega t + \frac{\pi}{2}\right) + u_{R0} \cos \Omega t + u_{C0} \cos\left(\Omega t - \frac{\pi}{2}\right) = \mathcal{E}_0 \cdot \cos(\Omega t + \Phi) \quad (105)$$

З рівняння (105) видно, що змушуюча ЕРС дорівнює сумі трьох косинусоїдальних коливань однієї частоти, але вони мають різні початкові фази. Для складання цих коливань скористаємося методом векторних діаграм, який був вже застосований при розгляді аналогічного завдання в лабораторній роботі № 4-5.

З векторної діаграми (рис. 18) видно, що напруга на індуктивності випереджає струм по фазі на  $\pi/2$ . Фізична причина цього полягає в тому, що при прикладенні до індуктивності зовнішньої напруги в ній виникають зустрічні індукційні струми, тому результуючий струм запізнюється відносно напруги.

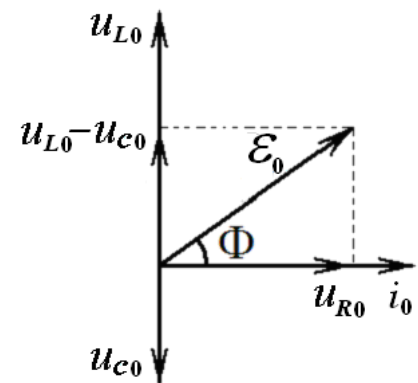


Рисунок 18 – Векторна діаграма вимушених коливань

Напруга на конденсаторі відстає по фазі від струму на  $\pi/2$ . Фізична причина цього відставання полягає в тому, що заряд на конденсаторі (а також і напруга) змінюється внаслідок первинної зміни струму.

З рисунку 18 випливає, що

$$\mathcal{E}_0 = \sqrt{u_{R0}^2 + (u_{L0} - u_{C0})^2},$$

або

$$\mathcal{E}_0 = \sqrt{(Ri_0)^2 + \left(\Omega Li_0 - \frac{i_0}{\Omega C}\right)^2},$$

звідки

$$\mathcal{E}_0 = i_0 \sqrt{R^2 + \left(\Omega L - \frac{1}{\Omega C}\right)^2} = i_0 \cdot Z, \quad (106)$$

що нагадує закон Ома для **повного кола**, що містить ЕРС. Вираз для  $Z$  називається **повним опором контуру**

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\Omega L - \frac{1}{\Omega C}\right)^2}. \quad (107)$$

Вираз  $\left(\Omega L - \frac{1}{\Omega C}\right) = X_{\text{реакт}}$  називається **реактивним опором контуру**.

Зсув фаз між струмом і ЕРС дорівнює:

$$\text{tg} \Phi = \frac{u_{L0} - u_{C0}}{u_{R0}} = \frac{\Omega L - \frac{1}{\Omega C}}{R} = \frac{X_{\text{реакт}}}{R}. \quad (108)$$

**Залежно від співвідношення між індуктивним і ємнісним опором, ЕРС може як випереджати струм, так і відставати від нього.**

Якщо в розглянутому контурі змінювати частоту змушуючої ЕРС, не змінюючи її амплітудного значення  $\mathcal{E}_0$ , то амплітуда струму також змінюватиметься. Графік залежності амплітуди струму від циклічної частоти  $\Omega$  представлений на рис. 19.

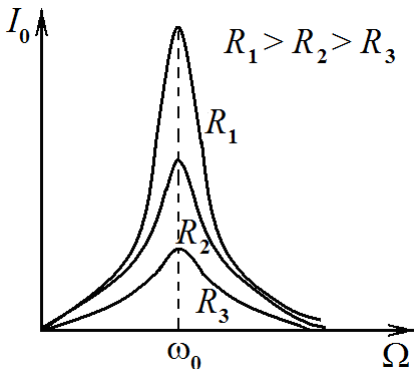


Рисунок 19 – Залежність амплітуди струму в ланцюзі від частоти зовнішньої ЕРС за різних значень активного опору контуру

З формули (106) видно, що:

а) за низьких частот  $\Omega \rightarrow 0$ ,  $\frac{1}{\Omega C} \rightarrow \infty$ ;

повний опір кола  $Z = \sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\Omega C}\right)^2} \rightarrow \infty$ , а

амплітуда струму  $i_0 \rightarrow 0$ , оскільки скрізь конденсатор постійний струм не протікає;

б) з зростанням частоти реактивний опір  $X_{\text{реакт}}$  зменшується і на частоті  $\omega_0$

досягає нуля, тобто  $X_{\text{реакт}} = \left(\Omega L - \frac{1}{\Omega C}\right) = 0$ , отже  $\Omega = \omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}$ . Таким чином,

**реактивний опір досягає нуля на частоті власних коливань контуру, при цьому повний опір контуру мінімальний  $Z = R$ , а струм в контурі максимальний  $i_0^{\text{max}} = \mathcal{E}$ .** На рис. 19 наведені графіки за різних значень активного опору контуру;

в) подальше збільшення частоти приводить до зростання реактивного  $X_{\text{реакт}}$  і повного  $Z = \sqrt{R^2 + (\Omega L)^2} \rightarrow \infty$  опорів, тому струм зменшується.

**Явище різкого зростання амплітуди струму вимушених коливань і досягнення ним максимальної величини називається резонансом** (див. пункт б).

**При резонансі повний опір контуру дорівнює активному ( $Z = R$ ) і з**

**рівняння (108) видно, що зсув фаз між струмом і змушуючою ЕРС дорівнює нулю  $\Phi = 0$ , оскільки  $\text{tg}\Phi = \frac{X_{\text{реакт}}}{R} = \frac{0}{R} = 0$ .** Це означає, що на векторній діаграмі

протилежно спрямовані вектори дорівнюють один одному ( $u_{C0} = u_{L0}$ ) і вектор  $\mathcal{E}_0$  спрямований по осі струму, тобто контур діє як чисто активний опір. При відхиленні  $\Omega$  від  $\omega_0$  різниця фаз  $\Phi$  зростає, причому

$$\begin{aligned} \Omega \rightarrow 0, \quad X_{\text{реакт}} &\rightarrow \left(-\frac{1}{\Omega C}\right) \rightarrow -\infty, \quad \text{tg}\Phi \rightarrow -\infty, \quad \Phi \rightarrow -\frac{\pi}{2}, \\ \Omega \rightarrow \infty, \quad X_{\text{реакт}} &\rightarrow (\omega L) \rightarrow \infty, \quad \text{tg}\Phi \rightarrow \infty, \quad \Phi \rightarrow \frac{\pi}{2}. \end{aligned} \quad (109)$$

При резонансі електричне поле, створене в контурі джерелом ЕРС, спрямоване так, що сили цього поля весь час прискорюють рух зарядів. Якби в контурі був відсутній активний опір, то амплітуда струму зростала б з кожним



періодом до нескінченності. У реальному контурі в міру зростання струму зростуть і втрати енергії, а коли вони будуть дорівнювати роботі сил поля джерела, амплітуда струму досягне свого сталого значення. Якщо частота ЕРС не дорівнює власній частоті контуру, то зсув фаз  $\Phi$  між струмом і ЕРС також не дорівнює нулю. При цьому поле джерела частину періоду прискорює рух зарядів, а частину періоду – уповільнює. Тому амплітуда струму менша, ніж при резонансі, і при збільшенні зсуву фаз  $\Phi$  час уповільнення переважає над часом прискорення за період.

Під час резонансу, коли вимушені коливання установилися, коливальний контур енергії від джерела не споживає. У ньому відбувається перехід енергії електричного поля в енергію магнітного поля і назад, як при власних коливаннях. Енергія джерела витрачається тільки на компенсацію втрат у контурі. Потужність втрат з урахуванням (99) і (102) буде:

$$N = iU_R = i_0 \cos(\Omega t) \cdot Ri_0 \cos(\Omega t) = i_0^2 R \cos^2(\Omega t).$$

Тоді за один період коливання  $T$  контур втратить енергію, яка дорівнює

$$\Delta W = \int_0^T N dt = \int_0^T i_0^2 R \cos^2(\Omega t) dt = i_0^2 R \frac{T}{2}, \quad (110)$$

де середнє значення  $\int_0^T \cos^2(\Omega t) dt = T/2$ .

Для характеристики резонансних властивостей контуру введено поняття **добротності**, яке визначається відношенням енергії, запасеної в контурі  $W$ , до енергії, що втрачається за один період при резонансі  $\Delta W$ :

$$Q = 2\pi \frac{W}{\Delta W} = 2\pi \frac{(1/2)i_0^2 L}{(1/2)i_0^2 RT} = 2\pi \frac{L}{RT} = 2\pi \frac{L\omega}{R2\pi} = \frac{L}{R} \sqrt{\frac{1}{LC}} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}. \quad (111)$$

При резонансі, оскільки індуктивний опір дорівнює ємнісному, то матимемо й рівність амплітудних значень напруг  $u_{C0}$  і  $u_{L0}$ , але необхідно враховувати, що вони змінюються в протифазі і у будь-який момент часу в сумі дають нуль.

Амплітуди коливань напруги на конденсаторі й індуктивності

$$u_{C0} = u_{L0} = i_0 \frac{1}{\Omega C} = i_0 \Omega L = i_0 \frac{R}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} = \mathcal{E}_0 \cdot \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} = \mathcal{E}_0 \cdot Q, \quad (112)$$

де  $Q$  – добротність контуру. Таким чином, **на частоті  $\omega_0$  амплітуди напруги на конденсаторі і на індуктивності в  $Q$  разів більша за амплітуду змушуючої ЕРС генератора**, але знаходяться в протифазі, і сума їх дорівнює нулю.

Якщо активний опір малий, тобто  $R \ll \sqrt{L/C}$ , то  $Q \gg 1$  і  $U_{C0} = U_{L0} \gg \mathcal{E}_0$ . Резонанс в контурі з послідовно з'єднаними  $R$ ,  $L$  и  $C$  називається **резонансом напруг**, а частота  $\Omega = \omega_0$  – **резонансною частотою**. Чим добротність контуру більша, тим чіткіше проявляється резонанс.

Як уже зазначалося, амплітуди напруг на індуктивності і ємності залежать від частоти змушуючої ЕРС. Вираз для амплітуди напруги на індуктивності можна представити як

$$u_{L0} = i_0 \Omega L = \mathcal{E}_0 \frac{\Omega L}{\sqrt{R^2 + \left(\Omega L - \frac{1}{\Omega C}\right)^2}}. \quad (113)$$

При зміні частоти змушуючої ЕРС, амплітуда напруги  $u_{L0}$  змінюється і приймає максимальне значення при частоті  $\Omega_L$ , яка більша за власну частоту контуру  $\omega_0$ . Для знаходження частоти  $\Omega_L$  потрібно дослідити вираз (113) на максимум, тобто розв'язати рівняння (взяти похідну і прирівняти її до нуля)

$$\frac{du_{L0}}{d\Omega} = 0.$$

Аналогічно, вираз для амплітуди напруги на ємності можна представити у вигляді

$$u_{C0} = i_0 \frac{1}{\Omega C} = \mathcal{E}_0 \frac{1}{\Omega C \sqrt{R^2 + \left(\Omega L - \frac{1}{\Omega C}\right)^2}}. \quad (114)$$

Максимальне значення  $u_{C0}$  набуває за частоти  $\Omega_C$  меншої, ніж  $\omega_0$ .

На рис. 20 наведені графіки залежності амплітуд напруг на індуктивності, ємності і амплітуди струму від частоти змушуючої ЕРС. При резонансі ( $\Omega = \omega_0$ ) амплітуди  $u_{C\text{рез}}$  і  $u_{L\text{рез}}$  **дорівнюють одна одній, але не максимальні!** Відмінність частот, тобто різниця  $\Omega_L - \Omega_C$  тим менша, чим більша добротність контуру. При великих добротностях частоти  $\Omega_C \approx \omega_0 \approx \Omega_L$  практично збігаються.

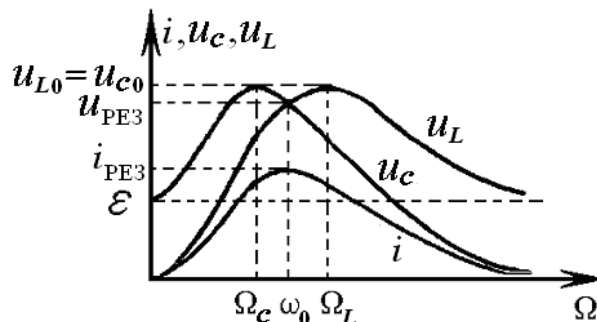


Рисунок 20 – Графіки залежності амплітуд напруги на індуктивності, ємності та амплітуди струму в колі від частоти зовнішньої ЕРС

### 3. Опис установки та методика вимірювання

У даній роботі досліджується залежність амплітуди струму й амплітуди напруг на індуктивності і на ємності при зміні частоти  $\Omega$  змушуючої ЕРС. Величина активного опору  $R$ , електроємність  $C$ , індуктивність  $L$  і амплітуда змушуючої ЕРС  $\mathcal{E}_0$  залишаються постійними.

Схема установки зображена на рис. 21. Контур складається з електроємності  $C$  (одна з набору ємностей), індуктивності  $L$  (одна з набору індуктивностей), активного опору  $R$  (набраного на магазині опорів лівої панелі лабораторного столу).

Для змушуючої ЕРС використовується генератор ГЗ-36, вихідну напругу (ЕРС) якого можна задавати за показниками вольтметра на ньому, враховуючи, що вольтметр показує діюче значення напруги, а не амплітудне.

**Діючим значенням змінного струму** називається величина такого постійного струму, який на тій же ділянці ланцюга за час, що дорівнює періоду колювання, виділяє таку ж кількість тепла, що і змінний струм. Для синусоїдального струму діючі й амплітудні значення зв'язані співвідношенням  $i = i_0 / \sqrt{2}$ , для напруг –  $\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 / \sqrt{2}$ .

Очевидно, діючі значення ЕРС і струму також зв'язані співвідношенням

$$\mathcal{E} = i \sqrt{R^2 + \left( \Omega L - \frac{1}{\Omega C} \right)^2} = i \cdot Z$$

Якщо змінювати частоту генератора, то зсув фаз між струмом і ЕРС змінюватиметься. Крива зміни струму то випереджає криву зміни ЕРС, то відстає від неї, то збігається з нею по фазі. Останнє й означає, що настав резонанс.

Напруга на ємності  $C$  вимірюється за допомогою вольтметра.

У даній роботі можна побудувати графіки:

а) графік залежності діючого значення струму в контурі від частоти  $\Omega$  змушуючої ЕРС, де  $\Omega$  можна визначити, як  $\Omega = 2\pi\nu$ , а частоту  $\nu$  відраховують по лімбу генератора ГЗ-36;

б) графік залежності діючого значення напруги на ємності від частоти  $\Omega$  змушуючої ЕРС;

в) графік залежності діючого значення напруги на індуктивності від частоти  $\Omega$  змушуючої ЕРС.

#### 4. Статистична обробка результатів вимірювань

Проводиться аналогічно тому, як показано в лабораторній роботі № 4-1.

#### 5. Порядок виконання роботи й обробка результатів вимірювання

1. Включить звуковий генератор ГЗ-36, осцилограф і чекайте п'ять хвилин, поки він не нагріється.

2. Потенціометром «Рег. виходу» установіть вихідну напругу  $E_{\text{ген}}$  на генераторі 1,5...3 В. В ході виконання роботи напругу підтримувати незмінною; напругу внести в таблицю вимірювань.

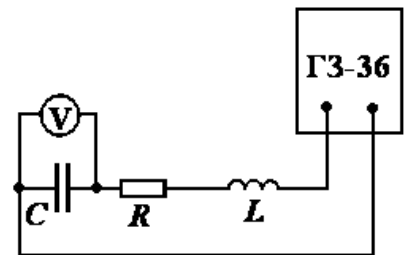


Рисунок 21 – Електрична схема для вивчення змушених колювань

3. Установіть зазначені викладачем величину ємності  $C$  з набору ємностей і значення опору на магазині опорів. Величини занести в таблицю вимірювань.

4. На генераторі установлюють частоту 20 Гц і помічають дані вольтметра (напруга на конденсаторі).

5. Змінюючи частоту генератора  $\nu$ , стежать за даними вольтметра (напруга на ємності  $u_C$ ), послідовно проходячи весь діапазон частот від 20 до 200 Гц. Якщо резонанс не виявлений, перемикачем «Множник» переключіть прилад на діапазон: від 200 до 2000 Гц і т.п., поки не виявиться резонанс напруг (поки вольтметр не покаже максимальну напругу на конденсаторі).

6. Виявивши діапазон частот, у межах якого спостерігається резонанс напруги в зібраній схемі, провести вимірювання  $u_C$  для 10...15 значень частоти  $\nu$ , охоплюючи весь діапазон (більше точок зміряти в області різкого зростання напруги на конденсаторі; вимірювання провести так, щоб точки були щільніше розташовані). Дані вимірювань внести в таблицю вимірювань.

7. За даними значеннями ємності  $C$ , частоти  $\nu$  і зміряним значенням  $u_C$  знайти відповідні циклічні частоти  $\Omega = 2\pi\nu$ , а за ними значення струму в контурі  $i$ .

8. Побудуйте залежність напруги на конденсаторі від частоти  $u_C = f(\Omega)$  і залежність струму від частоти  $i = f(\Omega)$ , за останнім графіком залежності визначте резонансну частоту. Результати показати у вигляді графіків,  $\Omega_{\text{рез}}$  занести в таблицю вимірювань.

9. За знайденою резонансною частотою  $\Omega_{\text{рез}}$  визначте величину індуктивності контуру  $L$ .

10. Визначте добротність контуру за формулою  $Q = \frac{u_{C_{\text{рез}}}}{E_{\text{ген}}}$  і опір контуру  $R$

за формулою  $R = \frac{1}{Q} \sqrt{\frac{L}{C}}$  (див. ф-лу (111)).

11. Запишіть остаточні результати:  $\Omega_{\text{рез}}$ ,  $L$ ,  $Q$ ,  $R$ .

## 6. Контрольні питання

1. Які коливання називаються вимушеними?
2. Як записуються рівняння вимушених електричних коливань у диференціальній та інтегральній формах?
3. Яке зсув фаз між струмом і напругою на активному, індуктивному й ємнісному опорах?
4. Як розраховуються індуктивний і ємнісний опори?
5. Накреслити векторну діаграму напруг для контуру з послідовно з'єднаними  $R$ ,  $L$ ,  $C$ .
6. Як виводиться формула для амплітуди струму при вимушених коливаннях?
7. Чому дорівнює зсув фаз між струмом і змущуючою ЕРС?
8. У чому полягає і як пояснюється явище резонансу?



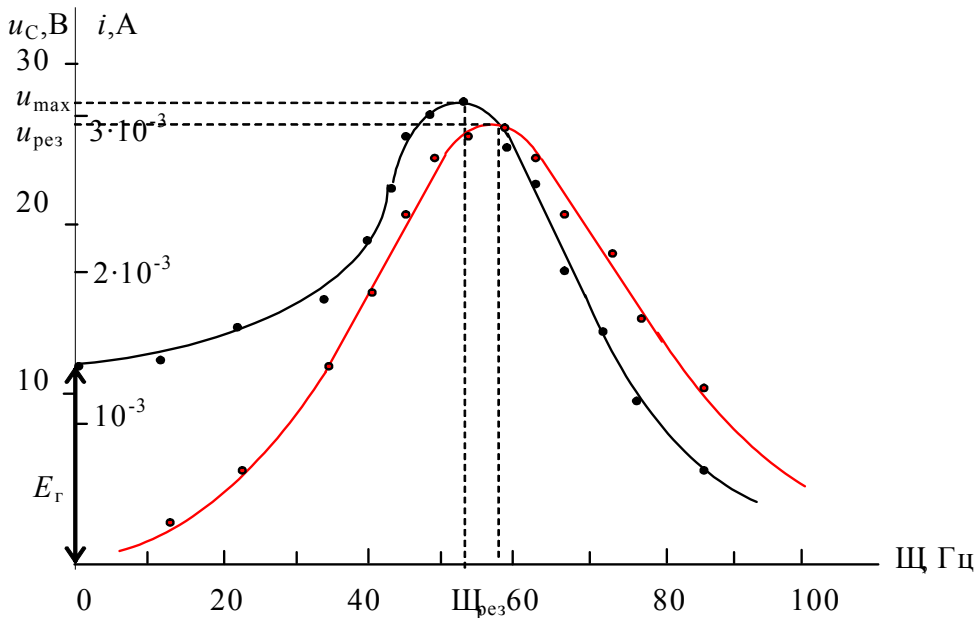
7) *Розрахунки величин та їхніх похибок:*

1)  $Q =$  ;

2)  $L =$  ;

3)  $R =$  .

8) *Графік залежності  $u_C(\Omega)$  та  $i(\Omega)$ .* (Для графика залишити половину сторінки зошита). (Наведено приклад графіка)



9) *Запис остаточних результатів:*

1)  $Q =$  ; 2)  $L =$  Гн ; 3)  $R =$  Ом.

10) *Висновок:*

11) Роботу виконав:

Роботу перевірів:

## Лабораторна робота № 5-1 ДОСЛІДЖЕННЯ СТОЯЧИХ ХВИЛЬ МЕТОДОМ МЄЛЬДЕ

### 1. Мета роботи:

- 1.1 Вивчення явища параметричного резонансу.
- 1.2. Вивчення умов виникнення стоячих хвиль.
- 1.3. Визначення частоти коливань вібратора.

### 2. Основні поняття

#### 2.1. Хвилі

**Хвилями** називаються різні обурення стану речовини або поля, що поширюються в просторі з часом (коливання, що поширюються в просторі).

Колівання речовини породжують **пружну хвилю**, а коливання електромагнітного поля – **електромагнітну хвилю**. **Джерелом хвиль (вібратором)** є тіло, що здійснює коливання, які викликають у середовищі збурення.

Середовище називається **пружним**, якщо між його частинками існують сили взаємодії, що перешкоджають будь-якій деформації цього середовища. Наприклад, тиск газів на стінки посудини забезпечує здатність газів чинити опір зміні їхнього об'єму.

**Пружними хвилями** називаються механічні збурення, що поширюються в пружному середовищі (деформації). Поширюються пружних хвиль полягає в збудженні коливань все більш і більш віддалених від джерела хвиль частинок середовища. Сукупність коливних точок даного середовища є **хвильовим полем**. Точки хвильового поля здійснюють змушені коливання.

**Фронтом хвилі** називається геометричне місце точок, до яких доходить коливання в певний момент часу  $t$ . **Фронт хвилі для моменту часу  $t$  тільки один.**

**Хвильовою поверхнею** називається геометричне місце точок середовища, що коливаються в однакових фазах. **Хвильових поверхонь нескінченна множина.** Форма хвильових поверхонь може бути різноманітною.

Залежно від форми фронту, розрізняють хвилі **плоскі** і **сферичні**. У плоских хвилях хвильовими поверхнями є площини, а в сферичних – сфери.

**Променем** називається лінія, дотична до якої в кожній точці збігається з напрямом поширення хвилі. **В однорідному ізотропному середовищі промінь є прямою, перпендикулярної до фронту хвилі і збігається з напрямом перенесення енергії хвилі.**

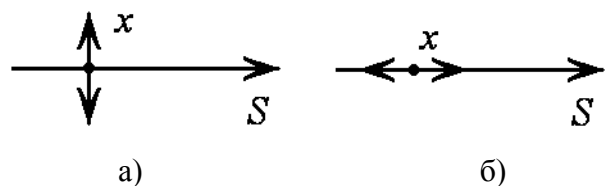


Рисунок 22 – а) поперечная хвиля;  
б) поздовжня хвиля

Хвиля називається **поперечною**, якщо частинки середовища коливаються в напрямках, перпендикулярних до напрямку поширення хвилі (рис. 22, а). Наприклад, поперечна хвиля поширюється вздовж натягнутого гумового шнура, один кінець якого закріплений, а інший приведений в коливний рух. Поперечні хвилі можуть виникати тільки в такому середовищі, яке має

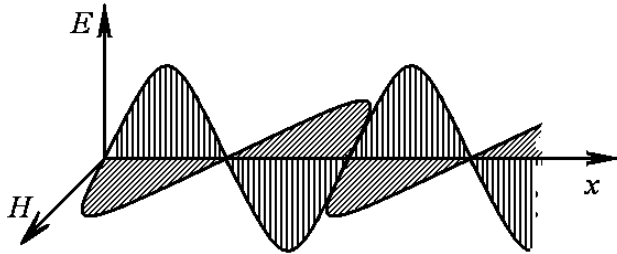


Рисунок 23 – Електромагнітна хвиля (ЕМХ)

пружність форми, тобто має здатність опору деформації зсуву. Цю властивість мають лише тверді тіла, тому поперечні хвилі поширюються тільки в твердих тілах. Хвиля називається **поздовжньою**, якщо частинки середовища коливаються у напрямі поширення хвилі (рис. 22, б).

Поздовжні хвилі пов'язані з об'ємною деформацією середовища. Тому вони можуть поширюватися як в твердих, так і в рідких або газоподібних середовищах.

**У газах і рідинах, які не мають пружності форми, поширення поперечних хвиль неможливе. Єдине виключення – це електромагнітна хвиля (ЕМХ), яка є поперечною. ЕМХ – коливання векторів напруженості електричного поля  $\vec{E}$  і напруженості магнітного поля  $\vec{H}$ , що поширюються в просторі (ЕМХ поперечна!) (рис. 23).**

**Швидкістю поширення хвилі (фазовою швидкістю)  $v$**  називається фізична величина, що чисельно дорівнює відстані, яку за одиницю часу проходить будь-яка точка хвильової поверхні. **Вектор швидкості  $\vec{v}$**  спрямований по нормалі до хвильової поверхні у бік поширення хвилі.

**Довжиною хвилі  $\lambda$**  називається відстань між будь-якими двома найближчими точками хвильового поля, що коливаються з різницею фаз  $2\pi$  (коливаються «у фазі») (рис. 24). Іншими словами, **довжина хвилі** – це відстань, яку проходить будь-яка точка фронту хвилі за один період коливань у джерелі (вібраторі).

$$\lambda = vT = \frac{v}{\nu} = \frac{2\pi v}{\omega} = \frac{2\pi}{k}, \quad (115)$$

де  $T = \frac{1}{\nu} = \frac{2\pi}{\omega}$  – період хвилі (найменший інтервал часу, через який коливання середовища повторюються);  $\nu$  – частота хвилі (число коливань здійснених за

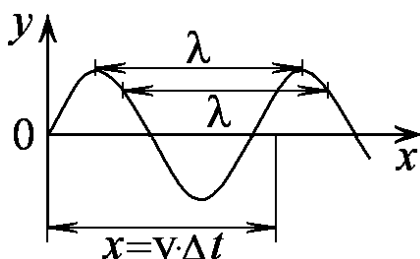


Рисунок 24 – Визначення довжини поперечної хвилі

одиницю часу);  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$  – хвильове число (число довжин хвиль, що укладаються на  $2\pi$  одиницях довжини);  $v$  – фазова швидкість хвилі.

Нехай у джерелі хвиль зміна коливної величини відбувається згідно із законом  $y = A \cdot \sin(\omega t + \varphi)$  з амплітудою  $A$ , циклічною частотою  $\omega$  і початковою фазою  $\varphi$ . Хвиля



поширюється вздовж осі  $x$  (рис. 24). У точці  $x=0$  при  $t=0$  вважаємо, що початкова фаза дорівнює нулю  $\varphi=0$ , тоді і  $y=0$ . Всі хвильові поверхні перпендикулярні до осі  $x$ , і хвиля є плоскою. У довільній точці  $x$  коливання частинок в перпендикулярній площині відстають за часом на величину  $\Delta t$  від коливань частинок в площині  $x=0$ , оскільки для проходження шляху від площини  $x=0$  до площини  $x$  хвилі потрібен час  $\Delta t = x/v$  ( $v$  – швидкість поширення хвилі). Отже, коливання частинок фронту плоскої хвилі в точці, віддаленій на відстань  $x$  від джерела, запізнюються за часом на  $\Delta t$ :

$$y(x, t) = A \cdot \sin[\omega(t \pm \Delta t)] = y_0 \cdot \sin[\omega(t \pm x/v)].$$

При цьому передбачається, що в процесі поширення хвилі не відбувається її загасання.

**Рівняння плоскої біжучої хвилі** поширюється уздовж осі  $x$ :

$$y(x, t) = A \cdot \sin\left[\omega\left(t - \frac{x}{v}\right)\right]. \quad (116)$$

Враховуючи, що  $k = \omega/v$ , отримаємо **рівняння плоскої незгасаючої хвилі в інтегральній формі**

$$y(x, t) = A \cdot \sin(\omega t \pm kx) \quad (117)$$

або, якби коливання в джерелі відбувалися згідно із законом  $y = A \cdot \cos(\omega t + \varphi)$ , то

$$y(x, t) = A \cdot \cos(\omega t \pm kx). \quad (118)$$

Фаза біжучої хвилі ( $\omega t \pm kx$ ) – функція двох змінних ( $t$  і  $x$ ). Для фіксованої відстані  $x$  зміщення  $y(x, t)$  є гармонічною функцією часу, а для фіксованого часу  $t$  зміщення  $y(x, t)$  є синусоїдою або косинусоїдою в просторі.

Знак «мінус» в рівняннях (117), (118) використовується при поширенні хвилі в позитивному напрямі  $x$ , а знак «плюс» – в негативному (тобто якщо ми хочемо описати поширення хвилі до включення приладу відліку часу).

Знайдемо другі похідні за координатою і часом від (117):

$$\frac{d^2 y(x, t)}{dx^2} = -A \cdot k^2 \cdot \sin(\omega t - kx + \varphi) = -\frac{\omega^2}{v^2} y(x, t),$$

$$\frac{d^2 y(x, t)}{dt^2} = -A \cdot \omega^2 \cdot \sin(\omega t - kx + \varphi) = -\omega^2 y(x, t),$$

звідки випливає **хвильове рівняння в диференціальній формі**

$$\frac{d^2 y(x, t)}{dx^2} = \frac{1}{v^2} \frac{d^2 y(x, t)}{dt^2}. \quad (119)$$

Якщо зміщення частинок середовища відбувається в трьох координатах з часом  $\xi(x, y, z, t)$ , то рівняння має вигляд

$$\Delta \xi(x, y, z, t) = \frac{1}{v^2} \frac{d^2 \xi(x, y, z, t)}{dt^2} \quad (120)$$

де  $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$  – оператор Лапласа.

## 2.2. Параметричний резонанс. Стоячі хвилі

Для визначення частоти вібратора в даній роботі використовуються стоячі хвилі, що виникають у натягнутій нитці, пов'язаній з вібратором. У коливній системі (нитці) можна викликати вимушені коливання, якщо в такт з коливаннями періодично змінювати будь-який її параметр. Таке явище називається *параметричним резонансом*.

Якщо закріплена за один кінець нитку натягнути горизонтально, прикріпивши іншим кінцем до вібратора, що коливається вздовж натягнутої нитки, то в ній виникнуть поперечні коливання через періодично змінний натяг. Нехай вібратор, до якого прикріплена нитка, в початковий момент часу відхилений ліворуч і нитка вільно провисає (рис. 25, а). Якщо стрижень-вібратор почне рухатися праворуч, нитка почне натягуватися і, коли він відхилиться праворуч максимально (рис. 25, б), нитка займе горизонтальне положення, а всі її точки будуть рухатися вгору (швидкості деяких точок вказані стрілками). При русі стрижня-вібратора у зворотному напрямі натяг

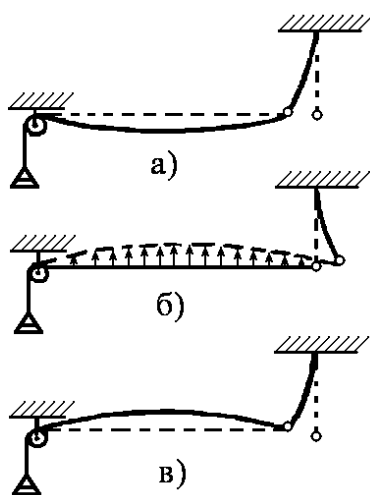


Рисунок 25 – Пристрій для визначення частоти коливання вібратора

нитки слабшає, але всі її точки продовжують за інерцією рухатися вгору (рис. 25, в). За час наступного повного коливання стрижня-вібратора нитка знову провисне. Таким чином, за час двох повних коливань вібратора нитка здійснює тільки одне повне коливання. Отже, частота коливання вібратора удвічі більше частоти коливань нитки. Розглянутий спосіб збудження коливань, очевидно, є *параметричним*, оскільки зовнішня дія (коливання вібратора) викликає періодичну зміну одного з параметрів стану нитки (натяг).

У будь-якій системі, що має можливість здійснювати коливання, через будь-які випадкові дії ззовні виникають власні коливання. **І якщо**

**параметрична дія на цю систему відбувається з частотою, вдвічі більшою, ніж частота її власних коливань, то коливання починають посилюватися** (виконуються умови *параметричного резонансу*). Аналогічні явища можна викликати і в електричному контурі, якщо за допомогою зовнішніх дій змінювати його ємність або індуктивність. За цим принципом заснована робота параметричних генераторів електричних коливань і параметричних підсилювачів електричних сигналів.

Як тільки вібратор починає здійснювати коливання, вони передаються нитці і по ній поширюється пружна хвиля з частотою щ і амплітудою  $A$ . Якщо нитка не дуже довга і втрати енергії малі, точки нитки здійснюватимуть незгасаючі коливання.

Прийmemo за початок відліку точку  $O$  (точка дотику нитки з блоком). Хвиля, дійшовши до цієї точки, відобразиться і піде назад. Таким чином, у нас буде дві хвилі, що переміщаються в протилежних напрямках. Запишемо рівняння цих хвиль:

$$y_1 = A \cdot \sin(\omega t + kx), \quad (121)$$

$$y_2 = A \cdot \sin(\omega t - kx + \pi). \quad (122)$$

Всі точки нитки відстають від коливань вібратора, і це відставання тим більше, чим менша координата  $x$  у вибраній системі відліку (рис. 26), тому рівняння (121) є рівнянням плоскої **прямої біжучої хвилі**, а (122) – **відбитої**. У фазі відбитої хвилі перед  $kx$  записаний мінус, оскільки фаза коливань точок нитки, викликаних відбитою хвилею, тим менша, чим сильніше ця точка віддалена від початку координат. Крім цього, у фазі відбитої хвилі врахована умова відбиття в точці  $O$  (блок не коливається у вертикальному напрямі). Оскільки точка  $O$  не здійснює коливань, то, очевидно, що фаза коливання в точці  $O$  в прямій хвилі відрізняється від фази коливання цієї ж точки у відбитій хвилі на  $\pi$ .

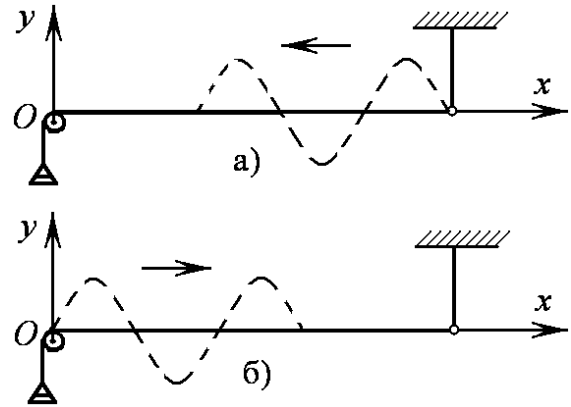


Рисунок 26 – Поширення хвилі

У результаті накладення прямої і відбитої хвиль всі точки здійснюватимуть складні коливання згідно із законом:

$$y = y_1 + y_2 = 2A \sin \frac{\omega t + kx + \omega t - kx + \pi}{2} \cdot \cos \frac{\omega t + kx - \omega t + kx - \pi}{2}$$

або

$$y = 2A \cos\left(kx - \frac{\pi}{2}\right) \cdot \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right). \quad (123)$$

Таким чином, ми отримали **рівняння сталої стоячої хвилі** в нитці (123).

Вираз  $\left|2A \cos\left(kx - \frac{\pi}{2}\right)\right|$  не залежить від часу і є **амплітудою стоячої хвилі**.

Як видно, амплітуда коливань точок нитки періодично змінюється за гармонічним законом залежно від відстані  $x$  від початку координат. Знайдемо максимальну і мінімальну амплітуди:

1) У точках, де

$$kx - \frac{\pi}{2} = 2n \frac{\pi}{2} = n\pi \quad \text{або} \quad kx = (2n + 1) \frac{\pi}{2}, \quad \text{де } n = 0, 1, 2, \dots, \quad (124)$$

$\cos(n\pi) = 1$  і **амплітуда коливань досягає максимальної величини  $2A$** . Ці точки називаються **пучностями стоячої хвилі**. З умови (124) набуваємо значення координатних пучностей:

$$x_{\text{пучн}} = (2n + 1) \frac{\pi}{2k} = \left[ k = \frac{2\pi}{\lambda} \right] = (2n + 1) \frac{2\pi}{4k} = (2n + 1) \frac{\lambda}{4}. \quad (125)$$

2) Точки нитки, фази коливань яких:

$$kx - \frac{\pi}{2} = (2n + 1) \frac{\pi}{2} \quad \text{або} \quad kx = 2n \frac{\pi}{2} = n\pi, \quad \text{де } n = 0, 1, 2, \dots, \quad (126)$$

взагалі не коливаються, оскільки  $\cos\left((2n+1)\frac{\pi}{2}\right) = 0$ , **амплітуда коливань дорівнює нулю**  $2A \cos(kx - \frac{\pi}{2}) = 0$ . Ці точки називаються **вузлами стоячої хвилі**.

Вузли виникають в тих точках, де пряма і відбита хвилі складаються в протилежних фазах і гасять одна одну. Зі (126) випливає, що координати вузлів набувають значення

$$x_{\text{вуз}} = \frac{n\pi}{k} = \left[ k = \frac{2\pi}{\lambda} \right] = \frac{2n\pi}{2k} = n \frac{\lambda}{2} = 2n \frac{\lambda}{4}. \quad (127)$$

Відстань між двома вузлами (127) або пучностями (125) називають **довжиною стоячої хвилі**, тому

$$\lambda_{\text{ст}} = x_{\text{пучн}(n+1)} - x_{\text{пучн}(n)} = (2(n+1)+1) \frac{\lambda}{4} - (2n+1) \frac{\lambda}{4} = \frac{\lambda}{2},$$

$$\lambda_{\text{ст}} = x_{\text{вуз}(n+1)} - x_{\text{вуз}(n)} = (n+1) \frac{\lambda}{2} - n \frac{\lambda}{2} = \frac{\lambda}{2}.$$

Таким чином, довжина стоячої хвилі

$$\lambda_{\text{ст}} = \frac{\lambda}{2}. \quad (128)$$

Оскільки обидва кінці нитки закріплені і в них утворюються вузли, то на довжині нитки  $l$  повинне укладатися ціле число довжин хвиль стоячої хвилі.

$$l = n\lambda_{\text{ст}} = n \frac{\lambda}{2}. \quad (129)$$

На рис. 27 показано утворення стоячої хвилі при відбитті, що супроводжується зміною фази на  $\pi$ . Зміщення частинок нитки, яке відбувалося б під дією прямої хвилі, показано суцільною лінією, а зміщення тих же частинок під дією відбитої хвилі – пунктиром. Жирна лінія показує результуюче зміщення точок нитки. На рисунку зафіксований момент часу, коли до точки  $O$  приходить пряма хвиля з фазою, відмінною від нуля.

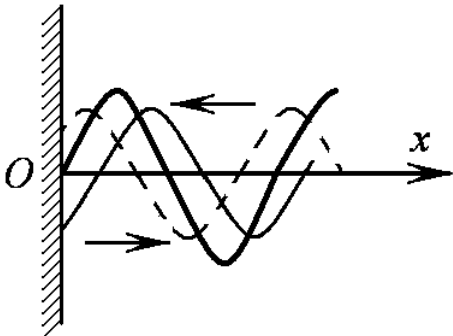


Рисунок 27 – Утворення стоячої хвилі

**Головною особливістю стоячої хвилі є те, що вона не переносить енергії.** Це

підтверджується хоча б тим, що розташування вузлів і пучностей з часом не змінюється. Така особливість стоячої хвилі виникає в результаті того, що хвилі, які накладаються, переносять енергію в рівній кількості, але в протилежних напрямках.

### 3. Опис установки та методика вимірювання

На одному кінці лабораторного столу закріплений вібратор, що є стрижнем, який приводиться в коливальний рух за допомогою електромагніту.

Електромагніт живиться змінним синусоїдальним струмом, тому стрижень здійснює вимушені коливання з частотою змінного струму. На іншому кінці столу закріплений легкий, з нерухою віссю, блок. Нитка прив'язана одним кінцем до вібратора, а інший кінець, перекинтий через блок, натягується вантажем, що лежить на чашечці. Схематично установка зображена на рис. 25.

Для визначення частоти вібратора необхідно отримати на нитці стійку картину стоячих хвиль, що можливо при виникненні параметричного резонансу, тобто коли частота вібратора вдвічі більша за одну із частот власних коливань натягнутої нитки. При цьому на довжині нитки  $l$  (між вібратором і блоком) укладеться ціле число стоячих довжин хвиль  $\lambda_{ст}$  (129).

Власна частота коливань нитки залежить від її натягування. Якщо при деякому натягуванні частота вібратора  $\nu_B$  удвічі більше найнижчої частоти  $\nu$  (основний тон) нитки, то на її довжині укладається одна стояча хвиля. Зменшуючи натяг нитки, можна отримати умови, при яких  $\nu_B$  вдвічі більше другого, третього...,  $n$ -го обертонів (частоти  $\nu_n$  кратні основному тону) нитки:  $\nu_B = 2 \nu_n$ . При цьому на довжині нитки  $l$  укладатиметься відповідно 2, 3...,  $n$  стоячих хвиль.

Частота коливань нитки  $\nu$  пов'язана з  $\lambda$  співвідношенням

$$\nu = v/\lambda, \quad (130)$$

де  $v$  – швидкість поширення хвиль у нитці.

Швидкість поширення хвиль у нитці залежить від сили натягу нитки  $F$ , обумовленої нерухою вантажем, і від її лінійної густини  $\rho$ , визначуваною масою всієї нитки  $m$  і її довжиною  $L$ . Оскільки  $v = \sqrt{\frac{FL}{m}} = \sqrt{\frac{F}{\rho}}$  то, з урахуванням (130) і (129), отримаємо

$$\nu = \frac{v}{\lambda} = \frac{1}{\lambda} \sqrt{\frac{F}{\rho}} = \frac{n}{2l} \sqrt{\frac{F}{\rho}}.$$

Сила натягу нитки  $F$  створюється вагою вантажу, тому

$$F = P = Mg,$$

де  $M$  – маса вантажу (сюди входить і маса чашечки). Враховуючи, що частота вібратора вдвічі більше частоти коливання нитки, отримаємо

$$\nu_B = 2\nu = 2 \frac{n}{2l} \sqrt{\frac{F}{\rho}} = \frac{n}{l} \sqrt{\frac{Mg}{\rho}}. \quad (131)$$

#### 4. Статистична обробка результатів вимірювань

Проводиться аналогічно тому, як показано в лабораторній роботі 4-1.

#### 5. Порядок виконання роботи й обробка результатів вимірювання

1. Зміряйте один раз довжину нитки  $l$  (між точкою кріплення на вібраторі і точкою дотику її з блоком) з точністю, яку дозволяє лінійка, і запишіть її в таблицю вимірювань.

2. Включіть електромагніт, викликавши коливання стрижня-вібратора.

3. Поступово навантажуючи чашечку різновагами, отримайте стійки стоячи хвилі.

4. Запишіть число стоячих довжин хвиль  $n$ , що уклалися на довжині нитки  $l$ , а також масу вантажу  $M$ , що отрималась при цьому, в таблицю вимірювань. Дослід повторити три-п'ять разів, добиваючись устанавлення стійких стоячих хвиль з різним числом довжин хвиль  $\lambda_{ст}$  на довжині нитки  $l$ .

5. Зніміть нитку і зміряйте один раз її повну довжину  $L$  з точністю лінійки. Маса нитки  $m$  вказана на установці. Розрахуйте лінійну густину нитки як  $\rho = m/L$  і запишіть значення в таблицю вимірювань.

6. За формулою (131) обчисліть частоту вібратора для кожного варіанта стійких стоячих хвиль.

7. Обчисліть абсолютну і відносну похибки визначення частоти вібратора і запишіть кінцевий результат в стандартному вигляді.

## 6. Контрольні питання

1. У чому полягає явище параметричного резонансу? Поясніть це, використовуючи лабораторну роботу № 5-1. Яке відношення частоти вібратора до власної частоти коливань нитки в цій роботі?

2. Яка різниця між біжучими і стоячими хвилями? Розгляньте амплітуди і фази коливання в різних точках в обох випадках.

3. Що називається стоячою хвилею? За яких умов виникають стоячі хвилі? Отримайте рівняння стоячої хвилі. Проаналізуйте це рівняння.

4. Чим характеризуються коливання середовища за наявності стоячих хвиль?

5. Що таке довжина хвилі? Яка довжина стоячої хвилі?

6. Що називають пучністю стоячої хвилі? Виведіть рівняння для пучності стоячої хвилі.

7. Що називають вузлом стоячої хвилі? Виведіть рівняння для вузла стоячої хвилі.

8. Як впливають умови відбиття хвиль на розташування пучностей і вузлів стоячої хвилі?

9. Чому при різному натягу нитки на її довжині укладається різне число довжин стоячої хвилі?

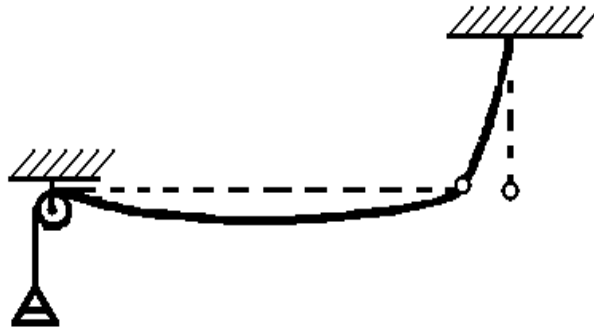
10. Яка мета лабораторної роботи № 5-1? Опишіть поетапно хід роботи. Отримайте рівняння для обчислення частоти коливання вібратора.

## 7. Протокол виконання лабораторної роботи № 5-1

1) **Тема:** Визначення частоти коливання вібратора методом Мельде.

2) **Мета роботи:** Ознайомлення з явищами параметричного резонансу, з умовами виникнення стоячих хвиль і визначення частоти вібратора.

3) **Схема приладу або установки**



#### 4) Таблиця приладів

| № з/п. | Найменування | Тип | Заводський № | Межа шкали | Ціна поділки | Клас точності |
|--------|--------------|-----|--------------|------------|--------------|---------------|
| 1      | Різноваги    |     |              |            |              |               |
| 2      | Лінійка      | У   | –            | 1000 мм    | 1 мм         | 1 мм          |

#### 5) Формули розрахунку величин та їхніх похибок:

$$1) \rho = m/L;$$

$$2) v_B = \frac{n}{l} \sqrt{\frac{Mg}{\rho}};$$

$$3) \Delta v_B = t_{\alpha, n} \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (\Delta v_{Bi})^2}{n(n-1)}}, \text{ де } t_{0,95;5} = 2,77.$$

#### 6) Таблиця вимірювань

$l =$  \_\_\_\_\_ м – довжина нитки від вібратора до осі блока;  $L =$  \_\_\_\_\_ м;  $m =$  \_\_\_\_\_ кг

| № | $M$ , кг | $n$ | $v_B$ , Гц              | $\Delta v_B$ , Гц | $(\Delta v_B)^2$ , Гц           |
|---|----------|-----|-------------------------|-------------------|---------------------------------|
| 1 |          |     |                         |                   |                                 |
| 2 |          |     |                         |                   |                                 |
| 3 |          |     |                         |                   |                                 |
| 4 |          |     |                         |                   |                                 |
| 5 |          |     |                         |                   |                                 |
|   |          |     | $\langle v_B \rangle =$ |                   | $\sum_{i=1}^5 (\Delta v_B)^2 =$ |

#### 7) Розрахунки величин та їхніх похибок:

#### 8) Запис остаточних результатів:

$$v_B = (\langle v_B \rangle \pm \Delta v_B)_{\alpha} \text{ Гц}; \quad \delta_{v_B \%} = \frac{\Delta v_B}{\langle v_B \rangle} \cdot 100 \%$$

#### 9) Висновок:

10) Роботу виконав:

Роботу перевірів:

**Лабораторна робота № 5-2**  
**ВИЗНАЧЕННЯ ШВИДКОСТІ ПОШИРЕННЯ ЗВУКОВИХ ХВИЛЬ**  
**У ПОВІТРІ ЗА ДОПОМОГОЮ ЯВИЩА РЕЗОНАНСУ**

**1. Мета роботи:**

- 1.1. Вивчення поширення пружних хвиль у повітрі.  
 1.2. Визначення швидкості поширення звукових хвиль.

**2. Основні поняття**

(Дивіться теорію до лабораторної роботи № 5-1).

При поширенні пружних хвиль відбувається деформація речовини. У твердих тілах відбувається деформація стиснення або розтягування. Вона характеризується відносною зміною довжини тіла  $\varepsilon = \frac{\Delta x}{x}$ , а пружні властивості твердого тіла характеризуються **модулем Юнга**

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon} = \frac{F \cdot x}{S \cdot \Delta x},$$

де  $F$  – сила, що діє на поверхню  $S$ .

Швидкість поздовжніх пружних хвиль у твердому тілі

$$v = \sqrt{\frac{E}{\rho}}, \quad (132)$$

а поперечних

$$v = \sqrt{\frac{G}{\rho}}, \quad (133)$$

де  $G = \frac{\tau}{\gamma}$  – модуль зсуву ( $\tau$  – напруга;  $\gamma$  – величина відносного зсуву), а  $\rho$  – густина речовини.

Пружна хвиля в газах є послідовністю областей стиснення і розрядження, що поширюється.

Швидкість поширення пружних звукових хвиль у газах залежить від температури газу. Для ідеальних газів швидкість звуку

$$v = \sqrt{\gamma \frac{R}{\mu} T} \quad (134)$$

де  $R = 8,31 \frac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{К}}$  – універсальна газова постійна;  $T$  – термодинамічна температура;  $\mu$  – молярна маса;  $\gamma = C_p/C_v$  – постійна для даного газу, залежна від відношення теплоємностей (теплоємність дорівнює кількості теплоти, яку необхідно передати газу для нагрівання його на один градус). **Швидкість звукової хвилі зростає зі збільшенням температури.** У повітрі при  $T = 273 \text{ К}$  швидкість звукової хвилі  $v = 330 \text{ м/с}$ , а при  $T = 293 \text{ К}$  –  $v = 343 \text{ м/с}$ .



**Швидкість пружних хвиль у рідинах і поздовжніх хвиль в твердих тілах перевищує швидкість звуку в газах і залежить від густини середовища.**

**Звукові хвилі (або звук)** – це механічні хвилі з частотою від 16 Гц до 20 кГц, які сприймає вухо людини.

Звукові хвилі з частотами менше 16 Гц називаються **інфразвуками**, а більш 20 кГц – **ультразвуками**.

Швидкість звуку  $v$ , як і інших механічних хвиль, змінюється при переході з одного середовища в інше, але частота  $\nu$  і період  $T$  коливань частинок середовища залишаються постійними. Звук не може поширюватися у вакуумі.

Звуки поділяють за **тонами** і **шумами**.

**Тон (музичний тон)** – це звук, який створює тіло при гармонічних коливаннях.

Тони відрізняються за гучністю і висотою.

**Висота тону** – це суб'єктивна характеристика звуку, яка визначається частотою коливань.

**Шум** – це звук, який складається з коливань різної амплітуди і частоти.

**Гучність** – це суб'єктивна характеристика звуку, яка визначається амплітудою коливань (і, отже, енергією, яку переносить хвиля за одиницю часу через одиницю поверхні) у звуковій хвилі. Гучність звуку залежить від інтенсивності звуку. Вухо здатне сприймати звуки з інтенсивністю  $I$  (**інтенсивність звуку** – середнє значення густини потоку енергії за одиницю часу, яку несе звукова хвиля) близько  $10^{-12} \dots 10^{-11}$  Вт/м<sup>2</sup>, де  $I_0 \approx 10^{-12}$  Вт/м<sup>2</sup> – **поріг чутності** (мінімальна інтенсивність звуку, яку можна почути).

Мірою чутливості органів слуху є **рівень інтенсивності (гучність звуку)**

$$L = 10 \lg \left( \frac{I}{I_0} \right). \quad (135)$$

Одиниця вимірювання – децибел (дБ). Вухо людини сприймає звуки гучністю від 0 до 130 дБ. Згасання в 20 дБ відповідає зменшенню інтенсивності в 100 разів.

### 3. Опис установки та методика вимірювання

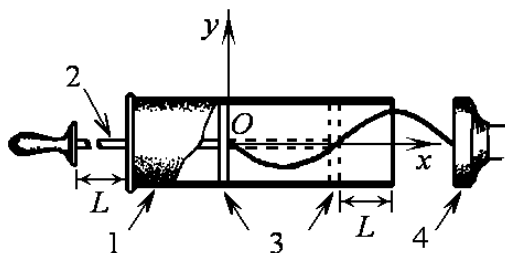


Рисунок 28 – Пристрій для визначення довжини звукової хвилі

Фазова швидкість  $v$  поширення звукової хвилі в пружному середовищі пов'язана з частотою  $\nu$  джерела хвилі і довжиною хвилі  $\lambda$  співвідношенням

$$v = \lambda \nu,$$

тому, знаючи частоту джерела звуку і змірявши довжину хвилі, можна обчислити швидкість поширення звуку в середовищі.

Джерелом звуку в даній роботі є телефон, на який подається змінна напруга звукової частоти від генератора ГЗ-36.

На рис. 28 зображена установка, за допомогою якої визначається довжина хвилі. Всередині тонкостінної металевої труби 1 (діаметром 40...45 мм і завдовжки 900 мм) вільно переміщається стрижень 2 з поршнем 3. Поршень складається з двох повстяних дисків, прикріплених до кінця стрижня за допомогою двох металевих шайб. З одного кінця труба відкрита, з іншого – має кришку з отвором, через який проходить стрижень. Довжина стрижня підібрана так, що поршень знаходиться з краю відкритого отвору труби, коли стрижень повністю засунутий в трубу. Таким чином, довжина виступаючої з труби частини стрижня 2 дорівнює довжині повітряного стовпа  $L$ .

При включенні телефону 4, що знаходиться навколо відкритого кінця труби, коливання мембрани передаються повітрю всередині труби, тобто по повітряному стовпу до поверхні поршня буде поширювати поздовжня звукова хвиля. Частота цієї хвилі дорівнює частоті змінного струму, що надходить від генератора ГЗ-36. Амплітуда коливань частинок повітря буде найбільшою, коли частота генератора збігається з однією із власних частот коливань повітряного стовпа, тобто виникне явище резонансу. Щоб отримати умови для резонансу, змінюють довжину повітряного стовпа  $L$ , пересуваючи поршень. При цьому змінюється і набір власних частот коливань повітряного стовпа, оскільки він залежить від довжини стовпа.

Хвиля, що біжить від мембрани, дійшовши до поверхні поршня, відбивається, і стрибком змінює фазу на  $\pi$  (відбиття від більш щільного середовища аналогічно відбиттю від закріпленого кінця нитки в лабораторній роботі № 5-1). Якщо мембрана коливається безперервно, то по повітряному стовпу одночасно, назустріч одна іншій, поширюватимуться дві однакові поздовжні хвилі. В результаті накладення прямої хвилі, що біжить від мембрани, і відбитої хвилі, в повітряному стовпі виникають стоячі хвилі.

Якщо діаметр труби менше довжини хвилі і стінки її гладенькі, то помітного загасання хвилі не відбувається. Тому пряма і відбита хвилі можуть бути представлені рівняннями (121) і (122), які застосовні в припущенні, що хвиля поширюється вздовж осі  $x$  і початок обрано в точці  $O$  на поверхні поршня.

Отримання стоячої хвилі та її аналіз аналогічні розглянутим в лабораторній роботі № 5-1, тому надалі будемо користуватися формулами, отриманими в попередній роботі.

При сталій стоячій хвилі біля поверхні поршня завжди утворюється вузол, а біля відкритого кінця труби – пучність. Пучність виникає, оскільки на відкритому кінці труби також відбувається відбиття хвилі, але без зміни фази на протилежну. Частинки повітря, що знаходяться всередині труби, мають меншу свободу руху, ніж ті, які знаходяться ззовні. Тому повітря поза трубою може розглядатися як середовище менш щільне, ніж повітря всередині труби. А при відбитті від менш щільного середовища фаза хвилі не змінюється.

Таким чином, на довжині повітряного стовпа, згідно з (125), повинно укластися непарне число  $\lambda/4$  (на виході труби повинна бути пучність):

$$L = (2n + 1) \frac{\lambda}{4}, \text{ де } n = 0, 1, 2, \dots \quad (136)$$

На рис. 27 показаний один із випадків утворення стоячої хвилі, отриманої в результаті складання поперечних хвиль. У повітрі ж поширюється поздовжня хвиля, тому даний рисунок можна вважати справедливим і в цьому випадку, якщо уявити собі, що пучності відповідають максимальному розрідженню повітря, а вузли – максимальному стисненню.

З формули (136) випливає, що

$$\lambda = \frac{4L}{(2n + 1)}, \quad (137)$$

де  $L$  – довжина повітряного стовпа, в якій уклалося  $(2n + 1)$  чвертей довжини хвилі.

#### 4. Обробка результатів вимірювань

Проводиться аналогічно тому, як показано в лабораторній роботі № 4-1.

#### 5. Порядок виконання роботи й обробка результатів вимірювання

1. Установіть прилад на столі і введіть весь стрижень в трубу.
2. Піднесіть звучний телефон до відкритого кінця труби.
3. Поступово виводьте стрижень до того моменту, коли сила звуку стане максимальною. Це і означатиме, що наступив «перший» резонанс, коли на довжині повітряного стовпа уклалася одна чверть біжучої хвилі  $\frac{\lambda}{4}$  (див. рис. 28).

4. Зміряйте виступаючу частину стрижня  $L_{1i}$ , покази запишіть у таблицю вимірювань. Повторіть дослід п'ять разів.

5. Потім виведіть поршень до настання другого резонансу. При цьому сила звуку знову буде максимальною, а на довжині повітряного стовпа укладеться  $\frac{3\lambda}{4}$  (див. рис. 28).

6. Зміряйте виступаючу частину стрижня  $L_{2i}$ , покази запишіть у таблицю вимірювань. Повторіть дослід п'ять разів.

7. Визначте довжину стоячої хвилі як різницю зміряних довжин стрижня  $\lambda_{\text{ст}} = L_{2i} - L_{1i}$  запишіть результати в таблицю вимірювань.

8. Запишіть значення частоти  $\nu$  з генератора ГЗ-36 в таблицю вимірювань.

9. Скориставшись тим, що  $\nu = \lambda \nu$ , обчисліть швидкість звукової хвилі при температурі і вологості, які мали місце в лабораторії під час досліду за формулою

$$\nu = 2\nu(L_2 - L_1).$$

10. Оскільки  $\lambda_{\text{ст}} = \lambda/2$ , то визначте довжину звукової хвилі як  $\lambda = 2\lambda_{\text{ст}}$ . Результат запишіть в таблицю.

11. Обчисліть швидкість звуку  $v_0$  у сухому повітрі при  $0^\circ\text{C}$ , якщо відомо, що швидкість звуку в повітрі  $v$  змінюється залежно від температури  $t$  згідно із законом

$$v = v_0 \sqrt{1 + 0,004t}$$

або

$$v_0 = \frac{2v(L_2 - L_1)}{\sqrt{1 + 0,004t}}$$

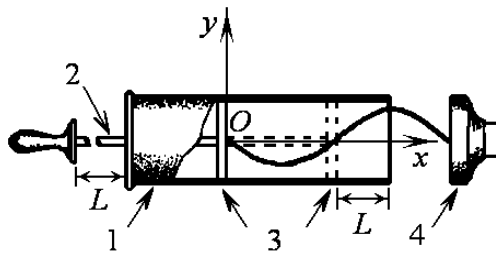
12. Обчисліть абсолютну і відносну похибки визначення швидкості звуку і запишіть кінцевий результат в стандартному вигляді.

## 6. Контрольні питання

1. За якої умови може виникати резонанс у повітряному стовпі?
2. Як утворюється стояча хвиля? Вивести рівняння стоячої хвилі.
3. Чим відрізняється стояча хвиля від біжучої?
4. Від чого залежить швидкість звукової хвилі в повітрі?
5. Що таке гучність звуку, тон, шум?
6. Як визначається швидкість звукової хвилі в повітрі за допомогою явища резонансу?

## 7. Протокол виконання лабораторної роботи № 5-2

- 1) **Тема:** Визначення швидкості розповсюдження звукових хвиль в повітрі.
- 2) **Мета роботи:** Ознайомлення з явищем резонансу, умовами виникнення стоячих звукових хвиль і визначення швидкості звукової хвилі.
- 3) **Схема приладу або установки:**



1 – металева труба; 2 – стрижень; 3 – поршень; 4 – телефон

### 4) Таблиця приладів

| № з/п. | Найменування | Тип | Заводський № | Межа шкали | Ціна поділки | Клас точності |
|--------|--------------|-----|--------------|------------|--------------|---------------|
| 1      | Лінійка      | У   | –            | 1000 мм    | 1 мм         | 1 мм          |

### 5) Формули розрахунку величин та їхніх похибок:

1)  $\lambda_{\text{ст}} = L_2 - L_1$ ;

2) Швидкість звуку при температурі в лабораторії:  $v = 2v \cdot \lambda_{\text{ст}}$ ;

3)  $\Delta v = t_{\alpha, n} \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (\Delta v_i)^2}{n(n-1)}}$ , де  $t_{0,95;5} = 2,77$  – коефіцієнт Стьюдента;

4) Довжина звукової хвилі  $\lambda = 2\lambda_{\text{ст}}$ ;

5) Швидкість звуку при температурі  $0^\circ\text{C}$ :  $v_0 = \frac{2vv}{\sqrt{1+0,004t}}$ , де  $t$  – температура повітря в аудиторії.

**6) Таблиця вимірювань**

$v =$  \_\_\_\_\_ Гц – частота генератора ГЗ-36;  $t =$  \_\_\_\_\_  $^\circ\text{C}$ .

| № | $L_{1i}$ , мм | $L_{2i}$ , мм | $\lambda_{\text{ст}i}$ | $v_i$                 | $\Delta v_i$ | $(\Delta v_i)^2$        |
|---|---------------|---------------|------------------------|-----------------------|--------------|-------------------------|
| 1 |               |               |                        |                       |              |                         |
| 2 |               |               |                        |                       |              |                         |
| 3 |               |               |                        |                       |              |                         |
| 4 |               |               |                        |                       |              |                         |
| 5 |               |               |                        |                       |              |                         |
|   |               |               |                        | $\langle v \rangle =$ |              | $\sum (\Delta v_i)^2 =$ |

**7) Розрахунки величин та їхніх похибок:**

**8) Запис остаточних результатів:**

$v = (\langle v \rangle \pm \Delta v)_\alpha$  м/с;  $\delta_{v\%} = \frac{\Delta v}{\langle v \rangle} \cdot 100\% = \dots \%$ ;  $\lambda = \dots$  м;  $v_0 = \dots$  м/с.

**9) Висновок:**

**10) Роботу виконав:**

Роботу перевірів:

**Лабораторна робота № 5-3**  
**ВИЗНАЧЕННЯ ДОВЖИНИ СТОЯЧОЇ ЕЛЕКТРОМАГНІТНОЇ ХВИЛІ**

**1. Мета роботи:**

- 1.1. Вивчення умов утворення стоячих електромагнітних хвиль.
- 1.2. Визначення довжини електромагнітної біжучої хвилі.

**2. Основні поняття**

(Дивіться теорію до лабораторної роботи № 5-1).

**Електромагнітними хвилями** називаються коливання векторів електричного і магнітного полів, що поширюються у просторі (рис. 25).

Рівняння для  $E$  і  $H$  запишемо у вигляді:

$$\begin{aligned} E &= E_0 \cdot \sin(\omega t \pm kx), \\ H &= H_0 \cdot \sin(\omega t \pm kx), \end{aligned} \quad (138)$$

де  $\omega$  – циклічна частота електромагнітної хвилі;  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$  – хвилеве число,  $x$  – відстань від джерела хвиль до даної точки хвильового поля.

**Швидкість (фазова швидкість)**  $v$  електромагнітної хвилі у середовищі визначається з рівняння Максвелла і дорівнює

$$v = \frac{c}{\sqrt{\epsilon\mu}},$$

де  $\epsilon$  і  $\mu$  – відносні діелектрична і магнітна проникності середовища;  $c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0\mu_0}}$

– швидкість світла у вакуумі. Швидкість поширення електромагнітних хвиль в даному середовищі збігається зі швидкістю світла в цьому середовищі.

**Електромагнітні хвилі є поперечними**, і коливання векторів напруженості  $\vec{E}$  змінного електричного поля й напруженості  $\vec{H}$  змінного магнітного поля взаємно перпендикулярні і лежать у площині, перпендикулярній вектору швидкості  $\vec{v}$  поширення хвилі. Вектори  $\vec{v}$ ,  $\vec{E}$ ,  $\vec{H}$  створюють правошвинтову систему: з кінця вектора  $\vec{v}$  обертання від  $\vec{E}$  до  $\vec{H}$  за найкоротшою відстанню видно як спрямоване проти годинної стрілки (див. рис. 23).

Модулі векторів  $\vec{E}$  і  $\vec{H}$  у плоскій електромагнітній хвилі зв'язані співвідношенням

$$\sqrt{\epsilon\epsilon_0}E = \sqrt{\mu\mu_0}H, \quad (139)$$

де  $\epsilon_0$  і  $\mu_0$  – електрична і магнітна постійні;  $\epsilon$  і  $\mu$  – діелектрична і магнітна проникності середовища.

Взаємно перпендикулярні вектори  $\vec{E}$  і  $\vec{H}$  у електромагнітній хвилі, що поширюється у вільному просторі, коливаються в однаковій фазі – вони одночасно обертаються в нуль і одночасно досягають максимальних значень.

Лінія, дотична до якої в кожній точці збігається з напрямом поширення хвилі в цій точці (тобто з напрямом перенесення енергії), називається **променем**. Енергія переноситься в напрямі вектора  $\vec{v}$ .

Густина потоку енергії електромагнітної хвилі визначається векторним множенням  $\vec{E}$  і  $\vec{H}$

$$\vec{P} = [\vec{E} \times \vec{H}]. \quad (140)$$

**Інтенсивністю електромагнітної хвилі  $I$**  називається величина енергії, яку в середньому переносить хвиля за одиницю часу через одиничну площинку, перпендикулярну до напрямку поширення хвилі (**модуль вектора Умова-Пойтінга**):

$$I = \langle P \rangle = \frac{E \cdot H}{2}. \quad (141)$$

**Стояча хвиля** утворюється в результаті накладення двох хвиль, що поширюються у взаємно протилежних напрямках, якщо ці хвилі задовольняють умовам: їх частоти, амплітуди і напрями коливань однакові. **Первинна і відбита хвилі, складаючись, можуть створювати стоячі ЕМХ.**

Коливання електричного поля біжучої хвилі в точці  $x$

$$E_1 = E_0 \cdot \sin(\omega t - kx). \quad (142)$$

Коливання поля відбитої хвилі в точці  $x$

$$E_2 = E_0 \cdot \sin(\omega t + kx - \varphi), \quad (143)$$

де  $\varphi$  – величина запізнювання за фазою коливань поля відбитої хвилі в точці  $x=0$  в порівнянні з коливаннями первинної хвилі в тій самій точці. Це запізнювання можна пояснити двома причинами:

1) До повернення в точку  $x=0$  хвиля повинна двічі пройти всю відстань.

Отже, виникає відставання за фазою

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi \cdot \Delta x}{vT} = \frac{2\pi \cdot \Delta x}{\lambda}.$$

2) При відбитті від кінця лінії можлива зміна фази на  $\pi$ .

Результуюче поле первинної і відбитої хвиль дорівнює:

$$E = E_1 + E_2 = E_0(\sin(\omega t - kx) + \sin(\omega t + kx - \varphi)).$$

Оскільки  $(\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta)) = 2 \cos \beta \cdot \sin \alpha$ , то якщо позначити  $\alpha = \omega t - \frac{\varphi}{2}$ ,

$\beta = kx - \frac{\varphi}{2}$ , отримаємо

$$E = E_1 + E_2 = 2E_0 \cos\left(kx - \frac{\varphi}{2}\right) \cdot \sin\left(\omega t - \frac{\varphi}{2}\right), \quad (144)$$

тобто рівняння коливання з частотою первісної хвилі і початковою фазою  $\frac{\varphi}{2}$ .

Амплітуда коливань  $E_{\text{ст}}$  стоячої хвилі не залежить від часу і є періодичною функцією відстані  $x$  від джерела хвиль

$$E_{\text{ст}} = 2E_0 \left| \cos \left( kx - \frac{\varphi}{2} \right) \right|. \quad (145)$$

Точки, в яких амплітуда  $E_{\text{ст}}$  дорівнює нулю, називаються **вузлами стоячої хвилі**:

$$kx - \frac{\varphi}{2} = (2m + 1) \frac{\pi}{2}, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (146)$$

Точки, в яких амплітуда  $E_{\text{ст}}$  максимальна і дорівнює  $2E_0$ , називаються **пучностями стоячої хвилі**:

$$kx - \frac{\varphi}{2} = 2m \frac{\pi}{2}, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (147)$$

При відбитті хвилі від межі з більш щільним середовищем фаза змінюється на  $\pi$  і відбувається **втрата півхвилі**.

**Довжиною стоячої хвилі**  $\lambda_{\text{ст}}$  називається відстань між двома сусідніми вузлами або пучностями, що дорівнює половині довжини біжучої хвилі

$$\lambda_{\text{ст}} = \frac{\lambda}{2}. \quad (148)$$

**Коливання всіх точок стоячої хвилі**, що лежать між сусідніми вузлами, **відбуваються з різними амплітудами, але в одній фазі**, в той час, як у **біжучої хвилі**, навпаки, **коливання всіх точок відбуваються з однаковими амплітудами, але в різних фазах**.

У **стоячій хвилі відсутнє перенесення енергії**, оскільки енергія **переноситься в рівних кількостях у протилежних напрямках**.

У **біжучій ЕМХ коливання електричного і магнітного полів знаходяться у фазі**. У **стоячій ЕМХ між коливаннями векторів  $\vec{E}$  і  $\vec{H}$  існує різниця фаз**. Причина такої відмінності полягає в зміні фази коливань при відбитті ЕМХ від кінця лінії. Швидкість  $\vec{v}$  поширення пов'язана з векторами  $\vec{E}$  і  $\vec{H}$  правилом правого буравчика, тому для зміни швидкості хвилі на протилежну, потрібно, щоб один із векторів змінив фазу на  $\pi$ . Отже, при відбитті фаза коливань одного із векторів повинна змінитися стрибкоподібно на  $\pi$ .

**Таким чином, у стоячій ЕМХ пучності і вузли електричного і магнітного полів зрушені на  $\pi$** . Вузли електричного поля збігаються з пучностями магнітного поля і навпаки.

### 3. Опис установки та методика вимірювання

Випромінювачем електромагнітних хвиль є лінійний вібратор. Роль такого вібратора виконує антена, збуджена змінним електричним струмом високої частоти.

У вільному просторі, у так званій хвильовій зоні, де відстань від вібратора до приймача  $l \gg \lambda$ , поширюються поперечні електромагнітні хвилі, рівняння яких у разі плоскої електромагнітної хвилі можна представити у вигляді (138).



У даній роботі визначається довжина електромагнітної хвилі методом стоячих хвиль. Стоячі електромагнітні хвилі можна отримати за допомогою установки, зображеної на рис. 29. Плоска електромагнітна хвиля, що випромінюється генератором 1, поширюється по хвильоводу 2 до рупору 3 і випромінюється в простір уздовж осі, що проходить через центри хвильоводу і рупору. Надалі для простоти розглядатимемо тільки електричну складову  $E$  електромагнітної хвилі. Плоска біжуча хвиля, яка має вигляд

$$E_1 = E_0 \cdot \sin(\omega t - kx),$$

падає на гладку металеву пластину 4 (почало відліку обрано в точці 0 випромінювання хвилі генератором), а відбита хвиля

$$E_2 = E_0 \cdot \sin(\omega t + kx - \pi),$$

складаючись з падаючою, утворює стоячу електромагнітну хвилю вигляду

$$E = E_1 + E_2 = 2E_0 \cos\left(kx - \frac{\pi}{2}\right) \cdot \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$$

У точці відбиття фаза коливання електричного вектора  $E$  в електромагнітній хвилі змінюється на протилежну, і на пластині утворюється вузол стоячої хвилі.

Пучності хвилі утворюються на відстані  $x$ , (див. формулу (147) и лабораторну роботу № 5-1):

$$x_{\text{пучн}} = (2m + 1) \frac{\lambda}{4}, \quad \text{де } m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad (149)$$

а вузли, відповідно до (146) – на відстанях

$$x_{\text{вузл}} = \frac{2m\lambda}{4}, \quad \text{де } m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots. \quad (150)$$

Відстань між двома вузлами або пучностями являтиме довжину стоячої хвилі, яка в два рази менше біжучої хвилі:

$$\lambda_{\text{ст}} = \frac{\lambda}{2}.$$

Звідси видно, що довжину електромагнітної біжучої хвилі можна визначити, знаючи відстань між двома пучностями за максимальним показом індикатора електричного поля.

Індикатор 5, що вимірює інтенсивність випромінювання в точці спостереження – це детектор типу ДК-С7М, контакти якого є ненастроєною антеною; кінці детектора приєднуються до мікроамперметра.

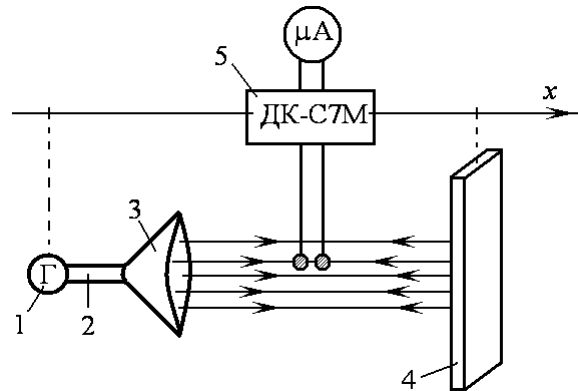


Рисунок 29 – Пристрій для визначення довжини стоячої ЕМХ

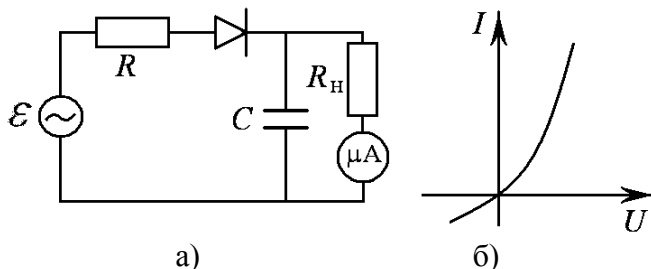


Рисунок 30 – а) Схема детектора ДК-С7М; б) ВАХ детектора

Еквівалентну схему індикатора приймача можна представити у вигляді, показаному на рис. 30, де  $\mathcal{E}$  – ЕРС, пропорційна амплітуді напруженості електричного поля в точці спостереження;  $R$  – внутрішній опір детектора;  $R_n$  – опір навантаження;  $C$  – електроємність. З наведеної схеми видно, що вона являє собою електричний ланцюг однонапівперіодного випрямляча. Середнє значення випрямленого струму в такому ланцюзі визначатиметься вольтамперною характеристикою детектора ДК-С7М, яка показана на рис. 30, б. Для малих сигналів характеристика залежності струму  $I$  від напруги  $U$  має вигляд  $I = \alpha U^2$ . Оскільки  $U$  пропорційне амплітуді поля  $E$ , то струм пропорційний  $E^2$  і, отже, інтенсивності електромагнітного поля  $I_E$ .

#### 4. Статистична обробка результатів вимірювань

Проводиться аналогічно тому, як показано в лабораторній роботі № 4-1.

#### 5. Порядок виконання роботи й обробка результатів вимірювання

1. Розташуйте металеву пластину на відстані 400 мм від випромінювача (генератора).
2. Між пластиною і випромінювачем помістіть зонд з детектором.
3. Повертаючи антену зонда-детектора навколо горизонтальної осі і переміщаючи вздовж стоячої хвилі, отримайте максимальне значення струму детектора.
4. Переміщаючи зонд вздовж осі випромінювача (вздовж стоячої хвилі електромагнітного поля) від пластини до випромінювача, зміряйте залежність струму детектора від координати зонда  $I = f(x)$ , воно буде аналогічно розподілу інтенсивності електромагнітної хвилі  $I_E = f(x)$ .
5. Координату зонда  $x$  відраховуйте від пластини. Зміряйте і запишіть у таблицю значення струму детектора  $I$  для координати  $x$ , що змінюється в межах від 20 мм до 340 мм. Переміщувати зонд слід так, щоб  $x$  мінялося через кожні 20 мм. Близько до випромінювача проводити вимірювання не рекомендується.
6. За виміряними значеннями побудувати графік зміни інтенсивності  $I_E = f(x)$ .
7. Розрахувати довжину стоячої хвилі з умови (150), де  $\lambda_{ст}$  відстань між двома найближчими мінімумами (максимумами) кривої  $f(x)$ .
8. Розрахувати довжину електромагнітної біжучої хвилі  $\lambda = 2\lambda_{ст}$ .
9. Показати з результатів досліду, що фаза електричного вектора при відбитті від металевієї пластини змінилася на  $\pi$ .

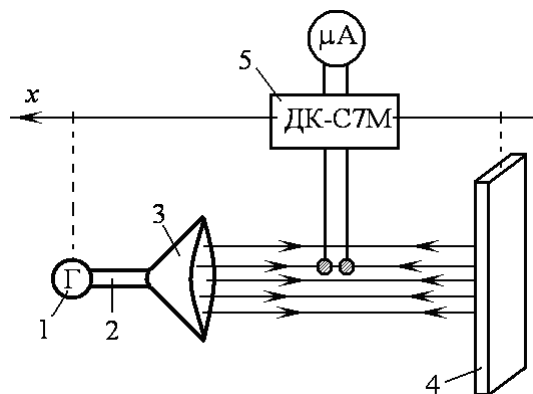
#### 6. Контрольні питання

1. Що називається електромагнітною хвилею?

2. Зобразіть графічно вид електромагнітної хвилі і вкажіть, в яких площинах здійснюють коливання вектори  $\vec{E}$  і  $\vec{H}$  у лінійно поляризованій хвилі, що називається променем ЕМХ? Що називається інтенсивністю електромагнітної хвилі?
3. Виведіть формулу стоячої хвилі для коливання вектора електричного поля  $\vec{E}$ .
4. Виведіть формули для визначення координат пучностей і вузлів стоячої ЕМХ.
5. Поясніть розташування пучностей і вузлів електричного і магнітного полів у стоячій ЕМХ, зміну їх фази.
6. Поясніть принцип роботи приймача електромагнітного випромінювання.
7. Як можна визначити довжину електромагнітної хвилі експериментально?

### 7. Протокол виконання лабораторної роботи № 5-3

- 1) **Тема:** Визначення довжини стоячої електромагнітної хвилі.
- 2) **Мета роботи:** Вивчення умов утворення стоячих електромагнітних хвиль. Визначення довжини електромагнітної біжучої хвилі.
- 3) **Схема приладу або установки**



1 – генератор; 2 – хвильовід; 3 – рупор;  
4 – металева пластина; 5 – детектор-індикатор

#### 4) Таблиця приладів

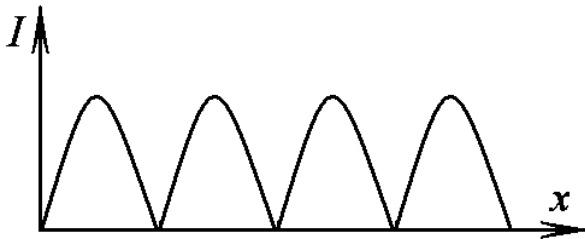
| № з/п. | Найменування   | Тип | Заводський № | Межа шкали | Ціна поділки | Клас точності |
|--------|----------------|-----|--------------|------------|--------------|---------------|
| 1      | Мікроамперметр |     |              |            |              |               |
| 2      | Лінійка        | У   | –            | 1000 мм    | 1 мм         | 1 мм          |

#### 5) Формули розрахунку величин та їхніх похибок:

- 1)  $\lambda_{ст} = \frac{2x_{вузол}}{m}$ , где  $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ;
- 2) Довжина біжучої ЕМХ:  $\lambda = 2\lambda_{ст}$

**6) Таблиця вимірювань**

| $x$ , мм | $I$ , мкА |
|----------|-----------|
| 20       |           |
| 40       |           |
| 60       |           |
| 80       |           |
| 100      |           |
| 120      |           |
| 140      |           |
| 160      |           |
| 180      |           |
| 200      |           |
| 220      |           |
| 240      |           |
| 260      |           |
| 280      |           |
| 300      |           |
| 320      |           |
| 340      |           |

**7) Розрахунки величин та їхніх похибок:****8) Графік залежності  $I = f(x)$ . (Наведений приклад графіка)****9) Запис остаточних результатів:** $\lambda = \dots$  м.**10) Висновок:**

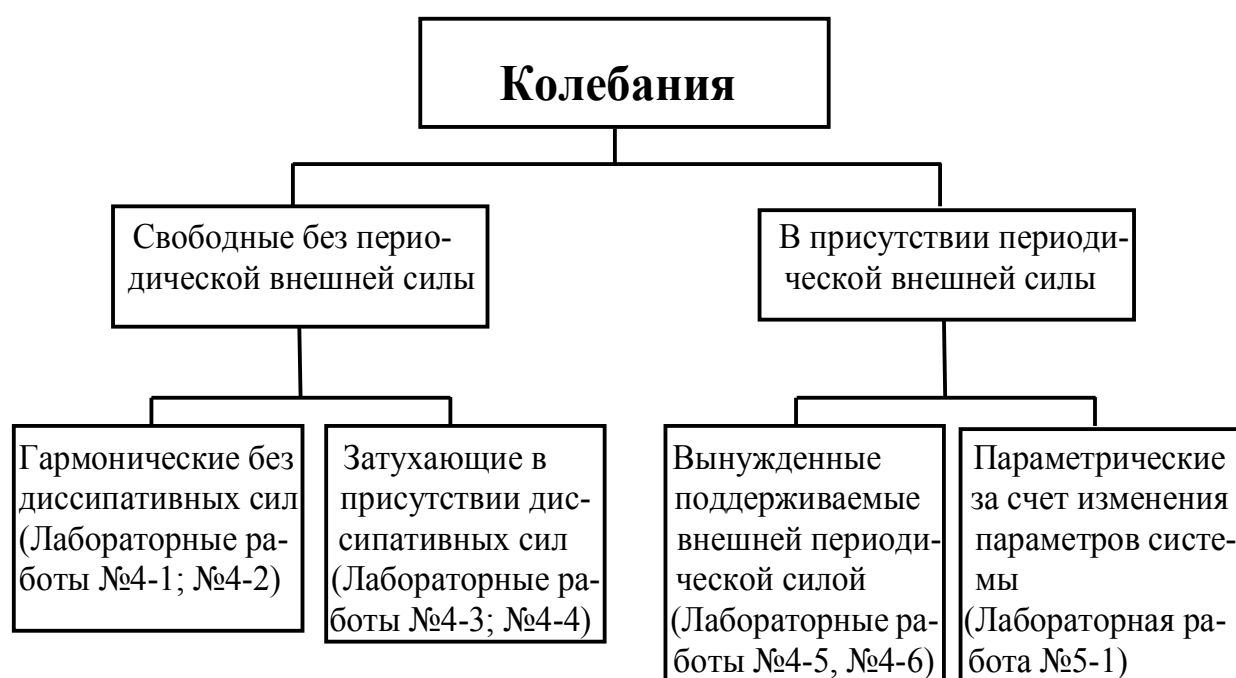
11) Роботу виконав:

Роботу перевірів:

## ВВЕДЕНИЕ

Данное методическое руководство предназначено для изучения раздела “Колебания и волны” курса физики, основные законы которого используются в технике передачи данных. Восемь лабораторных работ позволят студентам изучить основы данного курса и научиться экспериментально определять основные параметры волн и колеблющихся систем. Руководство содержит достаточную теоретическую информацию, дополненную детальными описаниями используемого в работах оборудования и методов измерения исследуемых величин.

Таблица 1



Все лабораторные работы выполняются фронтальным способом, то есть вся группа делает ту же самую лабораторную работу в то же самое время.

Перед выполнением лабораторной работы выполняется домашнее задание. Домашнее задание заключается в самостоятельном изучении теории и методологии выполнения работы, ответа на контрольные вопросы и подготовки протокола. Ответы на контрольные вопросы должны предшествовать протоколу лабораторной работы.

К выполнению лабораторной работы допускаются только те студенты, которые выполнили домашнюю работу, завершили предыдущую лабораторную работу и положительно ответили на тестовые вопросы по работе.

Содержание протокола любой лабораторной работы должно быть следующим:

- 1) Заголовок и номер лабораторной работы.

- 2) Цель работы.
- 3) Схема экспериментальной установки работы.
- 4) Таблица приборов.
- 5) Рабочие формулы с описанием всех входящих в них величин.
- 6) Таблица измерений для каждой измеренной величины. (Проверяется и подписывается преподавателем).
- 7) Обработка результатов измерений.
- 8) Результат измерения (доверительный интервал и относительная ошибка или графический результат).
- 9) Заключение
- 10) Дата, имя студента.

При подготовке к выполнению лабораторных работ, кроме данного методического руководства, рекомендовано пользоваться литературой, указанной в конце руководства.

## *Лабораторная работа № 4-1* **ИССЛЕДОВАНИЕ ГАРМОНИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ**

### **1. Цель работы**

1. Исследование незатухающих колебаний физического маятника.
2. Расчет момента инерции и приведенной длины физического маятника.

### **2. Основные понятия**

**Колебаниями** называются движения или изменения состояния, обладающие повторяемостью во времени. Колебания называются **периодическими**, если значения физических величин, изменяющихся в процессе колебаний, повторяются через равные промежутки времени.

Положение системы, в котором она может находиться бесконечно долго, без действия на нее внешних сил называют **состоянием равновесия**.

Движение механической системы около ее положения равновесия называют **механическими колебаниями**.

**Свободные колебания** (незатухающие (собственные) и затухающие колебания) это такие колебания, которые происходят при отсутствии внешне приложенного переменного действия к системе. **Вынужденные колебания** устанавливаются в системе в результате действия на нее переменных внешних сил (периодическая внешняя сила в механических системах или переменная ЭДС генератора в электромагнитных системах).

Самую простую модель колебательной системы называют **гармоническим осциллятором**.

**Собственными** или **незатухающими** называются колебания, при которых колебательная система не отдает энергию во внешнюю среду. Такие колебания описываются дифференциальным уравнением второго порядка, которое называют уравнением гармонического осциллятора:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0 \quad \text{или} \quad \ddot{x} + \omega_0^2 x = 0. \quad (1)$$

**Гармоническими колебаниями** называются колебания, в которых колеблющаяся величина  $x$  изменяется с течением времени по закону синуса или косинуса. Общее решение дифференциального уравнения (1) будет уравнением собственных гармонических колебаний:

$$x(t) = A \cdot \cos(\omega_0 t + \varphi_0) \quad \text{или} \quad x(t) = A \cdot \sin(\omega_0 t + \varphi_0 + \pi/2), \quad (2)$$

где  $A$ ,  $\omega_0$  и  $\varphi_0$  – постоянные величины, причем  $A > 0$ ,  $\omega_0 > 0$ ;  $x(t)$  – смещение колеблющейся величины относительно положения равновесия. Величина  $A$ , равная наибольшему абсолютному значению колеблющейся физической величины  $x$ , называется **амплитудой** колебания.

Выражение

$$\omega_0 t + \varphi_0 = \Phi \quad (3)$$

определяет значение смещения  $x$  в данный момент времени и называется **фазой**

**колебания.** В момент начала отсчета времени ( $t = 0$ ) фаза равна **начальной фазе колебаний**  $\varphi_0$ .

Единица измерения фазы – радиан [рад].

Если маятник в первый раз отклонится влево, тогда

$$x = x(t = 0) = -A \quad \text{и} \quad \varphi_0 = \pi, \quad (4)$$

при его отклонении вправо

$$x = x(t = 0) = +A \quad \text{и} \quad \varphi_0 = 0. \quad (4a)$$

Дифференцирование (3) дает:

$$\omega_0 = \frac{d\varphi}{dt}, \quad (5)$$

следовательно, **циклическая (круговая)** частота  $\omega$  – производная фазы по времени (скорость изменения фазы); единица измерения – радиан в секунду [рад/с].

## ПАРАМЕТРЫ КОЛЕБАНИЙ

**Периодом колебания  $T$**  называется тот наименьший промежуток времени, по истечении которого повторяются значения всех величин, характеризующих колебательное движение. За это время совершается одно полное колебание.

**Частотой периодических колебаний  $\nu$**  называется число полных колебаний, которые совершаются за единицу времени:

$$\nu = 1/T. \quad (6)$$

Единица измерения частоты – Герц [ $\text{Гц} = \text{с}^{-1}$ ].

Фазовый цикл одного полного колебания соответствует  $2\pi$  радианам (как период гармонической функции). Тогда круговая частота (5) является числом фазовых циклов за промежуток времени

$$\omega = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{T}, \quad (7)$$

а период колебаний равен

$$T = \frac{2\pi}{\omega}. \quad (8)$$

Единица измерения периода – секунда [с].

### 2.1. Гармонические колебания физического маятника

**Собственные гармонические колебания** – тип свободных колебаний, которые совершает система под действием возвращающей силы, приложенной к центру тяжести системы и направленной к положению равновесия. **Возвращающую силу  $F_{\text{воз}}$**  также называют **квазиупругой силой  $F$** . Квазиупругая сила – сила, направленная к положению равновесия и пропорциональная расстоянию  $x$  от положения равновесия до точки приложения силы.

Название «квазиупругая сила» связано с тем, что она аналогична силе, возникающей при малых деформациях упругих тел (закон Гука), так



называемой силы упругости

$$F_{\text{воз}} = -kx, \quad (9)$$

где  $x$  – смещение от положения равновесия;  $k$  – коэффициент упругости. Знак минус в уравнении (9) показывает, что сила упругости всегда направлена противоположно смещению.

Квазиупругой силой можно считать возвращающую составляющую силы тяжести, которая действует на математический маятник при его малых отклонениях от вертикали.

Таким образом, квазиупругие силы – это силы, не являющиеся упругими по своей природе, но подобные упругим по характеру зависимости их от координаты.

**Идеальная система** – идеальная физическая модель системы без любых энергетических потерь. В реальных системах всегда есть силы сопротивления, которые увеличивают период колебаний и уменьшают их амплитуду (см. лаб. работу № 4-3). Если колебания в системе происходят без диссипации (рассеивания) энергии во внешнюю среду, то они называются **собственными колебаниями**, а их частота – **собственной частотой**. Параметры собственных колебаний записываются с индексами “0”.

Рассмотрим собственные механические колебания физического маятника (рис. 1). **Физический маятник** – твердое тело, прикрепленное одним концом к неподвижному подвесу в некоторой точке и совершающее колебания под действием силы тяжести вокруг неподвижной горизонтальной оси, проходящей выше центра тяжести тела.

Метод описания таких колебаний состоит в составлении и решении дифференциальных уравнений соответствующих движений. Если маятник выведен из положения равновесия, тогда на него действует вращающий момент квазиупругой силы (рис. 1):

$$M = F_{\text{воз}} \cdot a = -mga \cdot \sin \alpha, \quad (10)$$

где  $m$  – масса маятника;  $a$  – расстояние от точки подвеса  $O$  стержня (оси вращения) до центра тяжести маятника (точка  $C$ );  $\alpha$  – малый угол отклонения маятника от положения равновесия.

Применим основное уравнение динамики вращательного движения

$$M = J \cdot \varepsilon \quad (11)$$

для описания движения маятника. В этом уравнении  $\varepsilon = \frac{d^2 \alpha}{dt^2}$  – угловое ускорение;  $J$  – момент инерции физического маятника. Из (10) и (11) получим

$$-mga \cdot \sin \alpha = J \cdot \varepsilon.$$

Момент инерции  $J$  является физическим эквивалентом массы вращающегося твердого тела. Например, момент инерции вращающейся точки

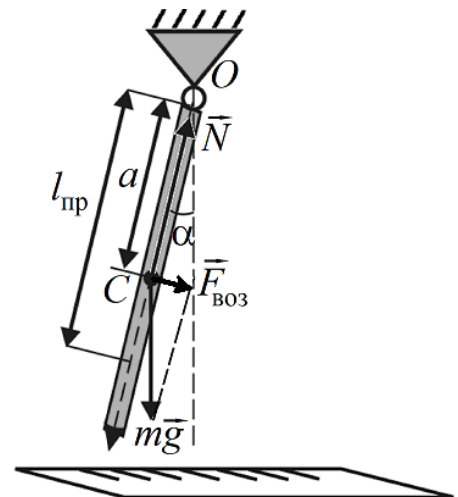


Рисунок 1 – Возвращающая сила физического маятника

массой  $m$  находящейся на расстоянии  $l$  от оси вращения

$$J = m \cdot l^2. \quad (12)$$

Единица измерения момента инерции в единицах СИ – [кг·м<sup>2</sup>].

**Математический маятник** – материальная точка, закрепленная на невесомой, нерастяжимой нити и совершающая колебания около положения равновесия.

Поскольку угол отклонения  $\alpha$  мал, то  $\sin \alpha \approx \alpha$  (радиан), тогда получим дифференциальное уравнение колебаний физического маятника:

$$-mga \cdot \alpha = J \frac{d^2 \alpha}{dt^2},$$

или

$$\frac{d^2 \alpha}{dt^2} + \frac{mga}{J} \alpha = 0, \text{ или } \frac{d^2 \alpha}{dt^2} + \omega_0^2 \cdot \alpha = 0, \quad (13)$$

где коэффициент при  $\alpha$  в уравнении (13) представляет собой квадрат циклической частоты собственных колебаний  $\frac{mga}{J} = \omega_0^2$ . Запишем частоту и период колебаний в виде:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{mga}{J}}, \quad (14)$$

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{J}{mga}}. \quad (15)$$

Таким образом, колебательное движение физического маятника описывается линейным однородным дифференциальным уравнением второго порядка (13). Общее решение такого уравнения и будет уравнением колебаний физического маятника

$$\alpha = \alpha_m \cdot \cos(\omega_0 t + \varphi_0). \quad (16)$$

В частном случае (12), если маятник математический,  $J = m \cdot l_{\text{пр}}^2$ , период колебаний будет равен

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{l_{\text{пр}}}{g}}. \quad (17)$$

Сравнивая периоды (15) и (17), видим, что можно подобрать математический маятник такой длины

$$l_{\text{пр}} = \frac{J}{ma}, \quad (18)$$

при которой он будет колебаться с таким же периодом, как и данный физический.  $l_{\text{пр}}$  – называют приведенной длиной физического маятника.

Используя формулу (15) можно определить момент инерции физического маятника

$$J = \frac{T_0^2 mga}{4\pi^2}, \quad (19)$$

а по формуле (18) – приведенную длину физического маятника  $l_{\text{пр}}$ .

### 3. Описание установки и методика измерения

**Приборы:** физический маятник, секундомер, миллиметровая линейка.

В данной работе мы наблюдаем собственные колебания физического маятника, представляющего собой металлический стержень, способный свободно вращаться в вертикальной плоскости (рис. 1). Ось вращения стержня проходит через один из его концов и расположена перпендикулярно стержню.

**Прямые измерения.** Масса маятника задана на металлическом стержне. Длина маятника измеряется с помощью линейки один раз, но с высокой точностью. Приборная точность – 0,001 м.

Вызывают колебания маятника путем отклонения его на небольшие углы  $3^\circ \dots 5^\circ$  от положения равновесия, только в этом случае колебания будут близкими к гармоническим.

При небольших углах отклонения  $\alpha$  значение амплитуды вычисляется с помощью уравнения:

$$A = l \cdot \sin \alpha \approx l \cdot \alpha = \frac{l \cdot \pi \cdot \alpha^\circ}{180^\circ}, \quad (20)$$

где  $l$  – длина маятника.

Дальнейшие измерения проводятся пять раз.

Для определения периода колебаний маятника  $T_i$ , с помощью секундомера измеряется время 10 или более полных колебаний (это необходимо для увеличения точности его определения). Секундомер запускают в тот момент, когда маятник находится в одном из крайних положений, после чего ведут отсчет колебаний. Разделив это время на число колебаний, получим период колебания маятника. Период вычислять с точностью до тысячных долей секунды. Средний период колебаний  $\langle T \rangle$  определяется как среднее арифметическое от периодов полученных в результате пяти измерений.

Подставляя в (7) среднее значение периода колебаний, рассчитывается средняя циклическая частота и записывается уравнение колебаний маятника с числовыми коэффициентами  $A$ ,  $\omega_0$ ,  $\varphi_0$ .

**Косвенное измерение момента инерции.** Студентам предлагается определить момент инерции данного маятника, используя полученные данные. Центр тяжести однородного стержня находится посередине его длины, следовательно

$$a = l/2. \quad (21)$$

Подставив (21) в (19), можно получить уравнение для расчета экспериментального значения момента инерции:

$$J_{\text{экс}} = \frac{T_0^2 m g l}{8 \pi^2}. \quad (22)$$

Ускорение свободного падения считать равным  $9,81 \text{ м/с}^2$ .

**Теоретическое значение момента инерции.** Из теоретической механики известно, что момент инерции стержня вращающегося вокруг оси, проходящей через один из его концов, определяется выражением:

$$J_{\text{теор}} = \frac{ml^2}{3}. \quad (23)$$

#### 4. Статистическая обработка результатов измерений

Для получения результата **прямых измерений** величины  $x$  необходимо:

1) Экспериментально определить значения измеряемой величины  $n$  раз ( $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ ) и записать результат этих измерений во втором столбце таблицы измерений. В первом столбце таблицы измерений записывается порядковое число измерения.

2) Вычислить **среднее значение** измеряемой величины:

$$\langle x \rangle = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n}{n} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n x_i. \quad (24)$$

3) Найти **отклонения**  $\Delta x_i$  полученных величин от среднего значения измеряемой величины и записать результаты в третьем столбце таблицы измерений:

$$\Delta x_1 = \langle x \rangle - x_1; \quad \Delta x_2 = \langle x \rangle - x_2; \quad \dots; \quad \Delta x_n = \langle x \rangle - x_n. \quad (25)$$

4) Возвести каждое отклонение в квадрат, и записать в четвертом столбце таблицы измерений. Затем просуммировать их:

$$\sum_{i=1}^n (\Delta x_i)^2 = (\Delta x_1)^2 + (\Delta x_2)^2 + \dots + (\Delta x_n)^2. \quad (26)$$

5) Найти абсолютную **статистическую погрешность** результатов измерения  $\Delta x_{\text{ст}}$  с помощью формулы Стьюдента:

$$\Delta x_{\text{ст}} = t_{\alpha, n} \cdot \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (\Delta x_i)^2}{n(n-1)}}, \quad (27)$$

где  $\alpha$  – доверительная вероятность;  $n$  – число измерений;  $t_{\alpha, n}$  – коэффициент Стьюдента.

6) Если на приборе не указана его **абсолютная погрешность**  $\Delta x_{\text{пр}}$ , то ее можно определить зная класс точности прибора  $\beta$ , используя формулу:

$$\Delta x_{\text{пр}} = \frac{\beta \cdot x_{\text{max}}}{100}, \quad (28)$$

где  $x_{\text{max}}$  – предел шкалы.

7) Найти **полную абсолютную погрешность** измерений:

$$\Delta x = \sqrt{(\Delta x_{\text{ст}})^2 + (\Delta x_{\text{пр}})^2}. \quad (29)$$

8) Вычислить **относительную погрешность** измерений:

$$\delta = \frac{\Delta x}{\langle x \rangle}. \quad (30)$$

9) Записать **конечный результат** в виде **доверительного интервала** и **относительной погрешности**:

$$x = (\langle x \rangle \pm \Delta x)_{\text{с}} = (\dots \pm \dots)_{0,95}; \quad \delta_x \% = \frac{\Delta x}{\langle x \rangle} \cdot 100\% = \dots \% \quad (31)$$

Для получения результата **косвенного измерения** величины  $y$  необходимо:

1) Вычислить **среднее значение** измеряемой величины  $\langle y \rangle$  по формуле, подставляя в нее средние значения измеренных величин  $\langle a \rangle$ ,  $\langle b \rangle$ ,  $\langle c \rangle$ , например:

$$\langle y \rangle = \frac{8 \langle a \rangle^4 \cdot \sqrt[3]{\langle b \rangle^2}}{7 \langle c \rangle^5} \quad (32)$$

2) Вычислить **относительную погрешность** измеряемой величины  $\delta_y$  по предварительно полученной формуле, подставляя в нее относительные погрешности измеренных величин  $\delta_a$ ,  $\delta_b$ ,  $\delta_c$ . Для нашего примера:

$$\delta_y = \sqrt{(4\delta_a)^2 + \left(\frac{2}{3}\delta_b\right)^2 + (5\delta_c)^2} = \sqrt{\left(4\frac{\Delta a}{\langle a \rangle}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\frac{\Delta b}{\langle b \rangle}\right)^2 + \left(5\frac{\Delta c}{\langle c \rangle}\right)^2}, \quad (33)$$

где  $\Delta a$ ,  $\Delta b$ ,  $\Delta c$  – абсолютные погрешности измеренных величин;  $\langle a \rangle$ ,  $\langle b \rangle$ ,  $\langle c \rangle$  – их средние значения.

3) Найти **абсолютную погрешность** измеряемой величины

$$\Delta y = \langle y \rangle \cdot \delta_y \quad (34)$$

4) Записать **конечный результат** в виде **доверительного интервала** и **относительной погрешности**:

$$y = (\langle y \rangle \pm \Delta y)_{\text{с}} = (\dots \pm \dots)_{0,95}; \quad \delta_{y\%} = \delta_y \cdot 100\% = \dots \% \quad (35)$$

**Все рассчитанные значения должны содержать три значащих цифры.**

## 5. Порядок выполнения работы и обработка результатов измерения

1. Измерьте длину маятника  $l$ , с точностью, на которую рассчитана линейка. Запишите массу маятника с металлического стержня с точностью 0,001кг.

2. Сделайте прямые измерения времени 10-ти полных колебаний с помощью секундомера и запишите полученные данные в таблицу измерений. Повторите эти измерения пять раз.

3. Определите среднее значение периода колебаний (24), отклонения от среднего значения (25), и сумму квадратов отклонений (26), абсолютную (29) и относительную (30) погрешности периода колебаний. Запишите конечный результат прямых измерений периода в виде, показанном в (31).

4. Определите амплитуду колебаний маятника с помощью (20) для угловых отклонений от состояния равновесия  $3^\circ \dots 4^\circ$ . Определите циклическую частоту  $\omega_0$  согласно (7) (начальную фазу  $\varphi_0$  считать равной нулю). Запишите уравнение колебаний маятника (в метрах) с числовыми коэффициентами  $A$ ,  $\omega_0$  (см. формулу (2)).

5. Вычислите экспериментальное значение момента инерции маятника  $J_{\text{экс}}$ , используя формулу (22), и сравните его с теоретическим значением  $J_{\text{теор}}$ , рассчитанным по формуле (23). Вычислите относительную (33) и абсолютную (34) погрешности момента инерции. Запишите конечный результат косвенного измерения момента инерции в виде, как показано в (35).

6. Вычислите среднее значение приведенной длины  $l_{\text{пр}}$  физического маятника (18).

## 6 Контрольные вопросы

1. Какие колебания называются периодическими?
2. Что такое физический и математический маятники?
3. Дайте определения периода, частоты, циклической частоты? Как они связаны?
4. Какие колебания называются гармоническими? При каких условиях колебания можно считать свободными?
4. Что называется квазиупругой силой? Как это проявляется в случае физического маятника?
5. Запишите уравнение квазиупругой силы и зависимости ее момента от угла отклонения маятника от состояния равновесия.
6. Объясните, в чем заключается метод описания колебаний?
7. Запишите дифференциальное уравнение физических колебаний маятника.
8. Выведите уравнение периода колебаний физического маятника.
9. Выведите выражение момента инерции физического маятника.
10. Что такое приведенная длина физического маятника?
11. Как ускорение свободного падения и масса влияют на период колебаний физического маятника?

## 7 Протокол выполнения лабораторной работы № 4-1.

1) **Тема:** Исследование гармонических колебаний механических систем.

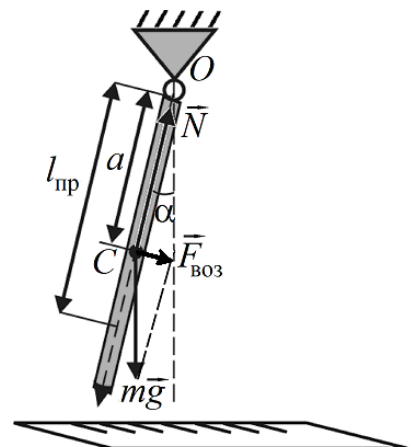
2) **Цель работы:**

1. Изучение метода описания незатухающих колебаний физического маятника.

2. Ознакомление с методом определения момента инерции и приведенной длины физического маятника.

3) **Схема прибора или установки**

4) **Таблица приборов**



| № п/п. | Наименование | Тип    | Заводской № | Предел шкалы | Цена деления | Класс точности |
|--------|--------------|--------|-------------|--------------|--------------|----------------|
| 1      | Секундомер   | УХЛ-42 |             | 99,99 с      | 0,01 с       | 0,01 с         |
| 2      | Линейка      | У      | —           | 1000 мм      | 1 мм         | 1мм            |

**5) Формулы расчета величин и их погрешностей:**

$$1) x = A \cos(\omega_0 t + \varphi_0), \text{ где } \varphi_0 = 0; \omega_0 = \frac{2\pi}{\langle T \rangle}; A = l \sin \alpha \approx l\alpha = \frac{l\alpha^0 \pi}{180^0};$$

$$2) \Delta T = t_{\alpha, n} \cdot \sqrt{\frac{\sum (\Delta T_i)^2}{n(n-1)}}, \text{ где } t_{0,95;5} = 2,77, \alpha = 0,95;$$

$$3) \text{ Экспериментальное значение момента инерции: } \langle J \rangle = \frac{\langle T \rangle^2 mgl}{8\pi^2};$$

4) Значения:

$$\text{относительной погрешности момента инерции: } \delta_J = \sqrt{\left(2 \frac{\Delta T}{\langle T \rangle}\right)^2 + \left(\frac{\Delta m}{m}\right)^2 + \left(\frac{\Delta l}{l}\right)^2};$$

$$\text{абсолютной погрешности момента инерции: } \Delta J = \langle J \rangle \cdot \delta_J.$$

$$5) \text{ Теоретическое значение момента инерции: } J = \frac{ml^2}{3};$$

$$6) l_{\text{пр}} = \frac{2 \cdot \langle J \rangle}{ml}.$$

**6) Таблица измерений**

$$m = \quad \text{кг}; \Delta m = 0,001 \text{ кг}; l = \quad \text{м}; \Delta l = 0,001 \text{ м};$$

| № | $t_i, \text{ с}$ | $T_i, \text{ с}$      | $\Delta T_i, \text{ с}$ | $(\Delta T_i)^2, \text{ с}^2$ |
|---|------------------|-----------------------|-------------------------|-------------------------------|
| 1 |                  |                       |                         |                               |
| 2 |                  |                       |                         |                               |
| 3 |                  |                       |                         |                               |
| 4 |                  |                       |                         |                               |
| 5 |                  |                       |                         |                               |
|   |                  | $\langle T \rangle =$ | $\sum (\Delta T_i)^2 =$ |                               |

**7) Расчеты величин и их погрешностей:****8) Запись окончательных результатов:**

$$1) T = (\langle T \rangle \pm \Delta T)_\alpha \text{ с}; \delta_{T\%} = \frac{\Delta T}{\langle T \rangle} \cdot 100\%;$$

$$2) x = A \cos(\omega_0 t + \varphi_0) \text{ м};$$

$$3) J = (\langle J \rangle \pm \Delta J)_\alpha \text{ кг} \cdot \text{м}^2; \delta_{J\%} = \frac{\Delta J}{\langle J \rangle} \cdot 100\%;$$

$$5) l_{\text{пр}} = \dots \text{ м}.$$

**9) Вывод:** (сравнить момент инерции, полученный в работе (формула (3)), и расчетный момент инерции (формула (5))).

**10) Работу выполнил:**

Работу проверил:

**Лабораторная работа № 4-2**  
**ИЗУЧЕНИЕ СЛОЖЕНИЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ**  
**ГАРМОНИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ**

**1. Цель работы:**

Изучение сложения электрических гармонических колебаний при помощи осциллографа.

**2. Основные понятия**

**2.1. Сложение одинаково направленных колебаний равных частот**

При сложении двух гармонических колебаний

$$x_1 = A_1 \cdot \cos(\omega_0 t + \varphi_1) \text{ и } x_2 = A_2 \cdot \cos(\omega_0 t + \varphi_2), \quad (36)$$

результатирующее гармоническое колебание имеет смещение  $x = x_1 + x_2$ , происходит в том же направлении и с той же частотой  $\omega_0$

$$x = A \cdot \cos(\omega_0 t + \varphi),$$

где  $A$  – амплитуда смещения результирующего колебания,  $\varphi$  – его начальная фаза. Из векторной диаграммы (рис. 2) нетрудно увидеть, что  $A$  и  $\varphi$  можно определить как

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)}, \quad (37)$$

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{A_1 \sin \varphi_1 + A_2 \sin \varphi_2}{A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2}. \quad (38)$$

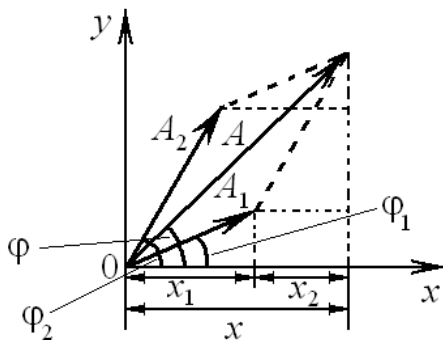


Рисунок 2 – Сложение одинаково направленных гармонических колебаний

Проанализируем выражение (37) для амплитуды.  $\cos(\varphi_2 - \varphi_1)$  не может быть больше +1 или меньше -1, поэтому возможные значения амплитуды  $A$  заключены в пределах

$$A_1 + A_2 \geq A \geq |A_2 - A_1|$$

(при этом учитывается, что, по определению амплитуды, она не может быть отрицательной).

Частные случаи сложения колебаний:

а)  $\varphi_2 - \varphi_1 = 2n\pi$ , где  $n = 0, 1, 2, \dots$ ; тогда  $A = A_1 + A_2$ .

б)  $\varphi_2 - \varphi_1 = (2n + 1)\pi$ , где  $n = 0, 1, 2, \dots$ ; тогда  $A = |A_2 - A_1|$ .

**2.2. Биения (сложение колебаний с близкими частотами)**

При сложении двух одинаково направленных колебаний  $x_1 = A \cdot \cos \omega_1 t$  и  $x_2 = A \cdot \cos \omega_2 t$ , где  $\omega_1 = \omega_0 - \Delta\omega$ , а  $\omega_2 = \omega_0 + \Delta\omega$ , причем  $\Delta\omega \ll \omega_0$ , результирующее колебание имеет вид:

$$x = x_1 + x_2 = 2A \cdot \cos \frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t \cdot \cos \frac{\omega_2 + \omega_1}{2} t = 2A \cdot \cos(\Delta\omega t) \cdot \cos \omega_0 t.$$



Его график изображен на рис. 3. Как видно из графика, результирующее колебание не является гармоническим. Его можно рассматривать как «почти косинусоидальное» с «условным периодом»  $T=2\pi/\omega_0$  и с медленно меняющейся амплитудой  $|2A \cdot \cos(\Delta\omega t)|$ .

Периодические изменения «амплитуды» описанного выше колебания называют **биениями**.

Период биений

$$T = \frac{\pi}{\Delta\omega} = \frac{2\pi}{\omega_2 - \omega_1},$$

а частота

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega_2 - \omega_1}{2\pi} = \nu_2 - \nu_1.$$

В линиях связи биения используются для амплитудной модуляции (АМ) входного сигнала.

### 2.3. Сложение двух взаимно перпендикулярных колебаний равных частот

Рассмотрим сложение двух взаимно перпендикулярных гармонических колебаний с одинаковой частотой  $\omega_0$ , совершающихся вдоль координатных осей  $ox$  и  $oy$ :

$$x = A_1 \cdot \cos(\omega_0 t + \varphi_1) \text{ и } y = A_2 \cdot \cos(\omega_0 t + \varphi_2). \quad (39)$$

Преобразуем:

$$\frac{x}{A_1} = \cos(\omega_0 t + \varphi_1) = \cos \omega_0 t \cos \varphi_1 - \sin \omega_0 t \sin \varphi_1; \quad (40)$$

$$\frac{y}{A_2} = \cos(\omega_0 t + \varphi_2) = \cos \omega_0 t \cos \varphi_2 - \sin \omega_0 t \sin \varphi_2. \quad (41)$$

Умножив (40) на  $\cos \varphi_2$ , а (41) на  $\cos \varphi_1$ , и взяв их разность (т.к.  $\sin \varphi_2 \cos \varphi_1 - \sin \varphi_1 \cos \varphi_2 = \sin(\varphi_2 - \varphi_1)$ ), получим

$$\frac{x}{A_1} \cos \varphi_2 - \frac{y}{A_2} \cos \varphi_1 = \sin \omega_0 t \cdot \sin(\varphi_2 - \varphi_1); \quad (42)$$

умножив (40) на  $\sin \varphi_2$ , а (41) на  $\sin \varphi_1$ , и взяв их разность, получим

$$\frac{x}{A_1} \sin \varphi_2 - \frac{y}{A_2} \sin \varphi_1 = \cos \omega_0 t \cdot \sin(\varphi_2 - \varphi_1). \quad (43)$$

Возведя в квадрат и сложив (42) и (43) получим

$$\left(\frac{x}{A_1}\right)^2 + \left(\frac{y}{A_2}\right)^2 - \frac{2xy}{A_1 A_2} \cos(\varphi_2 - \varphi_1) = \sin^2(\varphi_2 - \varphi_1). \quad (44)$$

Это уравнение эллипса, ориентация и величина полуосей которого зависят от разности фаз  $\varphi_2 - \varphi_1$  и амплитуд  $A_1$  и  $A_2$ .

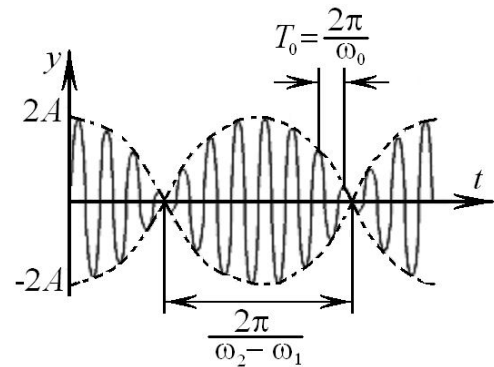


Рисунок 3 – Биения при сложении колебаний с близкими частотами

## 2.4. Частные случаи сложения двух взаимно перпендикулярных колебаний

а)  $\varphi_2 - \varphi_1 = 0$ . Уравнение (44) принимает вид  $\left(\frac{x}{A_1} - \frac{y}{A_2}\right)^2 = 0$  или  $y = x \frac{A_2}{A_1}$ ,

откуда видно, что траекторией будет отрезок прямой, середина которого находится в центре координат с полудлиной  $r = \sqrt{A_1^2 + A_2^2}$  (рис. 4, а). Колеблющаяся точка совершает гармонические колебания вдоль этой прямой по согласно закону  $r = \sqrt{A_1^2 + A_2^2} \cos \omega_0 t$ , т. е. с частотой  $\omega_0$  и амплитудой  $r$ .

б)  $\varphi_2 - \varphi_1 = \pm \pi$ . Уравнение (44) принимает вид  $\frac{x}{A_1} + \frac{y}{A_2} = 0$ , откуда видно,

что результирующее движение представляет собой гармоническое колебание вдоль прямой  $y = x \frac{A_2}{A_1}$  (рис. 4, б).

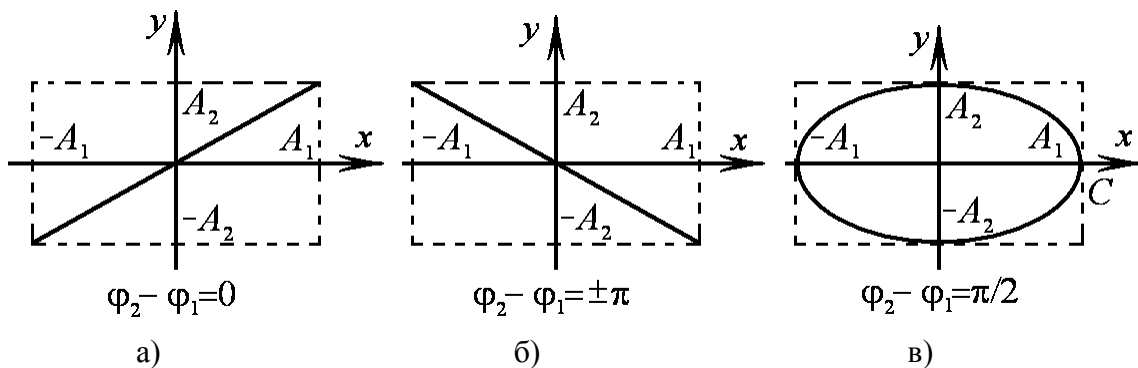


Рисунок 4 – Частные случаи сложения двух взаимно перпендикулярных колебаний

в)  $\varphi_2 - \varphi_1 = \pm \pi/2$ . В этом случае уравнение (44) примет вид

$$\left(\frac{x}{A_1}\right)^2 + \left(\frac{y}{A_2}\right)^2 = 1.$$

Это уравнение является уравнением эллипса, приведенного к координатным осям с полуосями, равными соответствующим амplitудам. При равенстве амплитуд  $A_1$  и  $A_2$  эллипс вырождается в окружность.

Случаи  $\varphi_2 - \varphi_1 = + \pi/2$  и  $\varphi_2 - \varphi_1 = - \pi/2$  отличаются направлением движения по эллипсу или окружности. Если  $\varphi_2 - \varphi_1 = + \pi/2$ , уравнения (39) можно записать в виде:

$$x = A_1 \cdot \cos \omega_0 t \text{ и } y = A_2 \cdot \cos \omega_0 t.$$

В момент времени  $t = 0$  колеблющаяся точка находится в положении  $C$  (рис. 4, в). В последующие моменты времени координата  $x$  уменьшается, а  $y$  — становится отрицательной. Следовательно, движение совершается по часовой стрелке, а при  $\varphi_2 - \varphi_1 = - \pi/2$  — против часовой стрелки.

### 2.5. Фигуры Лиссажу

*Если складывать два взаимно перпендикулярных колебания с разными частотами, в случае рационального*

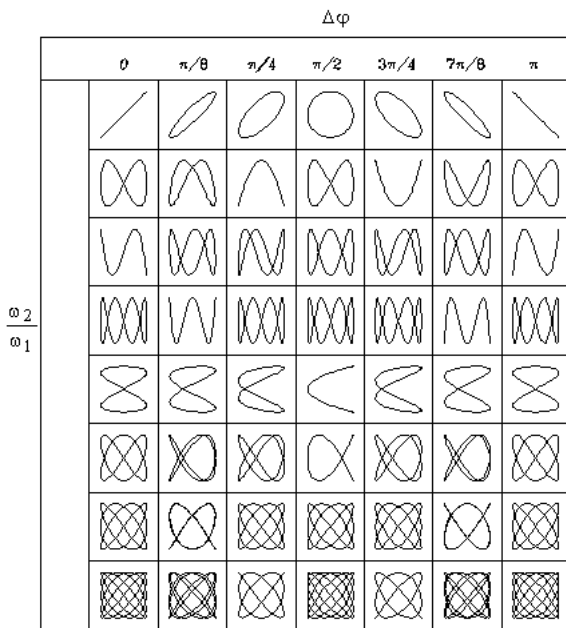


Рисунок 5 – Фигуры Лиссажу для различных отношений  $\omega_2/\omega_1$  с разностью фаз  $\Delta\phi$ .

*отношения частот  $\frac{\omega_2}{\omega_1}$ , траектории*

*движения будут замкнуты. Такие кривые называются фигурами Лиссажу.* Вид фигур Лиссажу зависит от  $\frac{\omega_2}{\omega_1}$ ,  $\frac{A_2}{A_1}$  и  $\phi_2 - \phi_1$ .

Если частоты взаимно перпендикулярных колебаний отличаются на очень маленькую величину  $\Delta\omega_0$ , их можно рассматривать как колебания одинаковой частоты, но с медленно изменяющейся разностью фаз.

Результирующее колебание в этом случае происходит по видоизменяющейся кривой, которая будет последовательно принимать форму, отвечающую всем значениям разности фаз от  $-\pi$  до  $+\pi$ . На рис. 5 представлены кривые Лиссажу для различных значений отношения  $\frac{\omega_2}{\omega_1}$ . Уравнения кривых Лиссажу описывается параметрическим уравнением:

Уравнения кривых Лиссажу описывается параметрическим уравнением:

$$\begin{cases} x = A_1 \cos(\omega_1 t + \Delta\phi) \\ y = A_2 \cos \omega_2 t \end{cases} \quad (45)$$

### 3. Описание установки и методика измерения

Экспериментальная установка состоит из электронно-лучевой трубки (осциллограф) и генератора синусоидальных колебаний (ГЗ-36) (см. протокол лабораторной работы ниже).

Сложение двух взаимно перпендикулярных колебаний наблюдается при подаче на осциллограф двух синусоидальных напряжений на вход  $Y$  и на вход  $X$ . На вход  $Y$  подают сигнал (переменное напряжение) от генератора ГЗ-36, частоту которого можно менять, а на вход  $X$  напряжение от сети с частотой 50 Гц.

Задача состоит в определении частоты управляющего сигнала  $\nu_x$ . Если частота генератора  $\nu_y$  будет рационально относиться к частоте управляющего

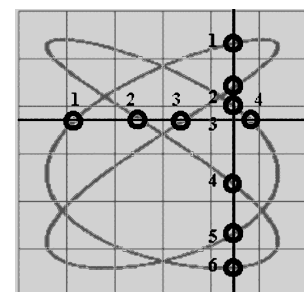


Рисунок 6 – Определение отношения частот по кривой Лиссажу

сигнала  $v_x$ , тогда электронный луч осциллографа очертит одну из кривых Лиссажу на экране осциллографа (см. трехмерную модель на сайте <http://phy.hk/wiki/englishhtm/Lissajous.htm>) или [здесь](http://www.magnet.fsu.edu/education/tutorials/java/lissajous/index.html) <http://www.magnet.fsu.edu/education/tutorials/java/lissajous/index.html>).

Каждый тип кривой соответствует каждому значению отношения  $\frac{v_x}{v_y}$ .

Отношение частот может быть легко определено следующим методом. Проведите две любые вертикальные и горизонтальные линии, пересекающие кривую Лиссажу. Линии должны быть проведены так, чтобы они не проходили через точку пересечения кривой. Посчитайте количество точек пересечения  $N_y$  вертикальной линии и кривой и количество точек пересечения  $N_x$  горизонтальной линии и кривой. Тогда  $\frac{v_x}{v_y} = \frac{N_y}{N_x}$ . На рис. 6 показан пример

определения отношения для случая  $\frac{v_x}{v_y} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$ . Частота  $v_y$  задана генератором,

определяя отношение  $\frac{v_x}{v_y}$  по фигуре Лиссажу, мы можем определить частоту управляющего сигнала  $v_x$ .

#### 4. Статистическая обработка результатов измерений

Проводится аналогично тому, как показано в лабораторной работе № 4-1.

#### 5. Порядок выполнения работы и обработка результатов измерения

1. Включите генератор колебаний ГЗ-36 и осциллограф. Подождите пять минут, пока они не нагреются.

2. Меняя частоту звукового генератора  $v_y$ , получите на экране осциллографа устойчивое изображение всех кривых Лиссажу, перечисленных в таблице измерений. Полученные значения  $v_y$  запишите в таблице измерений.

3. Определите для каждой кривой отношение частот  $\frac{v_x}{v_y} = \frac{N_y}{N_x}$ , и запишите

их в таблице измерений.

4. Определите частоту управляющего сигнала  $v_x$  для каждой кривой, ее среднее значение  $\langle v_x \rangle$ , абсолютную и относительную погрешности.

5. Результат представьте в виде доверительного интервала.

6. В заключении сделайте вывод о точности измерения управляющего сигнала.

## 6. Контрольные вопросы

1. Выведите уравнение результирующего колебания, получаемого при сложении одинаково направленных гармонических колебаний одинаковой частоты.
2. В чем заключается метод векторного сложения колебаний?
3. Исследуйте зависимость амплитуды результирующего колебания от разности фаз в случае одинаково направленных гармонических колебаний одинаковой частоты.
4. Что такое биения? Получите уравнение биений, каков их период? Объясните диаграмму биений.
5. Получите уравнение результирующего колебания для случая сложения двух взаимно перпендикулярных колебаний с равными частотами.
6. Рассмотрите частные случаи сложения двух взаимно перпендикулярных колебаний с равными частотами. Сделайте соответствующие рисунки.
7. Что такое кривые Лиссажу? Запишите уравнение кривых Лиссажу в параметрической форме. Объясните значение всех величин входящих в это уравнение.
8. Как определить отношение частот  $\frac{\nu_x}{\nu_y}$  по кривой Лиссажу?

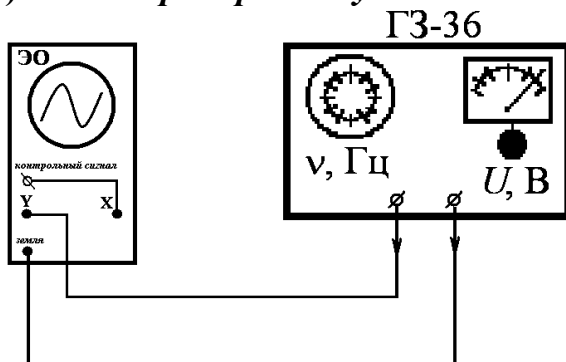
## 7. Протокол выполнения работы № 4-2

1) **Тема:** Изучение сложения гармонических электрических колебаний.

2) **Цель работы:**

1. Изучение сложения взаимно перпендикулярных гармонических колебаний при помощи осциллографа.
2. Определение частоты контрольного сигнала осциллографа при помощи фигур Лиссажу.

3) **Схема прибора или установки**



ГЗ-36 – генератор звука,  
ЭО – электронный осциллограф














4) **Таблица приборов**

| № п/п. | Наименование    | Тип   | Заводской № | Предел шкалы  | Цена деления | Класс точности |
|--------|-----------------|-------|-------------|---------------|--------------|----------------|
| 1      | Осциллограф     | ЭО-7  |             |               | 1 мм         | 0,5 мм         |
| 2      | Генератор звука | ГЗ-36 |             | 20 – 20000 Гц |              |                |

**5) Формулы расчета величин и их погрешностей:**

1)  $v_x = v_y \frac{N_y}{N_x}$ ; 2)  $\Delta v_x = t_{\alpha, n} \cdot \sqrt{\frac{\sum (\Delta v_{xi})^2}{n(n-1)}}$ , где  $t_{0,95;5} = 2,77$ ;  $\alpha = 0,95$ .

**6) Таблица измерений**

| $\frac{N_y}{\Gamma_{Ц}}$ | Вид фигур Лиссажу  |   |   |   |  | $\frac{N_y}{N_x}$ | $v_x, \Gamma_{Ц}$       | $\Delta v_{xi}, \Gamma_{Ц}$ | $\frac{(\Delta v_{xi})^2}{\Gamma_{Ц}^2}$ |
|--------------------------|--|---|---|---|--|-------------------|-------------------------|-----------------------------|--|
|                          |   |  |  |  |   |                   |                         |                             |  |
|                          |   |   |   |   |   |                   |                         |                             |  |
|                          |   |   |   |   |   |                   |                         |                             |  |
|                          |   |   |   |   |   |                   |                         |                             |  |
|                          |  |   |   |   |  |                   |                         |                             |  |
|                          |  |   |   |   |  |                   | $\langle v_x \rangle =$ |                             | $\sum (\Delta v_{xi})^2 =$               |

**7) Расчеты величин и их погрешностей:**

**8) Запись окончательных результатов:**

$$v_x = (\langle v_x \rangle \pm \Delta v_x)_\alpha = (\dots \pm \dots) \Gamma_{Ц}; \quad \delta_{v_x \%} = \frac{\Delta v_x}{\langle v_x \rangle} \cdot 100\% = \dots \%$$

**9) Вывод:**

**10) Работу выполнил:**

Работу проверил:

**Лабораторная работа № 4-3**  
**ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ ЗАТУХАЮЩИХ КОЛЕБАНИЙ**  
**ПРИ ПОМОЩИ ФИЗИЧЕСКОГО МАЯТНИКА**

**1. Цель работы:**

Изучение основных параметров и метода описания затухающих колебаний механических систем при помощи физического маятника.

**2. Основные понятия**

Реальные колебательные системы испытывают различные сопротивления, и через некоторое время прекращают колебательное движение, если для его поддержания не поступает энергия извне. *Затухающие колебания* – такой вид свободных колебаний, энергия которых уменьшается с течением времени.

Механическая энергия колеблющейся системы постепенно уменьшается, переходя в тепло, выделяющееся во внешнюю среду. Этот процесс называется *диссипацией энергии*, а такая система – *диссипативной*.

При колебательном движении реальной системы на нее одновременно действуют две силы:

- 1) возвращающая сила, сила упругости (квазиупругая сила), которая действует в естественных колебательных системах и определяется законом Гука (9)

$$F_{\text{воз}} = -k \cdot x,$$

- 2) сила сопротивления среды, которая, по закону Ньютона для малых скоростей, определяется по формуле:

$$F_{\text{соп}} = -r \cdot v, \quad (46)$$

где  $v$  – скорость движения маятника;  $r$  – коэффициент сопротивления. “Минус” в уравнении (46) показывает, что сила сопротивления всегда направлена противоположно направлению скорости.

Поскольку по второму закону Ньютона сумма всех сил действующих в системе равна произведению массы на ускорение, то для реальной диссипативной системы получим

$$ma = -kx - rv. \quad (47)$$

Поскольку механические колебания являются одним из разделов механики, основная задача которой состоит в определении положения тела в любой момент времени, нам необходимо записать уравнение зависимости координаты от времени. Поэтому, заменив скорость и ускорение в уравнении (47) скалярными значениями  $v = \frac{dx}{dt}$ ,  $a = \frac{d^2x}{dt^2}$ , и перенеся слагаемые в правую сторону, получим дифференциальное уравнение затухающих колебаний

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + r \frac{dx}{dt} + kx = 0, \quad (48)$$

где  $m$  – масса колеблющегося тела (или системы колеблющихся тел);  $x$  –

смещение тела от положения равновесия;  $k$  – коэффициент упругости (деформации системы). Разделив обе части уравнения (48) на  $m$  получим:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0, \quad (49)$$

где 
$$2\beta = \frac{r}{m}, \quad \omega_0^2 = \frac{k}{m}.$$

Решение этого дифференциального уравнения дает зависимость смещения  $x$  от времени  $t$ , которую называют уравнением затухающих колебаний в интегральной форме:

$$x(t) = A_0 \cdot e^{-\beta t} \cdot \cos(\omega t + \varphi_{01}) \text{ или } x(t) = A_0 \cdot e^{-\beta t} \cdot \sin(\omega t + \varphi_{02}), \quad (50)$$

где коэффициент затухания

$$\beta = \frac{r}{2m} \quad (51)$$

и циклическая (круговая) частота затухающих колебаний

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} \quad (52)$$

– основные параметры затухающих колебаний;  $\omega_0$  – циклическая частота собственных (незатухающих) колебаний этой системы;  $A_0 \cdot e^{-\beta t}$  – экспоненциально убывающая амплитуда затухающих колебаний;  $A_0$  – начальная амплитуда, определяемая энергией системы в момент времени  $t = 0$ .

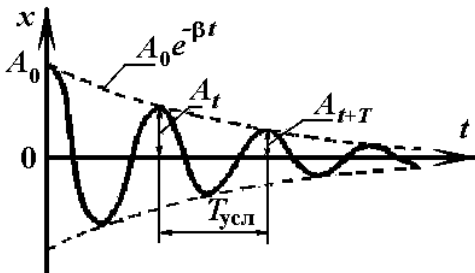


Рисунок 7 – График затухающих колебаний

На рис. 7 представлены зависимости амплитуды колебаний от времени (пунктирная линия) и смещения от времени (сплошная линия).

Затухающие колебания представляют собой **непериодические колебания**, так как в них никогда не повторяются характеризующие их значения физических величин (например, такие как смещение, скорость и ускорение).

Именно поэтому к ним неприменимы понятия периода и частоты в том смысле, как они введены для периодических (незатухающих) колебаний.

**Условным периодом**  $T_{\text{усл}}$  затухающих колебаний называется промежуток времени между двумя последовательными состояниями колеблющейся системы (рис. 7). Поскольку  $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$  и  $\omega = 2\pi/T$ , получим условный период колебаний

$$T_{\text{усл}} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}. \quad (53)$$

Период затухающих колебаний (53) больше периода собственных колебаний тела (системы)  $T_0 = 2\pi/\omega_0$ , т.е. колебаний, которые были бы в отсутствие сил трения.

В зависимости от величины коэффициента затухания, наблюдаются различные режимы колебательных систем (см. рис. 8):



а)  $\beta = 0$ , тогда  $r = 0$ ,  $T = 2\pi/\omega_0 = T_0$  – **незатухающие колебания**;

б)  $\beta < \omega_0$ , тогда  $\omega_0^2 - \beta^2 > 0$ ,  $T = 2\pi/\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} > T_0$  – **затухающие колебания** (почти периодические);

в)  $\beta = \omega_0$ , тогда  $\omega_0^2 - \beta^2 = 0$ ,  $T \rightarrow \infty$  – **апериодический** (критический) **режим** (колебания отсутствуют);

г)  $\beta > \omega_0$ , тогда  $\omega_0^2 - \beta^2 < 0$ ,  $T$  – мнимая величина – **суперапериодический режим**.

Основными характеристиками затухающих колебаний являются:

1. **Декремент затухания** – это отношение двух последующих амплитуд одного и того же знака, отстоящих друг от друга по времени на период

$$\varepsilon = \frac{A_t}{A_{t+T}} = \frac{A_0 e^{-\beta t}}{A_0 e^{-\beta(t+T)}} = e^{\beta T}. \quad (54)$$

2. В практических расчетах чаще используется **логарифмический декремент затухания**

$$\delta = \ln \varepsilon = \ln e^{\beta T} = \beta T. \quad (55)$$

Обозначив за  $\tau$  промежуток времени, за которое амплитуда колебаний уменьшается в  $e$  раз ( $e = 2,7183$  – основание натурального логарифма), можно записать

$$\frac{A_t}{A_{t+T}} = e^{\beta \tau} = e, \quad (56)$$

следовательно,  $\beta \tau = 1$  или

$$\beta = \frac{1}{\tau}. \quad (57)$$

Таким образом, коэффициент затухания  $\beta$  – **величина, обратная времени  $\tau$ , в течение которого амплитуда колебаний уменьшается в  $e$  раз (физический смысл  $\beta$ )**. За время  $\tau$  система успевает совершить  $N_e = \frac{\tau}{T}$  – колебаний, поэтому

$$\delta = \beta T = \frac{1}{\tau} \cdot \frac{\tau}{N_e} = \frac{1}{N_e}. \quad (58)$$

Следовательно, **логарифмический декремент затухания – величина обратная числу колебаний, совершаемых за время, в течение которого амплитуда колебаний уменьшается в  $e$  раз (физический смысл  $\delta$ )**.

3. Для характеристики колебаний часто используется величина называемая **добротностью колебательной системы**

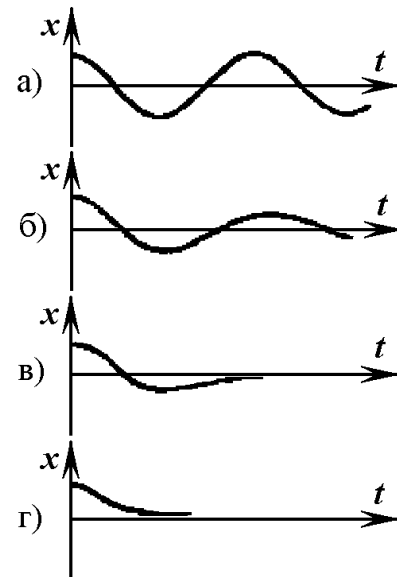


Рисунок 8 – Различные режимы в колебательных системах

$$Q = \frac{\pi}{\delta} = \pi N_e \quad \text{или} \quad Q = \frac{\pi}{\delta} = \frac{\pi}{\beta \cdot T} = \frac{\pi \cdot \omega}{\beta \cdot 2\pi} = \frac{\omega}{2\beta}. \quad (59)$$

Видно, что **добротность пропорциональна числу колебаний  $N_e$ , совершаемых системой за время  $\tau$ , за которое амплитуда уменьшается в  $e$  раз (физический смысл  $Q$ ).**

В практических расчетах при малых затуханиях обычно считают  $\delta = \beta T_0$ , где  $T_0$  – период незатухающих колебаний той же системы. Тогда можно считать, что

$$Q = \frac{\omega_0}{2\beta}.$$

Чем больше добротность, тем меньше затухание в системе.

### 3. Описание установки и методика измерения

**Приборы:** физический маятник с тормозящим движением устройством, секундомер, миллиметровая линейка.

Колебательной системой в данной работе служит физический маятник 1 (используемый в лабораторной работе № 4-1) с пластинкой 3, крепящейся посредством подвижной муфты 2 (рис. 9). Муфта дает возможность закреплять пластинку в любом месте стержня маятника и под любым углом к плоскости колебаний. Меняя угол между плоскостью колебаний и плоскостью пластинки, можно создавать различную величину силы трения между колеблющейся системой и воздухом. Свободный конец маятника заканчивается острием 4, с помощью которого измеряется величина амплитуды колебаний.

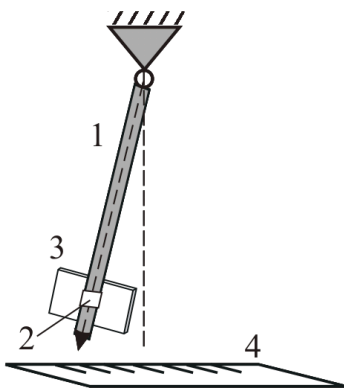


Рисунок 9 – Физический маятник с затуханием.

- 1 – физический маятник;
- 2 – подвижная муфта;
- 3 – пластинка;
- 4 – линейка.

Когда маятник не приведен в движение, под острие помещают линейку, совмещая нуль с острием маятника. Расстояние между острием и шкалой не должно превышать 1...2 мм.

В этой работе мы с помощью секундомера измеряем время  $\tau$ , в течение которого амплитуда уменьшается в  $e = 2,7$  раз, и считаем число колебаний, совершенных системой за это время.

### 4. Статистическая обработка результатов измерений

Проводится аналогично тому, как показано в лабораторной работе № 4-1.

## 5. Порядок выполнения работы и обработка результатов измерения

1. Запишите массу маятника (она задана на металлическом стержне). Измерьте длину маятника с помощью линейки один раз, но с высокой точностью. Приборная точность – 0,001 м.

2. Установите пластинку 3 (рис. 9) на произвольную высоту, таким образом, чтобы плоскость пластинки составляла с плоскостью колебаний маятника  $90^\circ$  (с доступной вам точностью).

3. Вызовите колебания маятника, путем отклонения его на 70...80 мм от положения равновесия по шкале горизонтально лежащей линейки.

4. Дождитесь, пока отклонение маятника будет равно 54 мм и включите секундомер. Считая полные колебания маятника  $N_e$ , выключить секундомер, когда амплитуда колебаний будет 20 мм, т.е. уменьшится в  $e$  раз. Запишите показание времени затухания  $\tau$  и измеренное число колебаний  $N_e$  в таблицу измерений.

5. С помощью отношения  $T = \tau / N_e$  определите период затухающих колебаний. Запишите полученное значение в таблицу измерений.

Повторите эти прямые измерения пять раз.

6. Определите средние значения времени затухания, числа колебаний и условного периода (24), отклонения условного периода от его среднего значения (25), сумму квадратов отклонений (26), абсолютную (29) и относительную (30) погрешности периода колебаний. Запишите конечный результат прямых измерений периода в виде, как показано в (31).

7. Определите циклическую частоту  $\omega$  согласно (7) и коэффициент затухания из (57).

8. В окончательных результатах запишите уравнение смещения для затухающих колебаний физического маятника (см. формулу (50)) с числовыми коэффициентами  $A_0$ ,  $\beta$ ,  $\omega$  (начальная фаза  $\varphi_0$  равна 0).

9. Вычислите логарифмический декремент затухания согласно (58) и добротность колебательной системы согласно (59). Запишите их значения в окончательных результатах.

## 6. Контрольные вопросы

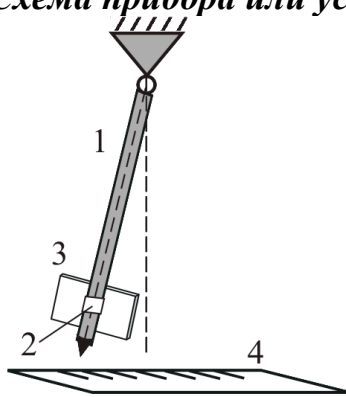
1. Какие механические системы мы называем диссипативными?
2. Какие колебания называются затухающими? Являются ли они периодическими? Почему?
3. Чему равен период затухающих колебаний?
4. Как описываются механические затухающие колебания (дифференциальное уравнение)?
5. Выведите дифференциальное уравнение для механических затухающих колебаний.
6. Запишите уравнение для затухающих колебаний в интегральной форме и объясните значения физических величин в нем.

7. Объясните физический смысл декремента затухания. Что такое время затухания? Как величина декремента затухания влияет на условный период?
8. Что такое логарифмический декремент затухания, его физический смысл?
9. Что такое добротность, ее физический смысл?

### 7. Протокол выполнения лабораторной работы № 4-3

- 1) **Тема:** Определение параметров затухающих колебаний при помощи физического маятника.
- 2) **Цель работы:** Изучение основных параметров и метода описания затухающих колебаний механических систем.

#### 3) Схема прибора или установки



- 1 – физический маятник;
- 2 – подвижная муфта;
- 3 – пластина;
- 4 – линейка.

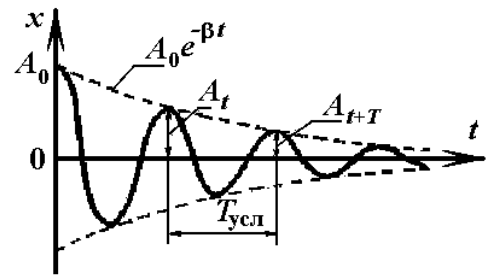


График затухающих колебаний

#### 4) Таблица приборов

| № п/п. | Наименование | Тип    | Заводской № | Предел шкалы | Цена деления | Класс точности |
|--------|--------------|--------|-------------|--------------|--------------|----------------|
| 1      | Секундомер   | УХЛ-42 |             | 99,99 с      | 0,01 с       | 0,01 с         |
| 2      | Линейка      | У      | –           | 1000 мм      | 1 мм         | 1мм            |

#### 5) Формулы расчета величин и их погрешностей:

- 1)  $A_0/A_T = e$ , где  $A_0 = 54$  мм,  $A_T = 20$  мм;
- 2)  $\Delta T = t_{\alpha,n} \cdot \sqrt{\frac{\sum (\Delta T_i)^2}{n(n-1)}}$ , где  $t_{0,95;5} = 2,77$ ,  $\alpha = 0,95$ ;
- 3)  $\langle \beta \rangle = 1/\langle \tau \rangle$ ; 4)  $\langle \delta \rangle = \langle \beta \rangle \cdot \langle T \rangle$ ; 5)  $\langle \omega \rangle = 2\pi/\langle T \rangle$ ; 6)  $\langle Q \rangle = \pi \cdot \langle N_e \rangle$ ;
- 7)  $x = A_0 e^{-\beta \cdot t} \cos \langle \omega \rangle t$ .

#### 6) Таблица измерений

| № | $\tau_i, c$              | $N_{ei}$                | $T_i, c$              | $\Delta T_i, c$ | $(\Delta T_i)^2, c^2$   |
|---|--------------------------|-------------------------|-----------------------|-----------------|-------------------------|
| 1 |                          |                         |                       |                 |                         |
| 2 |                          |                         |                       |                 |                         |
| 3 |                          |                         |                       |                 |                         |
| 4 |                          |                         |                       |                 |                         |
| 5 |                          |                         |                       |                 |                         |
|   | $\langle \tau \rangle =$ | $\langle N_e \rangle =$ | $\langle T \rangle =$ |                 | $\sum (\Delta T_i)^2 =$ |

**7) Расчеты величин и их погрешностей:**

- 1)  $\Delta T = \dots$  с; 2)  $\langle T \rangle = \dots$  с; 3)  $\langle \beta \rangle = \dots$  с<sup>-1</sup>;  
 4)  $\langle \delta \rangle = \dots$  ; 5)  $\langle \omega \rangle = \dots$  рад/с; 6)  $\langle Q \rangle = \dots$  ;

**8) Запись окончательных результатов:**

1)  $T = (\langle T \rangle \pm \Delta T)_\alpha$  с; 2)  $\delta_{T\%} = \frac{\Delta T}{\langle T \rangle} \cdot 100\%$ ;

2)  $x = A_0 e^{-\beta t} \cos \langle \omega \rangle t$  м;

3)  $\langle \beta \rangle = \dots$  с<sup>-1</sup>;

4)  $\langle \delta \rangle = \dots$  ;

5)  $\langle Q \rangle = \dots$  .

**9) Вывод:**

10) Работу выполнил:

Работу проверил:

## Лабораторная работа № 4 - 4

### ИССЛЕДОВАНИЕ ЗАТУХАЮЩИХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ

#### 1. Цель работы:

1.1 Ознакомление с процессами, происходящими в идеальном колебательном контуре и методом их описания.

1.2 Ознакомление с процессами, происходящими в реальном колебательном контуре, методом их описания, а также измерение физических величин, характеризующих электрические колебания, определение параметров контура.

#### 2. Основные понятия

##### 2.1. Идеальный колебательный контур

Аналогично описанию механических колебаний (см. работу № 4-1), рассмотрим, как происходят электрические колебания в колебательном контуре, который состоит из катушки индуктивности  $L$ , активным сопротивлением  $R$  которой можно пренебречь, и конденсатора емкости  $C$  (рис. 10).

Для возбуждения в контуре колебаний конденсатор предварительно заряжают, сообщая его обкладкам заряд  $q_0$ . Тогда в начальный момент времени он начнет разряжаться и в контуре потечет нарастающий со временем ток  $i$ . Энергия электрического поля конденсатора  $W_{\text{э}} = \frac{Cu_c^2}{2} = \frac{q_0^2}{2C}$

начнет уменьшаться, а энергия магнитного поля катушки индуктивности

$W_{\text{м}} = \frac{Li^2}{2}$  будет расти. Так как  $R \approx 0$ , то полная энергия контура не изменяется,

а электрическая энергия поля конденсатора полностью переходит в энергию магнитного поля катушки индуктивности. С этого момента ток в контуре будет убывать, следовательно, начнет ослабевать магнитное поле катушки, и в ней начнет индуцироваться ток, который течет (согласно правилу Ленца) в том же направлении, что и ток разрядки конденсатора. Конденсатор начнет перезаряжаться, возникнет электрическое поле, стремящееся ослабить ток, который, в конце концов, обратится в нуль, а заряд на обкладках конденсатора достигнет начального значения  $q_0$ . Энергия магнитного поля катушки индуктивности полностью переходит в энергию электрического поля конденсатора (конденсатор перезарядился). Затем те же процессы протекают в обратном направлении.

Видно, что в ходе рассмотренного процесса такие величины, как заряд  $q$  на пластинах конденсатора, разница потенциалов (напряжение)  $u_c$  между пластинами конденсатора и величина тока  $i$ , протекающего через индуктивность, совершают периодические колебания.

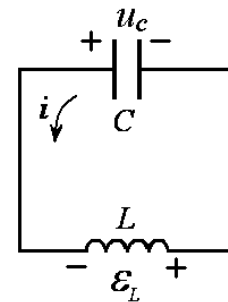


Рисунок 10 – Идеальный колебательный контур

Для описания электромагнитных колебаний используем второй закон Кирхгофа (сума падений напряжений в любом замкнутом контуре равна сумме ЭДС в нем), тогда в нашем случае:

$$u_C = \mathcal{E}_L. \quad (60)$$

Во время собственных электрических колебаний напряжение на конденсаторе  $u_C = \frac{q}{C}$  равно ЭДС самоиндукции  $\mathcal{E}_L = -L \frac{di}{dt}$  в контуре, знак минус показывает, что индукционный ток направлен противоположно току разряда конденсатора.

Считая колебания в контуре квазистационарными, получим

$$L \frac{di}{dt} + \frac{q}{C} = 0; \quad L \frac{d^2q}{dt^2} + \frac{q}{C} = 0 \quad \text{или} \quad \frac{d^2q}{dt^2} + \frac{1}{LC}q = 0, \quad (61)$$

где  $\frac{di}{dt} = \frac{d^2q}{dt^2}$ , так как  $i = \frac{dq}{dt}$ . Учитывая, что  $\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}$  – циклическая (круговая) частота собственных колебаний контура, **дифференциальное уравнение колебания заряда в контуре** можно представить в виде

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \omega_0^2 q = 0 \quad \text{или} \quad \ddot{q} + \omega_0^2 q = 0. \quad (62)$$

Сравнивая уравнения (62) и (13) можно заметить, что между механическими и электрическими колебаниями существует глубокая аналогия:

| механические колебания  | электрические колебания  | механические колебания | электрические колебания |
|-------------------------|--------------------------|------------------------|-------------------------|
| $x$                     | $q$                      | $T_0 = 2\pi\sqrt{m/k}$ | $T_0 = 2\pi\sqrt{LC}$   |
| $k$                     | $1/C$                    | $v = dx/dt$            | $i = dq/dt$             |
| $m$                     | $L$                      | $W_K = mv^2/2$         | $W_M = Li^2/2$          |
| $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ | $\omega_0 = \sqrt{1/LC}$ | $W_{\Pi} = kx^2/2$     | $W_{\Sigma} = Cu_c^2/2$ |

Решение дифференциального уравнения (62) аналогично решению уравнения (13). Решением является гармоническое колебание, имеющее вид

$$q = q_0 \cdot \cos(\omega_0 t + \varphi_0). \quad (63)$$

Это уравнение называется **уравнением колебаний заряда в интегральной форме**.

Для периода колебаний получается так называемая **формула Томсона**:

$$T_0 = 2\pi\sqrt{LC}. \quad (64)$$

Напряжение на емкости отличается от заряда на множитель  $1/C$ :

$$u_C = \frac{q}{C} = \frac{q_0}{C} \cos(\omega_0 t + \varphi_0) = u_{C0} \cos(\omega_0 t + \varphi_0). \quad (65)$$

Продифференцировав уравнение (63) по времени, получим закон изменения величины тока в контуре

$$i = \frac{dq}{dt} = -\omega_0 q_0 \cdot \sin(\omega_0 t + \varphi_0) = -i_0 \cdot \sin(\omega_0 t + \varphi_0) = i_0 \cdot \cos\left(\omega_0 t + \varphi_0 + \frac{\pi}{2}\right), \quad (66)$$

Из (65) и (66) вытекает, что  $u_{C0} = q_0/C$  и  $i_0 = \omega_0 q_0$ , и с учетом того, что  $\omega_0 = \sqrt{1/LC}$ , получим связь между напряжением на емкости и током в контуре:

$$u_{C0} = i_0 \sqrt{L/C}. \quad (67)$$

Величина  $\sqrt{L/C}$  называется волновым сопротивлением контура и характеризует качество преобразования энергии электрического поля в энергию магнитного поля и наоборот.

## 2.2. Реальный колебательный контур

Реальный колебательный контур обладает сопротивлением, характеризующим потери энергии в катушке индуктивности и соединительных проводах (рис. 11). **Свободные колебания в контуре**, содержащем емкость  $C$ , индуктивность  $L$  и активное сопротивление  $R$ , **могут возникнуть при разных начальных условиях**:

- а) цепь контура замкнута после зарядки конденсатора;
- б) цепь контура замкнута и, за счет внешних воздействий, в катушке индуктивности  $L$  наводится ЭДС;
- в) цепь контура замкнута на предварительно заряженный конденсатор в момент, когда в катушке индуктивности наведена ЭДС.

Начальные условия, при которых возникают свободные колебания, определяют начальную фазу процесса и амплитуду колебаний. Характер протекания процесса колебаний будет зависеть от свойств конкретно заданного контура.

Процесс свободных колебаний в реальном контуре заключается в циклической перезарядке конденсатора и протекании переменного тока в цепи контура. При этих колебаниях электрическая энергия поля заряженного конденсатора и энергия магнитного поля тока, протекающего в контуре, поочередно переходят друг в друга.

В результате наличия в реальном контуре активного сопротивления первоначальный запас энергии системы расходуется на выделение тепла в проводах, составляющих контур (см. закон Джоуля-Ленца). Поэтому колебания, возникающие в реальном контуре, не являются вполне периодическими. Амплитуда напряжения на конденсаторе (величина заряда и тока в цепи контура) после каждой его перезарядки становится все меньше.

Падение напряжения на активном сопротивлении контура

$$u_R = i \cdot R, \quad (68)$$

где величина тока  $i$  в контуре связана с зарядом  $q$  и напряжением  $U_C$  на конденсаторе соотношением

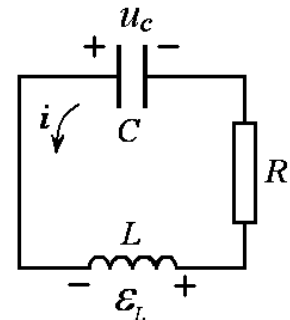


Рисунок 11 – Реальный колебательный контур



$$i = \frac{dq}{dt} = [dq = C \cdot du_C] = C \frac{du_C}{dt}, \quad (69)$$

а  $u_C = q/C$  – разность потенциалов на обкладках конденсатора.

Изменение величины тока в контуре вызывает электродвижущую силу самоиндукции в индуктивности  $L$ , равную

$$\mathcal{E}_L = -L \frac{di}{dt} = \left[ \frac{di}{dt} = \frac{d^2q}{dt^2} = C \frac{d^2u_C}{dt^2} \right] = -LC \frac{d^2u_C}{dt^2}. \quad (70)$$

Применив второй закон Кирхгофа (смотри выше) и, считая колебания квазистационарными, получим:

$$u_R + u_C = \mathcal{E}_L. \quad (71)$$

Подставив значения  $u_R$ ,  $u_C$  и  $\mathcal{E}_L$  из (68), (69) и (70) в (71), получим дифференциальное уравнение свободных (затухающих) колебаний в реальном контуре, состоящем из катушки индуктивностью  $L$  и конденсатора емкостью  $C$ , соединенных между собой проводниками сопротивлением  $R$ :

$$R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = -L \frac{d^2q}{dt^2} \quad \text{или} \quad L \frac{d^2q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = 0. \quad (72)$$

Разделив (72) на  $L$  получим **дифференциальное уравнение затухающих электрических колебаний** в виде

$$\frac{d^2q}{dt^2} + 2\beta \frac{dq}{dt} + \omega_0^2 q = 0. \quad (73)$$

Решением этого уравнение есть **уравнение затухающих электрических колебаний в интегральной форме**

$$q = q_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi_1) \quad \text{или} \quad q = q_0 e^{-\beta t} \sin(\omega t + \varphi_2), \quad (74)$$

где  $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{LC}\right) - \left(\frac{R}{2L}\right)^2}$  – циклическая (круговая) частота

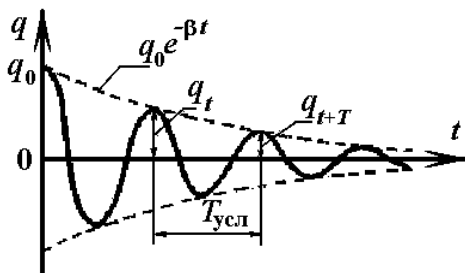


Рисунок 12 – Затухающие электрические колебания

затухающих колебаний;  $\beta = \frac{R}{2L}$  –

коэффициент затухания;  $\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}$  – частота

собственных колебаний в контуре;  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  –

начальные фазы колебаний;  $q = q_0 e^{-\beta t}$  –

амплитуда затухающих колебаний;  $q_0$  – начальная амплитуда колебаний.

На рис. 12 пунктиром показана зависимость изменения амплитуды заряда от времени, а сплошной линией – зависимость заряда от времени. Промежуток времени между двумя ближайшими точками отклонений сплошной линией, которые находятся в одной фазе, называется **период затухающих колебаний**. Как видно из формулы периода затухающих колебаний (условного периода)  $T_{усл} = 2\pi / \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$ , он

больше периода  $T_0 = 2\pi/\omega_0 = 2\pi\sqrt{LC}$  незатухающих колебаний в контуре, которые были бы при отсутствии активного сопротивления.

По аналогии с механическими затухающими колебаниями (лабораторная работа № 4-3), для характеристики быстроты затухания колебаний в контуре, вводится понятие **декремента затухания**

$$\varepsilon = \frac{q_t}{q_{t+T}} = \frac{q_0 e^{-\beta t}}{q_0 e^{-\beta(t+T)}} = \frac{q_0 e^{-\beta t}}{q_0 e^{-\beta t} e^{-\beta T}} = e^{\beta T}.$$

Натуральный логарифм декремента затухания называют **логарифмическим декрементом затухания**, согласно (55) получим

$$\delta = \ln \varepsilon = \ln e^{\beta T} = \beta T.$$

Из (58) видно, что  $\delta$  величина обратная числу колебаний  $N_e$ , совершаемых колеблющейся величиной за время релаксации  $\tau$  (**физический смысл**  $\delta$ ).

**Добротность колебательной системы**, по аналогии с (59)

$$Q = \frac{\pi}{\delta} = \frac{\omega}{2\beta} = \frac{1}{2\sqrt{LC}} \frac{2L}{R} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}.$$

Режимы колебания физических величин ( $q$ ,  $U$ ,  $i$ ) в контуре, в зависимости от величины коэффициента затухания, аналогичны рассмотренным в работе №4-3. Поэтому все выводы, сделанные для механических колеблющихся систем, в пределах аналогии можно применить и к электрическим процессам в колебательных контурах.

Следует отметить, что апериодический режим в колебательном контуре наступает, когда сопротивление контура  $R$  будет равно критической величине

$$R_k = 2\sqrt{\frac{L}{C}}. \quad (75)$$

### 3. Описание установки и методика измерения

Затухающие электрические колебания создаются в реальном колебательном контуре, с последовательно соединенными резистором сопротивления  $R$ , катушкой индуктивности  $L$  и конденсатором емкости  $C$ , при помощи импульсных периодических зарядов конденсатора (рис. 13). Осуществляется такая зарядка конденсатора с помощью генератора П-образных импульсов (ГПИ). Время длительности одного импульса должно быть гораздо меньше времени поступления следующего. Таким образом, емкость, получив заряд за время импульса, успевает несколько раз перезарядиться, вызывая, этим самым затухающие колебания в контуре, пока не придет следующий импульс и все повторяется сначала.

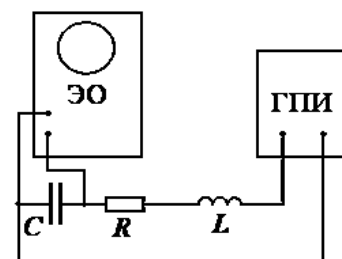


Рисунок 13 – Схема установки

Если частота развертки электронного луча осциллографа совпадает с частотой следования П-импульсов, то на экране осциллографа будет неподвижное изображение “цуга” затухающих колебаний (см. рис.12).

При помощи масштабной сетки на экране осциллографа можно измерить амплитудные значения происходящих колебаний в делениях сетки (в мм), так как напряжение, подаваемое на осциллограф, прямо пропорционально смещению луча на экране вдоль вертикали. А это значит, что, при вычислении логарифмического декремента затухания учитывая (54) и (55), можно записать:

$$\delta = \ln(\varepsilon) = \frac{u_t}{u_{t+T}} = \frac{A_t}{A_{t+T}} \quad \text{или} \quad \delta = \frac{\ln(A_1/A_n)}{n-1}, \quad (76)$$

где  $n-1$  – количество периодов от амплитуды  $A_1$  до амплитуды  $A_n$ .

Условный период затухающих колебаний можно определить, сравнивая изображение “цуга” затухающих колебаний с незатухающими колебаниями известной частоты. Очевидно, что за частоту затухающих колебаний  $\nu$  можно взять частоту незатухающих  $\nu_0$ . Для этого, на экране осциллографа нужно замерить число  $n$  периодов “цуга”, а затем подать напряжение от генератора ГЗ-36 незатухающих колебаний, подобрав ее частоту так, чтобы на экране вместились такое же число периодов  $n$  уже незатухающих колебаний.

Так, измеряя  $A_1$ ,  $A_n$  и  $n$  с помощью сетки осциллографа, мы можем определить логарифмический декремент затухания по формуле (76).

#### 4. Статистическая обработка результатов измерений

Проводится аналогично тому, как показано в лабораторной работе № 4-1.

#### 5. Порядок выполнения работы и обработка результатов измерения

1. Включите осциллограф и генератор П-импульсов (ГПИ). Подождите пять минут, пока они не прогреются.

2. Из набора емкостей, индуктивностей и на магазине сопротивления установите определенные значения  $C$ ,  $L$  и  $R$ .

3. Ручками осциллографа “Диапазон частот”, “Частота плавно”, “Усиление  $Y$ ” и “Усиление  $X$ ”, достигают устойчивого изображения “цуга” затухающего колебания (один “цуг” на экране осциллографа). **Положение ручек управления осциллографа в дальнейшем не менять.**

4. Измерьте значение первой амплитуды  $A_1$  и  $n$ -й амплитуды  $A_n$  с помощью масштабной сетки экрана и запишите его в таблице измерений.

5. Измерьте расстояние  $l$  (в миллиметрах) между  $A_1$  и  $A_n$  с помощью масштабной сетки экрана и запишите его в таблице измерений. Отключите осциллограф от ГПИ.

6. Включите генератор синусоидальных сигналов ГЗ-36 и, после нагревания, подайте с него напряжение на  $Y$  – вход осциллографа, которое не превышает (в мм сетки экрана)  $A_1$ . Величину амплитуды незатухающих колебаний регулируют ручкой “Напряжение” на генераторе.

7. Изменяя частоту генератора сигналов ГЗ-36 рукояткой “*Множитель частот*” и вращая лимб отсчета частоты, добейтесь совпадения количества периодов  $T_0$  незатухающих колебаний с количеством периодов  $T$  затухающих колебаний на длине “цуга”  $l$ . Сделать отсчет полученной частоты  $\nu = \nu_0$  по лимбу генератора и записать это значение в таблице измерений как  $\nu_{\text{ген}}$ .

8. Измерьте выходное напряжение генератора  $U_{\text{ген}}$  и напишите его значение в таблице измерений.

9. Вычислите логарифмический декремент затухания.

10. Вычислите коэффициент затухания  $\beta$ .

11. Вычислите индуктивность контура  $L$ .

12. Определите критическое сопротивление контура  $R_k$ .

13. Определите добротность контура  $Q$ .

14. Напишите уравнение затухающих колебаний с числовыми коэффициентами, взяв произвольную начальную фазу.

## 6. Контрольные вопросы

1. Что называется идеальным колебательным контуром? Получите дифференциальное уравнение незатухающих колебаний заряда в этой цепи. Напишите его решение.

2. Получите соотношение между амплитудными значениями тока в цепи и напряжения на конденсаторе. Что такое волновое сопротивление?

3. Что называется реальным колебательным контуром? Каковы причины для уменьшения амплитуды свободных колебаний в таком контуре?

4. Получите дифференциальное уравнение затухающих колебаний заряда в этой цепи. Напишите его решение. Объясните значение всех физических величин, которые находятся в уравнениях.

5. Каков период затухающих колебаний? От чего он зависит?

6. Какие параметры характеризуют затухающие колебания? Объясните физический смысл каждого из них.

7. При каких условиях колебания в цепи будут аperiodическими?

## 7. Протокол выполнения лабораторной работы № 4-4

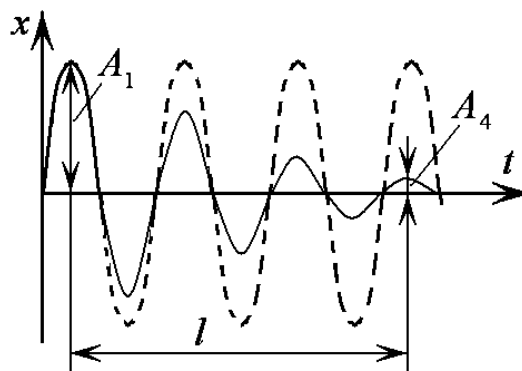
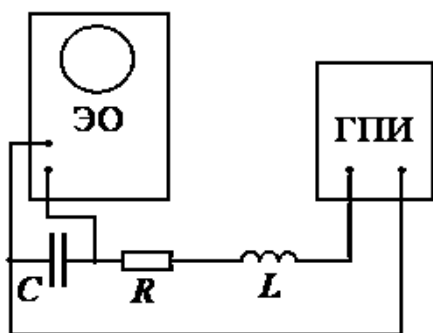
1) **Тема:** Исследование затухающих электрических колебаний.

2) **Цель работы:**

1. Ознакомление с процессами, происходящими в электрическом колебательном контуре и методом их описания.

2. Измерение физических величин, характеризующих электрические затухающие колебания, и параметров контура.

3) **Схема прибора или установки**



#### 4) Таблица приборов

| № п/п. | Наименование    | Тип   | Заводской № | Предел шкалы  | Цена деления | Класс точности |
|--------|-----------------|-------|-------------|---------------|--------------|----------------|
| 1      | Осциллограф     | ЭО-7  |             |               | 1 мм         | 1 мм           |
| 2      | Генератор звука | ГЗ-36 |             | 20 – 20000 Гц |              |                |

#### 5) Формулы расчета величин и их погрешностей:

$$1) \delta = \frac{\ln(A_1/A_n)}{n-1}; \quad 2) Q = \frac{\pi}{\delta}; \quad 3) \beta = \frac{\delta}{T} = \delta \cdot \nu_{\text{ген}}; \quad 4) \omega = 2\pi\nu_{\text{ген}};$$

$$5) \omega_0 = \sqrt{\omega^2 + \beta^2}; \quad 6) L = \frac{1}{\omega_0^2 C}; \quad 7) U_0 = U_{\text{ген}} \sqrt{2}; \quad 8) R_{\text{к}} = 2\sqrt{\frac{L}{C}}; \quad 9) R = 2\beta L;$$

$$10) u = u_0 e^{-\beta t} \cos \omega t.$$

( $\nu_{\text{ген}}$  подбираем на ГЗ-36 таким образом, чтобы на длине  $l$  уложилось столько пиков синусоиды, сколько укладывалось пиков ( $n$ ) затухающих колебаний.  $U_{\text{ген}}$  выбираем по шкале ГЗ-36 и регулируем таким образом, чтобы амплитуда пиков на осциллографе была равна амплитуде  $A_1$ ).

#### 6) Таблица измерений

| $A_1$ , мм | $A_n$ , мм | $l$ , мм | $n$ | $U_{\text{ген}}$ , В | $C$ , Ф | $\nu_{\text{ген}}$ , Гц |
|------------|------------|----------|-----|----------------------|---------|-------------------------|
|            |            |          |     |                      |         |                         |

#### 7) Расчеты величин и их погрешностей:

#### 8) Запись окончательных результатов:

$$1) \delta = \quad ; \quad 2) Q = \quad ; \quad 3) \beta = \quad \text{с}^{-1}; \quad 4) \omega = \quad \text{рад/с}^{-1}; \quad 5) \omega_0 = \quad \text{рад/с}^{-1};$$

$$6) L = \quad \text{Гн}; \quad 7) R_{\text{к}} = \quad \text{кОм}; \quad 8) R = \quad \text{кОм}; \quad 9) u = u_0 e^{-\beta t} \cos \omega t \text{ В.}$$

#### 9) Вывод:

10) Работу выполнил:

Работу проверил:

**Лабораторная работа № 4-5**  
**ИССЛЕДОВАНИЕ ВЫНУЖДЕННЫХ МЕХАНИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ**  
**МЕХАНИЧЕСКИЙ РЕЗОНАНС**

**1. Цель работы:**

Изучение вынужденных механических колебаний, явления резонанса и причин, при которых это явление наступает.

**2. Основные понятия**

По результатам лабораторной работы № 4-3 видно, что если механическая система предоставлена сама себе (совершает свободные колебания), то амплитуда таких колебаний со временем убывает. Энергия системы рассеивается, превращаясь в тепловую. Убыль механической энергии происходит в результате действия различных сил сопротивления. Компенсировать уменьшение энергии можно, действуя на колеблющуюся систему внешней периодической силой (силами), совершая над системой некоторую положительную работу.

Пусть внешняя сила, действующая на систему, изменяется по периодическому закону

$$F_{\text{вн}} = F_0 \cos \Omega t,$$

где  $F_0$  – амплитудное значение силы;  $\Omega$  – ее циклическая частота. В системе, на которую действует такая сила, могут установиться вынужденные колебания.

**Вынужденными колебаниями** называют незатухающие колебания системы, которые вызываются действием на нее внешней силы (сил)  $F(t)$ , периодически изменяющейся со временем. Сила  $F(t)$ , вызывающая вынужденные колебания называется **вынуждающей силой**.

Для описания вынужденных колебаний составим дифференциальное уравнение этого движения. Очевидно, на систему будут действовать силы:

- 1) возвращающая упругая (упругости), выражаемая законом Гука  $F_{\text{воз}} = -kx$ , где  $k$  – коэффициент упругости;
- 2) сопротивления движению, которая при малых колебаниях пропорциональна скорости  $F_{\text{соп}} = -rv$ , где  $r$  – коэффициент сопротивления;
- 3) внешняя вынуждающая периодическая сила  $F_{\text{вн}} = F_0 \cos \Omega t$ .

По закону Ньютона сумма этих сил равна силе инерции  $F = ma$ . Тогда для вынужденных колебаний получим уравнение:

$$F_{\text{воз}} + F_{\text{соп}} + F_{\text{вн}} = ma;$$

выразив скорость  $v = dx/dt$  и ускорение  $a = d^2x/dt^2$  через смещение, получим

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + r \frac{dx}{dt} + kx = F_0 \cos \Omega t. \quad (77)$$

Разделив обе части этого уравнения на  $m$ , получим неоднородное линейное

**дифференциальное уравнение** (второго порядка) **механических вынужденных колебаний**

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \cos \Omega t, \quad (78)$$

где  $\beta = r/2m$  – коэффициент затухания,  $\omega_0 = \sqrt{k/m}$  – собственная циклическая частота колебательной системы. Решение уравнения (78) имеет вид

$$x = A_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi) + A \cos(\Omega t + \Phi). \quad (79)$$

Первое слагаемое в (79) представляет собой общее решение однородного уравнения, которое с течением времени превращается в нуль, т.е. собственные затухающие колебания системы с частотой  $\omega$  довольно быстро затухнут. Что же касается второго слагаемого, то оно представляет собой установившиеся вынужденные колебания, частота которых должна совпадать с частотой  $\Omega$  вынуждающей силы  $F_{\text{вн}}$ . Амплитуда вынужденных колебаний  $A$  должна быть постоянной, поскольку амплитуда вынуждающей силы  $F_0$  не меняется со временем. Поэтому, пренебрегая собственными колебаниями системы, играющими существенную роль лишь в самом начале процесса, считаем решением уравнения (78)

$$x = A \cos(\Omega t + \Phi). \quad (80)$$

Это **уравнение вынужденных механических колебаний в интегральной форме**, где  $A$  – амплитуда установившихся колебаний,  $\Phi$  – сдвиг фаз между вынуждающей и возвращающей силами.

Определим амплитуду  $A$  и сдвиг фаз  $\Phi$ , для этого продифференцируем выражение (80) дважды по времени и подставим эти производные в уравнение (78):

$$A\Omega^2 \cos(\Omega t + \Phi + \pi) + 2A\beta\Omega \cos\left(\Omega t + \Phi + \frac{\pi}{2}\right) + A\omega_0^2 \cos(\Omega t + \Phi) = \frac{F_0}{m} \cos \Omega t. \quad (81)$$

Из уравнения (81) видно, что гармоническое колебание  $\frac{F_0}{m} \cos \Omega t$  является суммой трех гармонических колебаний с амплитудами соответственно:  $A\Omega^2$ ;  $2A\beta\Omega$  и  $A\omega_0^2$  той же частоты  $\Omega$ .

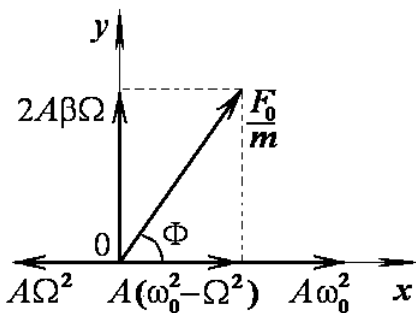


Рисунок 14 – Векторная диаграмма вынужденных механических колебаний

Воспользовавшись векторной диаграммой, изобразим колебания в виде векторов длиной, равной амплитудным значениям, и, учитывая разность фаз между ними, отложим векторы в прямоугольной системе координат. Отложим вектор  $A\omega_0^2$  (амплитуда третьего колебания) вдоль оси  $x$ , тогда, как видно из уравнения (81), вектор  $2A\beta\Omega$  (амплитуда второго колебания) будет направлен перпендикулярно третьему (колебания отличаются по фазе на  $\pi/2$ ), а вектор  $A\Omega^2$  повернут на угол  $\pi$ , так как первое слагаемое колебание находится в противофазе с третьим (рис. 14). Сложив эти

векторы, получим результирующий вектор  $F_0/m$ , который и представляет собой суммарное колебание.

Из рисунка 14 следует, что

$$A^2(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4A^2\beta^2\Omega^2 = \frac{F_0^2}{m^2}, \quad \text{откуда} \quad A = \frac{F_0}{m\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\beta^2\Omega^2}}. \quad (82)$$

Как видно, амплитуда вынужденных колебаний не зависит от времени. Сдвиг фаз  $\Phi$  между результирующим колебанием и обусловившей его вынуждающей силой определяется из рисунка 14, и равен

$$\operatorname{tg}\Phi = \frac{2\beta\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}. \quad (83)$$

Проанализируем формулу (82). Из нее видно, что амплитуда вынужденных колебаний зависит от многих факторов, в частности от соотношения собственной частоты системы  $\omega_0$  и частоты вынуждающей силы  $\Omega$ . Независимо от того, какая из этих частот больше, выражение  $(\omega_0^2 - \Omega^2)^2$  всегда будет величиной положительной. В зависимости от абсолютного значения этой величины, амплитуда будет принимать большее или меньшее значение.

Амплитуда примет максимальное значение тогда, когда подкоренное выражение в (82) примет минимальное значение. Чтобы найти этот минимум, нужно от подкоренного выражения взять производную по переменной  $\Omega$  и приравнять ее к нулю:

$$\frac{d}{d\Omega}[(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\beta^2\Omega^2] = -2(\omega_0^2 - \Omega^2) \cdot 2\Omega + 8\beta^2\Omega = 0 \quad (84)$$

или 
$$4(\Omega^2 - \omega_0^2) + 8\beta^2 = 0,$$

откуда 
$$\Omega = \omega_{\text{рез}} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}, \quad (85)$$

тогда как частота свободных затухающих колебаний

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}. \quad (86)$$

Частоту  $\Omega$ , при которой амплитуда вынужденных колебаний будет максимальна, называют **резонансной частотой**, и обозначают  $\omega_{\text{рез}}$ . Из (85) и (86) видно, что при наличии затухания резонанс наступает при такой частоте вынужденных колебаний, которая меньше собственной частоты  $\omega_0$  и частоты свободных затухающих колебаний  $\omega$ .

Для определения резонансной амплитуды подставляем значение резонансной частоты (85) в формулу (82)

$$A_{\text{рез}} = \frac{F_0}{2m\beta\sqrt{(\omega_0^2 - \beta^2)}} = \frac{F_0}{2m\beta\omega}. \quad (87)$$

Подставив  $\omega_{\text{рез}}$  в формулу (83), получим

$$\operatorname{tg}\Phi = \frac{2\beta\omega_{\text{рез}}}{\omega_0^2 - \omega_{\text{рез}}^2} = \frac{\sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}}{\beta} = \sqrt{\frac{\omega_0^2}{\beta^2} - 2}. \quad (88)$$



Если  $\beta$  мало, то  $\frac{\omega_0^2}{\beta^2} \gg 2$  и двойкой можно пренебречь, тогда

$$\operatorname{tg}\Phi = \frac{\omega_0}{\beta}. \quad (89)$$

Это значение  $\operatorname{tg}\Phi$  и будет соответствовать резонансу. Если  $\omega/\beta$  – большая величина, то  $\Phi \approx \pi/2$  (если  $\omega_0 = \Omega$ , то  $\Phi = \pi/2$ ).

Таким образом, под действием периодической вынуждающей силы возникают гармонические вынужденные колебания с той же частотой  $\Omega$ .

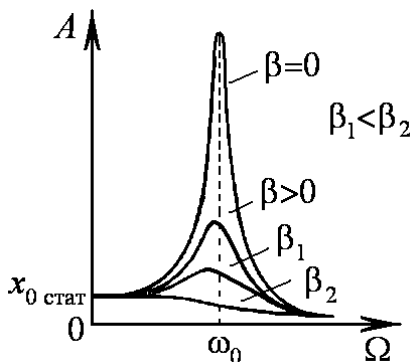


Рисунок 15 – Зависимость амплитуды от частоты для различных величин коэффициента затухания

Амплитуда вынужденных колебаний, согласно (82), прямо пропорциональна амплитуде вынуждающей силы  $F_0$ , зависит от характеристик свободно колеблющейся системы  $m$ ,  $\beta$ ,  $\omega_0$ , кроме того, является функцией циклической частоты  $\Omega$  колебаний вынуждающей силы  $F_{\text{вн}}$ .

Графики зависимости  $A$  для нескольких значений  $\beta$  представлены на рис. 15. Из него видно, что амплитуда вынужденных колебаний зависит от соотношения частот  $\Omega$  и  $\omega_0$ . Различные кривые соответствуют различным значениям коэффициента затухания  $\beta$ . Как видно из графиков, характер

зависимости  $A = f(\Omega)$  различен для трех областей циклической частоты вынужденных колебаний  $\Omega$ .

1) Область малых частот:  $\Omega \ll \omega_0$ . В этой области сдвиг фаз  $\Phi$  близок к нулю, выражение для амплитуды, с учетом (82) будет иметь вид

$$A = \frac{F_0}{m\omega_0^2} = \frac{F_0}{k} = x_{0\text{стат}}, \quad (90)$$

где  $x_{0\text{стат}}$  – статистическое смещение точки под действием постоянной силы  $F = F_0$ . При  $0 < \Omega \ll \omega_0$  и малом коэффициенте затухания приближенно получим  $x \approx \cos\Omega t$ , т. е. смещение колеблющейся точки без искажений следует за изменением вынуждающей силы.

2) Область высоких частот:  $\Omega \gg \omega_0$ . При таких частотах  $\Phi \approx -\pi$  и колебания системы происходят в противофазе с вынуждающей силой. Вследствие этого амплитуда  $A$  не может быть большой и убывает с ростом частоты  $\Omega$ :

$$A = \frac{F_0}{m\omega_0^2} \left( \frac{\omega_0}{\Omega} \right)^2 \approx x_{0\text{стат}} \left( \frac{\omega_0}{\Omega} \right)^2. \quad (91)$$

3) Область резонанса:  $\Omega \approx \omega_0$ . При таких частотах  $\Phi \approx \pi/2$  и колебания системы происходят с сильным возрастанием амплитуды. Из (82) следует, что

$$A = \frac{F_0}{m\omega_0^2} \frac{\omega_0}{2\beta} \approx x_{0\text{стат}} \frac{\omega_0}{2\beta}, \quad (92)$$

и чем меньше коэффициент трения, тем больше амплитуда. В пределе  $A \rightarrow \infty$  при  $r \rightarrow 0$ . Это *явление резкого возрастания амплитуды вынужденных колебаний при  $\Omega = \omega_0$  и носит название механического резонанса.*

### 3. Описание установки и методика измерения

Установка для исследования вынужденных колебаний представляет собой систему двух маятников. Один из них тяжелый, с большим запасом энергии и с неизменным периодом колебаний  $T$ , в течение длительного времени используется в качестве задающего. Другой маятник легкий, служит резонатором и раскачивается под действием колебания маятника-вibratorа (рис. 16).

Маятник-вibrator представляет собой массивный стержень с насаженным на него шаром, который можно перемещать вдоль стержня, меняя его период. В верхней части маятника-вibratorа на небольшом кронштейне прикреплен маятник-резонатор, представляющий собой маленький шарик, подвешенный на нити. Нить проходит через кронштейн и прикреплена к vibratorу муфтой, при помощи которой можно менять длину маятника-резонатора, меняя его период  $T_0$ . При помощи горизонтальной шкалы под маятником-вibratorом можно задавать амплитуду колебаний, которая при каждом запуске маятника-вibratorа должна быть одна и та же. Вертикальная шкала предназначена для определения амплитуды вынужденных колебаний маятника-резонатора.

При измерении периодов колебаний маятников их можно отклонить только на  $3^\circ \dots 4^\circ$ , что возможно сделать, зная длину маятников, поскольку  $A_0 = l\alpha$  для малых углов  $\alpha$  ( $l$  – длина маятника;  $A_0$  – максимальное первоначальное отклонение, равное амплитуде колебаний). Меняя высоту закрепления шара на маятнике-вibratorе, поднимая или опуская его через каждое деление, можно менять период  $T$  вынуждающей силы  $F_{\text{вн}}$ . По найденным значениям периодов, очевидно, можно определить циклические частоты  $\omega_0$  и  $\Omega$ .

При измерении одного из периодов маятника-вibratorа необходимо одновременно измерить максимальное смещение маятника-резонатора, т.е. его амплитуду, когда колебания можно считать установившимися.

### 4. Статистическая обработка результатов измерений

Проводится аналогично тому, как показано в лабораторной работе № 4-1.

### 5. Порядок выполнения работы и обработка результатов измерения

1. Отклоните маятник-резонатор на  $3^\circ \dots 4^\circ$  и отпустив, измерьте время 50-ти колебаний маятника-резонатора  $t_{pi}$ , запишите результат в таблицу измерений. Опыт повторите три раза.

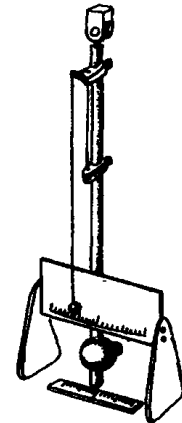


Рисунок 16 – Система маятников

2. По данным измерений определите период  $T_{0i} = t_{pi}/50$ , и средний период колебаний маятника-резонатора  $\langle T_0 \rangle = \sum_{i=1}^{n=3} T_{0i} / n$ , с точностью до сотых долей секунды, запишите результат в таблицу измерений.

3. Укрепите шар на стержне маятника-вибратора в самом нижнем положении так, чтобы нижнее деление шкалы на стержне было вплотную с верхом шара.

4. Вычислите, на какое расстояние  $A_0 = l\alpha$ , от положения равновесия, необходимо отклонить маятник-вибратор, чтобы это отклонение ( $A_0$  – амплитуда вынужденных колебаний) не превышало  $3^\circ \dots 4^\circ$ . Длину маятника вибратора взять из результатов лабораторной работы № 4-1. Запишите результат в таблицу измерений.

5. Отклоните маятник-вибратор на расстояние  $A_0$  по горизонтальной шкале под ним и отпустив, измерите время 50-ти колебаний маятника-вибратора  $t_{vi}$ . Одновременно наблюдая колебания маятника-резонатора, измерить амплитуду установившихся колебаний  $A_i$  по вертикальной шкале ( $i$  – номер опыта). Запишите результаты  $t_{vi}$  и  $A_i$  в таблицу измерений. Опыт повторите три раза.

6. Определите период маятника-вибратора  $T_{vi} = t_{vi}/50$ , и средний период колебаний маятника-вибратора  $\langle T_v \rangle = \sum_{i=1}^{n=3} T_{vi} / n$ , с точностью до тысячных долей секунды, запишите результат в таблицу измерений.

7. Повторить пункты 5 и 6 (шесть раз), закрепляя шар на стержне маятника-вибратора на одно деление выше предыдущего. Все данные измерений и вычислений внести в таблицу.

8. Найдите отношение  $\frac{T_0}{T_{vi}}$ , и внесите результат в соответствующую колонку таблицы измерений.

9. Постройте график зависимости  $A = f(T_0/T_{vi})$ .

## 6. Контрольные вопросы

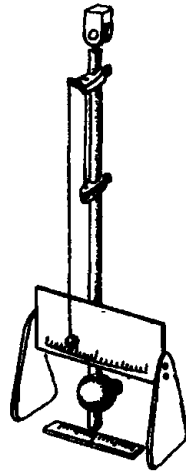
1. Какие колебания называются вынужденными? Какие силы действуют на систему, совершающую вынужденные колебания?
2. В чем заключается метод описания вынужденных колебаний?
3. Вывести уравнение вынужденных механических колебаний.
4. Какой формулой определяется амплитуда вынужденных колебаний? Сдвиг фазы между вынуждающей силой и смещением вынужденных колебаний?
5. В чем сущность резонанса? Условие его возникновения.
6. При каких условиях амплитуда вынужденных колебаний принимает максимальное значение?
7. Почему при вызывании колебаний маятника-вибратора, в ходе выполнения работы, необходимо каждый раз отклонять его на одно и то же расстояние  $A_0$ ?

## 7. Протокол выполнения лабораторной работы № 4-5

1) **Тема:** Исследование вынужденных механических колебаний. Механический резонанс.

2) **Цель работы:** Изучение вынужденных механических колебаний, явления резонанса и причин, при которых это явление наступает.

3) **Схема прибора или установки**



4) **Таблица приборов**

| № п/п. | Наименование     | Тип    | Заводской № | Предел шкалы | Цена деления | Класс точности |
|--------|------------------|--------|-------------|--------------|--------------|----------------|
| 1      | Маятник-вибратор | У      |             |              |              |                |
| 2      | Секундомер       | УХЛ-42 |             | 99,99 с      | 0,01 с       | 0,01 с         |

5) **Формулы расчета величин и их погрешностей:**

1)  $T_{0i} = t_{pi} / 50$ ; 2)  $A_0 = l\alpha$ ; 3)  $T_{bi} = t_{bi} / 50$

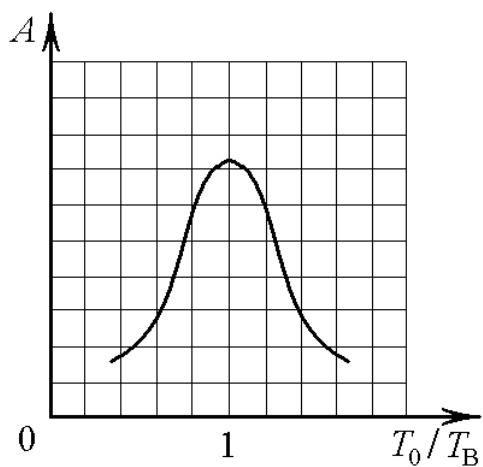
6) **Таблица измерений**

$l =$  \_\_\_\_\_ мм ;  $A_0 =$  \_\_\_\_\_ мм

|   |       |                       | 1 |  |                          | 2                     |  |                          | 3                     |  |                          |                       |
|---|-------|-----------------------|---|--|--------------------------|-----------------------|--|--------------------------|-----------------------|--|--------------------------|-----------------------|
| № | $t_p$ | $T_{0i}$              | № | $t_B$  | $T_{Bi}$                 | $A_i$                 | $t_B$  | $T_{Bi}$                 | $A_i$                 | $t_B$  | $T_{Bi}$                 | $A_i$                 |
| 1 |       |                       | 1 |  |                          |                       |  |                          |                       |  |                          |                       |
| 2 |       |                       | 2 |  |                          |                       |  |                          |                       |  |                          |                       |
| 3 |       |                       | 3 |  |                          |                       |  |                          |                       |  |                          |                       |
|   |       | $\langle T_0 \rangle$ |   |  | $\langle T_{B1} \rangle$ | $\langle A_1 \rangle$ |  | $\langle T_{B2} \rangle$ | $\langle A_2 \rangle$ |  | $\langle T_{B3} \rangle$ | $\langle A_3 \rangle$ |
|   |       |                       |   | $\langle T_0 \rangle / \langle T_{B1} \rangle =$ |                          |                       | $\langle T_0 \rangle / \langle T_{B2} \rangle =$ |                          |                       | $\langle T_0 \rangle / \langle T_{B3} \rangle =$ |                          |                       |
|   |       |                       |   | 4  |                          |                       | 5  |                          |                       | 6  |                          |                       |
|   |       |                       | № | $t_B$  | $T_{Bi}$                 | $A_i$                 | $t_B$  | $T_{Bi}$                 | $A_i$                 | $t_B$  | $T_{Bi}$                 | $A_i$                 |
|   |       |                       | 1 |  |                          |                       |  |                          |                       |  |                          |                       |
|   |       |                       | 2 |  |                          |                       |  |                          |                       |  |                          |                       |
|   |       |                       | 3 |  |                          |                       |  |                          |                       |  |                          |                       |
|   |       |                       |   |  | $\langle T_{B4} \rangle$ | $\langle A_4 \rangle$ |  | $\langle T_{B5} \rangle$ | $\langle A_5 \rangle$ |  | $\langle T_{B6} \rangle$ | $\langle A_6 \rangle$ |
|   |       |                       |   | $\langle T_0 \rangle / \langle T_{B4} \rangle =$ |                          |                       | $\langle T_0 \rangle / \langle T_{B5} \rangle =$ |                          |                       | $\langle T_0 \rangle / \langle T_{B6} \rangle =$ |                          |                       |

7) *Расчеты величин и их погрешностей:*

8) *График зависимости.* (Для графика оставить половину тетрадной страницы). Пример зависимости  $A = f(T_0/T_{Bi})$ :



10) *Вывод:*

11) Работу выполнил:

Работу проверил:

**Лабораторная работа № 4-6**  
**ИССЛЕДОВАНИЕ ВЫНУЖДЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ**  
**В КОЛЕБАТЕЛЬНОМ КОНТУРЕ (последовательная RLC-ЦЕПЬ)**

**1. Цель работы:**

1.1. Исследование зависимости напряжения на емкости, на индуктивности и величины тока в колебательном контуре от соотношения частот вынужденных и собственных колебаний в нем.

1.2. Исследование резонансных явлений в колебательном контуре.

**2. Основные понятия**

**Вынужденными** называются незатухающие колебания колебательной системы, когда она испытывает действие внешней вынуждающей периодической силы.

Для того, чтобы колебания совершались во времени бесконечно долго, необходимо компенсировать энергию, выделяющуюся во внешнюю среду в результате сил сопротивления, действием внешней периодической силы.

Любой электрический колебательный контур обладает емкостью, индуктивностью и сопротивлением.

Если в контур с последовательно включенными (рис. 17) конденсатором емкостью  $C$  (считаем емкостью всего контура), катушкой индуктивности  $L$  (считаем индуктивностью всего контура) и резистором сопротивлением  $R$ , подключить последовательно внешнюю периодически изменяющуюся ЭДС, то в контуре возникнут **электрические вынужденные колебания**.

Рассмотрим вынужденные колебания в контуре под действием вынуждающей ЭДС, изменяющейся по закону

$$\mathcal{E}_{\text{вн}} = \mathcal{E}_0 \cdot \cos(\Omega t + \varphi_0), \quad (93)$$

где  $\mathcal{E}_0$  – амплитудное значение вынуждающей ЭДС;  $\Omega$  – циклическая частота изменения ЭДС;  $\varphi_0$  – начальная фаза изменения ЭДС. На основании II закона

Кирхгофа (в любом замкнутом контуре сумма падений напряжения равна сумме ЭДС в этом контуре) можно записать:

$$u_R + u_C = \mathcal{E}_L + \mathcal{E}_{\text{вн}}. \quad (94)$$

Подставив значения  $u_R$ ,  $u_C$ ,  $\mathcal{E}_L$  и  $\mathcal{E}_{\text{вн}}$  из (68), (69), (70) и (93) в (94), получим дифференциальное уравнение вынужденных электрических колебаний в контуре

$$Ri + \frac{q}{C} = -L \frac{di}{dt} + \mathcal{E}_0 \cdot \cos(\Omega t + \varphi_0) \quad \text{или} \quad L \frac{d^2 q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = \mathcal{E}_0 \cdot \cos(\Omega t + \varphi_0). \quad (95)$$

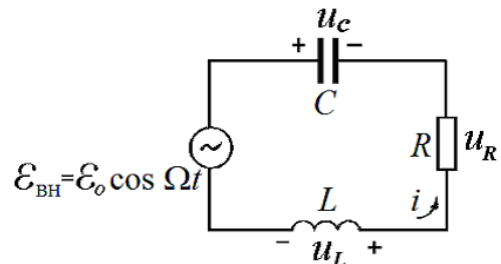


Рисунок 17 – Последовательный колебательный контур

Разделив (95) на  $L$  и введя обозначения  $\beta = \frac{R}{2L}$  и  $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$ , получим

**дифференциальное уравнение вынужденных электрических колебаний** в виде

$$\frac{d^2q}{dt^2} + 2\beta \frac{dq}{dt} + \omega_0^2 q = (\mathcal{E}_0/L) \cdot \cos(\Omega t + \varphi_0), \quad (96)$$

которое аналогично неоднородному линейному дифференциальному уравнению второго порядка механических вынужденных колебаний (см. уравнение (78)).

Решением этого уравнение есть **уравнение вынужденных электрических колебаний в интегральной форме**

$$q = q_0 \cos(\Omega t + \varphi_{01}) \quad \text{или} \quad q = q_0 \sin(\Omega t + \varphi_{02}). \quad (97)$$

Поскольку,  $i = dq/dt$ , то сила тока в цепи будет изменяться по закону:

$$i = -q_0 \Omega \sin(\Omega t + \varphi_{01}) = -i_0 \sin(\Omega t + \varphi_{01}), \quad (98)$$

или  $i = q_0 \Omega \cos(\Omega t + \varphi_{02}) = i_0 \cos(\Omega t + \varphi_{02})$ .

Как видно из (93) и (98), ток в контуре при вынужденных колебаниях изменяется по тому же закону и с той же циклической частотой  $\Omega$ , что и ЭДС, но фазы изменения различны.

Приняв начальные фазы тока и ЭДС равными нулю, а сдвиг фаз между ними  $\Phi$ , получим

$$i = i_0 \cos \Omega t, \quad (99)$$

$$\mathcal{E}_{\text{вн}} = \mathcal{E}_0 \cdot \cos(\Omega t + \Phi), \quad (100)$$

где  $i_0$  – амплитудное значение тока, которое необходимо определить.

Для нахождения амплитудной величины тока и сдвига фаз  $\Phi$  между ЭДС и током подставим мгновенные значения тока и заряда в уравнение (95) и рассмотрим подробнее каждое слагаемое.

1) Напряжение на индуктивности  $u_L$ , очевидно, равно ЭДС самоиндукции, так как мы предположили, что индуктивность активным сопротивлением не обладает.

$$u_L = L \frac{di}{dt} = -L \Omega i_0 \sin(\Omega t) = u_{L0} \cos\left(\Omega t + \frac{\pi}{2}\right), \quad (101)$$

где  $u_{L0} = L \Omega i_0$  – амплитудное значение напряжения на индуктивности.

2) Напряжение на активном сопротивлении

$$u_R = iR = R i_0 \cos \Omega t = u_{R0} \cos \Omega t, \quad (102)$$

где  $u_{R0} = R i_0$  – амплитудное значение напряжения на активном сопротивлении.

3) Напряжение на емкости  $u_C = q/C$  и, так как  $i = dq/dt$ , то  $dq = i dt$ , откуда

$$q = \int i dt = \int i_0 \cos(\Omega t) dt = \frac{i_0}{\Omega} \sin \Omega t = \frac{i_0}{\Omega} \cos\left(\Omega t - \frac{\pi}{2}\right), \quad (103)$$

тогда

$$u_C = \frac{q}{C} = \frac{i_0}{\Omega C} \cos\left(\Omega t - \frac{\pi}{2}\right) = u_{C0} \cos\left(\Omega t - \frac{\pi}{2}\right), \quad (104)$$

где  $u_{C0} = i_0/\Omega C$  – амплитудное значение напряжения на емкости.

Выражения для амплитудных значений напряжений (101), (102) и (104) напоминают закон Ома, где  $X_L = \Omega L$  называется **индуктивным сопротивлением**, или **реактивным сопротивлением индуктивности** и измеряется в Ом, а  $X_C = 1/\Omega C$  называется **емкостным сопротивлением**, или **реактивным сопротивлением емкости** и также измеряется в Ом.

Подставив в уравнение (95) найденные значения напряжений (101), (102) и (104), получим, с учетом амплитудных значений

$$u_{L0} \cos\left(\Omega t + \frac{\pi}{2}\right) + u_{R0} \cos \Omega t + u_{C0} \cos\left(\Omega t - \frac{\pi}{2}\right) = \mathcal{E}_0 \cdot \cos(\Omega t + \Phi). \quad (105)$$

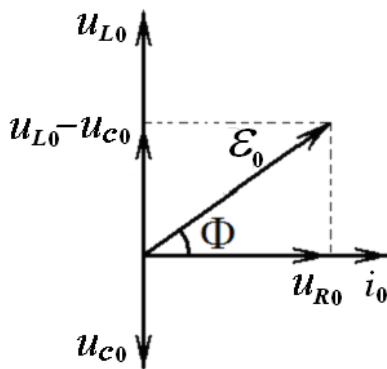


Рисунок 18 – Векторная диаграмма вынужденных колебаний в колебательном контуре

Из уравнения (105) видно, что вынуждающая ЭДС равна сумме трех косинусоидальных колебаний одной частоты, но имеющих разные начальные фазы. Для сложения этих колебаний воспользуемся методом векторных диаграмм, который был уже применен при рассмотрении аналогичной задачи в лабораторной работе № 4-5.

Из векторной диаграммы (рис. 18) видно, что напряжение на индуктивности опережает ток по фазе на  $\pi/2$ . Физическая причина этого заключается в том, что при приложении к индуктивности внешнего напряжения в ней возникают встречные индукционные токи, поэтому результирующий ток запаздывает относительно напряжения.

Напряжение на конденсаторе отстает по фазе от тока на  $\pi/2$ . Физическая причина этого отставания говорит о том, что заряд на конденсаторе (а значит и напряжение) изменяется вследствие первоначального изменения тока.

Из рисунка 18 следует, что

$$\mathcal{E}_0 = \sqrt{u_{R0}^2 + (u_{L0} - u_{C0})^2},$$

или

$$\mathcal{E}_0 = \sqrt{(Ri_0)^2 + \left(\Omega Li_0 - \frac{i_0}{\Omega C}\right)^2},$$

откуда

$$\mathcal{E}_0 = i_0 \sqrt{R^2 + \left(\Omega L - \frac{1}{\Omega C}\right)^2} = i_0 \cdot Z, \quad (106)$$

что напоминает закон Ома для **полной цепи**, содержащей ЭДС. Выражение для  $Z$  называется **полным сопротивлением контура**

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\Omega L - \frac{1}{\Omega C}\right)^2}. \quad (107)$$



Выражение  $\left(\Omega L - \frac{1}{\Omega C}\right) = X_{\text{реакт}}$  называется **реактивным сопротивлением контура**.

Сдвиг фаз между током и ЭДС

$$\operatorname{tg} \Phi = \frac{u_{L0} - u_{C0}}{u_{R0}} = \frac{\Omega L - \frac{1}{\Omega C}}{R} = \frac{X_{\text{реакт}}}{R}. \quad (108)$$

**В зависимости от соотношения между индуктивным и емкостным сопротивлениями, ЭДС может как опережать ток, так и отставать от него.**

Если в рассмотренном контуре менять частоту вынуждающей ЭДС, не изменяя ее амплитудного значения  $\mathcal{E}_0$ , то амплитуда тока будет также меняться. График зависимости амплитуды тока от циклической частоты  $\Omega$  представлен на рис. 19.

Из формулы (106) видно, что:

а) при низких частотах  $\Omega \rightarrow 0$ ,

$\frac{1}{\Omega C} \rightarrow \infty$ , полное сопротивление цепи

$Z = \sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\Omega C}\right)^2} \rightarrow \infty$ , а амплитуда тока

$i_0 \rightarrow 0$ , поскольку через конденсатор постоянный ток не проходит;

б) с ростом частоты реактивное сопротивление  $X_{\text{реакт}}$  уменьшается и на

частоте  $\omega_0$  достигает нуля, т.е.  $X_{\text{реакт}} = \left(\Omega L - \frac{1}{\Omega C}\right) = 0$ , следовательно

$\Omega = \omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}$ . Таким образом, **реактивное сопротивление достигает нуля**

**на частоте собственных колебаний контура, при этом полное сопротивление цепи минимально  $Z = R$ , а ток в цепи максимален**

$I_0^{\max} = \mathcal{E}_0 / R$ . Значение тока в максимуме тем больше, чем меньше величина **активного сопротивления контура  $R$** . На рис. 19 показаны графики для различных значений активного сопротивления контура;

в) дальнейшее увеличение частоты приводит к росту реактивного  $X_{\text{реакт}}$  и

полного  $Z = \sqrt{R^2 + (\Omega L)^2} \rightarrow \infty$  сопротивлений, поэтому ток уменьшается.

**Явление резкого возрастания амплитуды тока вынужденных колебаний и достижения им максимальной величины называется резонансом** (см. пункт б).

**При резонансе полное сопротивление контура равно активному ( $Z = R$ )** и из уравнения (108) видно, что **сдвиг фаз между током и**

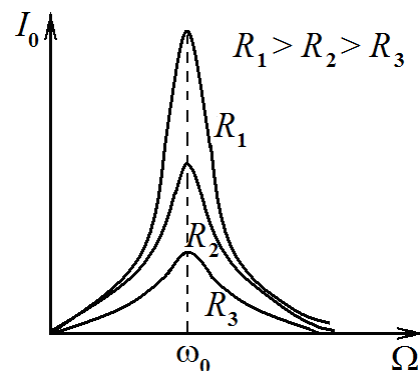


Рисунок 19 – Зависимость амплитуды тока в цепи от частоты внешней ЭДС

**вынуждающей ЭДС равен нулю**  $\Phi = 0$ , поскольку  $\operatorname{tg}\Phi = \frac{X_{\text{реакт}}}{R} = \frac{0}{R} = 0$ . Это означает, что на векторной диаграмме противоположно направленные векторы равны ( $u_{C0} = u_{L0}$ ) и вектор  $\mathcal{E}_0$  направлен по оси тока, т.е. контур действует как чисто активное сопротивление. При отклонении  $\Omega$  от  $\omega_0$  разность фаз  $\Phi$  растет, причем

$$\begin{aligned} \Omega \rightarrow 0, \quad X_{\text{реакт}} &\rightarrow \left(-\frac{1}{\Omega C}\right) \rightarrow -\infty, \quad \operatorname{tg}\Phi \rightarrow -\infty, \quad \Phi \rightarrow -\frac{\pi}{2}, \\ \Omega \rightarrow \infty, \quad X_{\text{реакт}} &\rightarrow (\omega L) \rightarrow \infty, \quad \operatorname{tg}\Phi \rightarrow \infty, \quad \Phi \rightarrow \frac{\pi}{2}. \end{aligned} \quad (109)$$

При резонансе электрическое поле, созданное в контуре источником ЭДС, направлено так, что силы этого поля все время ускоряют движение зарядов. Если бы в контуре отсутствовало активное сопротивление, то амплитуда тока возрастала бы с каждым периодом до бесконечности. В реальном контуре по мере роста тока растут и потери энергии, а когда они будут равны работе сил поля источника, амплитуда тока достигнет своего установившегося значения. Когда частота ЭДС не равна собственной частоте контура, то сдвиг фаз  $\Phi$  между током и ЭДС не равен нулю. При этом поле источника часть периода ускоряет движение зарядов, а часть периода — замедляет. Поэтому амплитуда тока меньше, чем при резонансе, и при увеличении сдвига фаз  $\Phi$  время замедления преобладает над временем ускорения за период.

Во время резонанса, когда вынужденные колебания установились, колебательный контур энергии от источника не потребляет. В нем происходит переход энергии электрического поля в энергию магнитного поля и обратно, как при собственных колебаниях. Энергия источника расходуется только на компенсацию потерь в контуре. Мощность потерь с учетом (99) и (102) будет:

$$N = iu_R = i_0 \cos(\Omega t) \cdot Ri_0 \cos(\Omega t) = i_0^2 R \cos^2(\Omega t).$$

Тогда за один период колебания  $T$  контур потеряет энергию, равную

$$\Delta W = \int_0^T N dt = \int_0^T i_0^2 R \cos^2(\Omega t) dt = i_0^2 R \frac{T}{2}, \quad (110)$$

где среднее значение  $\int_0^T \cos^2(\Omega t) dt = T/2$ .

Для характеристики резонансных свойств контура введено понятие **добротности**, которая определяется отношением энергии, запасенной в контуре  $W$ , к энергии, теряемой за один период при резонансе  $\Delta W$ :

$$Q = 2\pi \frac{W}{\Delta W} = 2\pi \frac{(1/2)i_0^2 L}{(1/2)i_0^2 RT} = 2\pi \frac{L}{RT} = 2\pi \frac{L\omega}{R2\pi} = \frac{L}{R} \sqrt{\frac{1}{LC}} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}. \quad (111)$$

При резонансе, в силу равенства индуктивного и емкостного сопротивлений, получается и равенство амплитудных значений напряжений  $u_{C0}$  и  $u_{L0}$ , но необходимо учитывать, что они изменяются в противофазе и в любой момент времени в сумме дают нуль.

Амплитуды колебаний напряжения на конденсаторе и индуктивности

$$u_{C0} = u_{L0} = i_0 \frac{1}{\Omega C} = i_0 \Omega L = i_0 \frac{R}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} = \mathcal{E}_0 \cdot \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} = \mathcal{E}_0 Q, \quad (112)$$

где  $Q$  – добротность контура. Таким образом, **на частоте  $\omega_0$  амплитуды напряжения на конденсаторе и на индуктивности в  $Q$  раз больше вынуждающей ЭДС генератора**, но находятся в противофазе и сумма их равна нулю.

Если активное сопротивление мало, т.е.  $R \ll \sqrt{L/C}$ , то  $Q \gg 1$  и  $u_{C0} = u_{L0} \gg \mathcal{E}_0$ . Резонанс в контуре с последовательно включенными  $R$ ,  $L$  и  $C$  называется **резонансом напряжений**, а частоту  $\Omega = \omega_0$  – **резонансной частотой**. Чем больше добротность контура, тем резче выражен резонанс.

Как уже отмечалось, амплитуды напряжений на индуктивности и емкости зависят от частоты вынуждающей ЭДС. Выражение для амплитуды напряжения на индуктивности можно представить как

$$U_{L0} = i_0 \Omega L = \mathcal{E}_0 \frac{\Omega L}{\sqrt{R^2 + \left( \Omega L - \frac{1}{\Omega C} \right)^2}}. \quad (113)$$

При изменении частоты вынуждающей ЭДС, амплитуда напряжения  $u_{L0}$  изменяется и принимает максимальное значение при частоте  $\Omega_L$ , большей собственной частоты контура  $\omega_0$ . Для нахождения частоты  $\Omega_L$  нужно исследовать выражение (113) на максимум, т.е. решить уравнение (взять производную и приравнять ее к нулю)

$$\frac{du_{L0}}{d\Omega} = 0.$$

Аналогично, выражение для амплитуды напряжения на емкости можно представить в виде

$$u_{C0} = i_0 \frac{1}{\Omega C} = \mathcal{E}_0 \frac{1}{\Omega C \sqrt{R^2 + \left( \Omega L - \frac{1}{\Omega C} \right)^2}}. \quad (114)$$

Максимальное значение  $u_{C0}$  принимает при частоте  $\Omega_C$  меньшей, чем  $\omega_0$ .

На рис. 20 показаны графики зависимости амплитуд напряжений на индуктивности, емкости и амплитуды тока от частоты вынуждающей ЭДС. При резонансе ( $\Omega = \omega_0$ ) амплитуды  $u_{Cрез}$  и  $u_{Lрез}$  **равны между собой, но не максимальны!** Отличие частот, т.е. разность  $\Omega_L - \Omega_C$  тем меньше, чем больше добротность контура. При больших добротностях  $\Omega_C \approx \omega_0 \approx \Omega_L$  и практически совпадают.

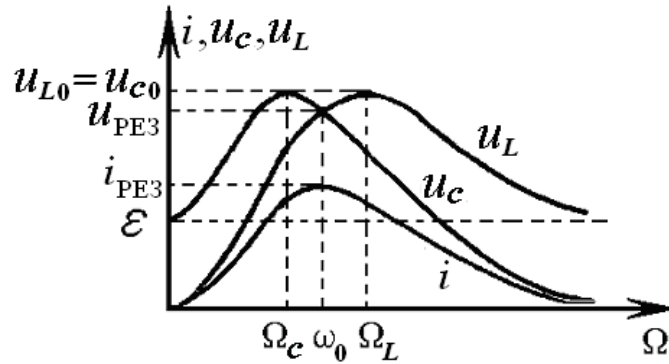


Рисунок 20 – Графики зависимости амплитуд напряжений на индуктивности, емкости и амплитуды тока в цепи от частоты внешней ЭДС

### 3. Описание установки и методика измерения

В данной работе исследуется зависимость амплитуды тока и амплитуды напряжений на индуктивности и на емкости при изменении частоты  $\Omega$  вынуждающей ЭДС. Величина активного сопротивления  $R$ , емкость  $C$ , индуктивность  $L$  и амплитуда вынуждающей ЭДС  $\mathcal{E}_0$  остаются постоянными.

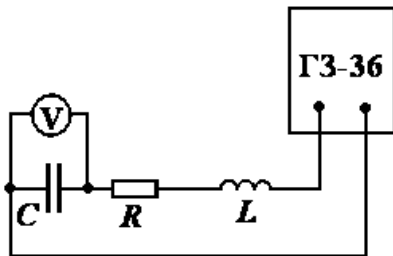


Рисунок 21 – Электрическая схема для исследования вынужденных колебаний

Схема установки изображена на рис. 21. Контур составлен из емкости  $C$  (одна из набора емкостей), индуктивности  $L$  (одна из набора индуктивностей), активного сопротивления  $R$  (набранного на магазине сопротивлений левой панели лабораторного стола).

В качестве вынуждающей ЭДС используется генератор ГЗ-36, выходное напряжение (ЭДС) которого можно задавать по показаниям вольтметра на нем, учитывая, что вольтметр показывает действующее значение напряжения, а не амплитудное.

**Действующим значением переменного тока** называется величина такого постоянного тока, который на том же участке цепи за время, равное периоду колебания, выделяет такое же количество тепла, что и переменный ток. Для синусоидального тока действующие и амплитудные значения связаны соотношением  $i = i_0 / \sqrt{2}$ , для напряжения —  $\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 / \sqrt{2}$ .

Очевидно, действующие значения тока и ЭДС также связаны соотношением

$$\mathcal{E} = i \sqrt{R^2 + \left( \Omega L - \frac{1}{\Omega C} \right)^2} = i \cdot Z.$$

Если изменять частоту генератора, то сдвиг фаз между током и ЭДС будет изменяться. Кривая изменения тока опережает кривую изменения ЭДС, то отстает от нее, то совпадает с ней по фазе. Последнее и означает, что наступил резонанс.

Напряжение на емкости  $C$  измеряется с помощью вольтметра.

В данной работе можно построить графики:

а) график зависимости действующего значения тока в контуре от частоты  $\Omega$  вынуждающей ЭДС, где  $\Omega$  можно определить, как  $\Omega = 2\pi\nu$ , а частоту  $\nu$  отсчитывают по лимбу генератора ГЗ-36;

б) график зависимости действующего значения напряжения на емкости от частоты  $\Omega$  вынуждающей ЭДС;

в) график зависимости действующего значения напряжения на индуктивности от частоты  $\Omega$  вынуждающей ЭДС  $\Omega$ .

#### 4. Статистическая обработка результатов измерений

Проводится аналогично тому, как показано в лабораторной работе № 4-1.

#### 5. Порядок выполнения работы и обработка результатов измерения

1. Включить звуковой генератор ГЗ-36, осциллограф и ждите пять минут, пока он не нагреется.

2. Потенциометром «Рег. выхода» установить выходное напряжение  $E_{\text{ген}}$  на генераторе 1,5...3 В. По ходу выполнения работы напряжение поддерживать неизменным, напряжение внести в таблицу измерений.

3. Установите указанные преподавателем величину емкости  $C$  из набора емкостей и значение сопротивления на магазине сопротивлений, величины занести в таблицу измерений.

4. На генераторе устанавливают частоту 20 Гц и замечают показание вольтметра (напряжение на конденсаторе).

5. Изменяя частоту генератора  $\nu$ , следят за показаниями вольтметра (напряжение на емкости  $u_C$ ), последовательно проходя весь диапазон частот от 20 до 200 Гц. Если резонанс не обнаружен, переключателем «Множитель», переключите прибор на диапазон: от 200 до 2000 Гц и т.д., пока не обнаружится резонанс напряжений (пока вольтметр не покажет максимальное напряжение на конденсаторе).

6. Обнаружив диапазон частот, в пределах которого наблюдается резонанс напряжения в собранной схеме, провести измерения  $u_C$  для 10...15 значений частоты  $\nu$ , охватывая весь диапазон (больше точек измерить в области резкого возрастания напряжения на конденсаторе; измерения провести так, чтобы точки были гуще). Данные измерений внести в таблицу измерений.

7. По данным значениям емкости  $C$ , частоты  $\nu$  и измеренным значениям  $u_C$  найти соответствующие циклические частоты  $\Omega = 2\pi\nu$ , а по ним, значения тока в контуре  $i$ .

8. Постройте зависимость напряжения на конденсаторе от частоты  $u_C = f(\Omega)$  и зависимость тока от частоты  $i = f(\Omega)$ , по последнему графику определите резонансную частоту. Результаты представить в виде графиков,  $\Omega_{\text{рез}}$  занести в таблицу измерений.

9. По найденной резонансной частоте  $\Omega_{\text{рез}}$  определить величину индуктивности контура  $L$ .

10. Определите добротность контура по формуле  $Q = \frac{u_{C_{\text{рез}}}}{E_{\text{ген}}}$  и сопротивление контура  $R$  по формуле  $R = \frac{1}{Q} \sqrt{\frac{L}{C}}$  (см. ф-лу (111)).

11. Запишите окончательные результаты:  $\Omega_{\text{рез}}$ ,  $L$ ,  $Q$ ,  $R$ .

## 6. Контрольные вопросы

1. Какие колебания называются вынужденными?
2. Как записываются уравнения вынужденных электрических колебаний в дифференциальной и интегральной формах?
3. Каков сдвиг фаз между током и напряжением на активном, индуктивном и емкостном сопротивлениях?
4. Как рассчитываются индуктивное и емкостное сопротивления?
5. Начертить векторную диаграмму напряжений для контура с последовательно соединенными  $R$ ,  $L$ ,  $C$ .
6. Как выводится формула для амплитуды тока при вынужденных колебаниях?
7. Чему равен сдвиг фаз между током и вынуждающей ЭДС?
8. В чем заключается и как объясняется явление резонанса?
9. Сформулировать определение добротности, привести два вывода формулы расчета добротности.
10. Начертить резонансные кривые для тока при различных значениях добротности.
11. Начертить графики зависимости амплитуд напряжений на индуктивности и емкости и амплитуды тока от частоты вынуждающей ЭДС.

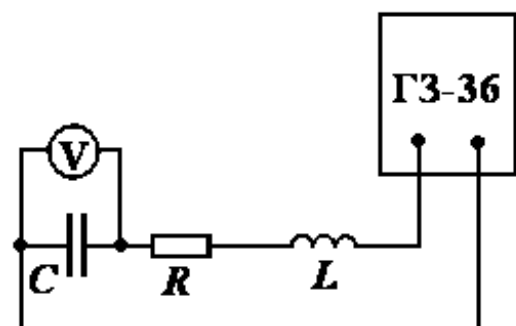
## 7. Протокол выполнения работы № 4-6

1) **Тема:** Исследование вынужденных колебаний в колебательном контуре.

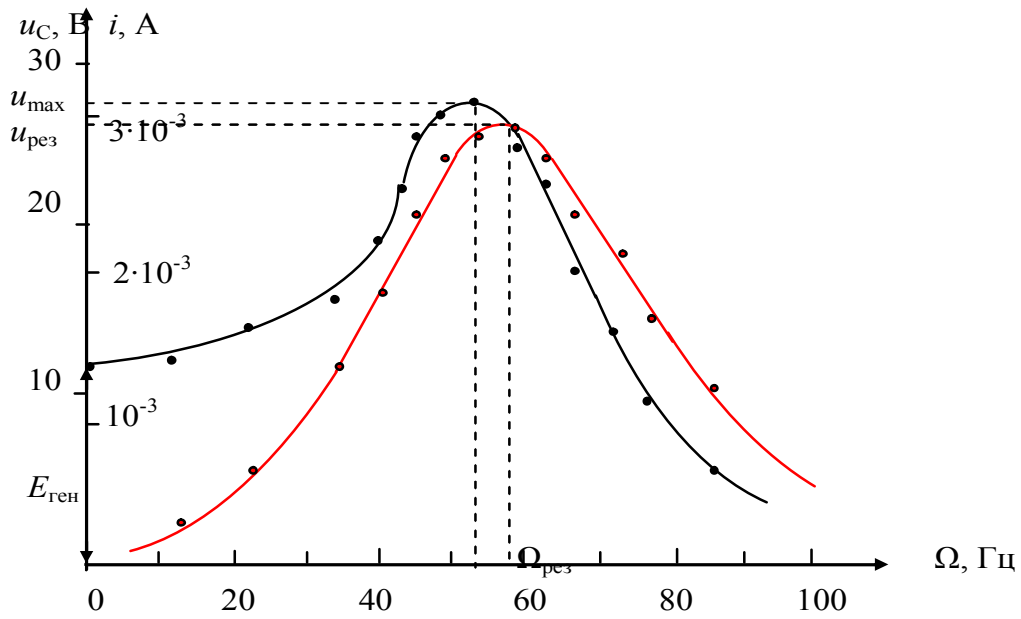
2) **Цель работы:**

1. Исследование зависимости напряжения на емкости и величины тока в колебательном контуре от соотношения частот вынужденных и собственных колебаний в нем.
2. Исследование резонансных явлений в колебательном контуре.

3) **Схема прибора или установки**







9) **Запись окончательных результатов:**

1)  $Q = \dots$  ; 2)  $L = \dots$  Гн ; 3)  $R = \dots$  Ом.

10) **Вывод:**

11) Работу выполнил:

Работу проверил:



*Лабораторная работа № 5-1*  
**ИССЛЕДОВАНИЕ СТОЯЧИХ ВОЛН МЕТОДОМ МЕЛЬДЕ**

**1. Цель работы:**

- 1.1. Изучение явления параметрического резонанса.
- 1.2. Изучение условий возникновения стоячих волн.
- 1.3. Определение частоты колебаний вибратора.

**2. Основные понятия****2.1. Волны**

**Волнами** называются различные возмущения состояния вещества или поля, распространяющиеся в пространстве с течением времени (распространяющиеся в пространстве колебания).

Колебания вещества порождают **упругую волну**, а колебания электромагнитного поля – **электромагнитную волну**. **Источником волн (вибратором)** является тело, совершающее колебания и вызывающие в среде возмущения.

Среда называется **упругой**, если между ее частицами существуют силы взаимодействия, препятствующие какой-либо деформации этой среды. *Например*, давление газов на стенки сосуда обеспечивает способность газов сопротивляться изменению их объема.

**Упругими волнами** называются распространяющиеся в упругой среде механические возмущения (деформации). Распространение упругих волн состоит в возбуждении колебаний все более и более удаленных от источника волн частиц среды. Совокупность колеблющихся точек данной среды представляет собой **волновое поле**. Точки волнового поля совершают вынужденные колебания.

**Фронтом волны** называется геометрическое место точек, до которых доходит колебание в определенный момент времени  $t$ . *Фронт волны для момента времени  $t$  только один.*

**Волновой поверхностью** называется геометрическое место точек среды, колеблющихся в одинаковых фазах. *Волновых поверхностей бесконечное множество.* Форма волновых поверхностей может быть разнообразной.

В зависимости от формы фронта, различают волны **плоские** и **сферические**. В плоских волнах волновыми поверхностями являются плоскости, а в сферических – сферы.

**Лучом** называется линия, касательная к которой в каждой точке совпадает с направлением распространения волны. *В однородной изотропной среде луч является прямой, перпендикулярной к фронту волны и совпадает с направлением переноса энергии волны.*

Волна называется **продольной**, если частицы среды колеблются в направлении распространения волны (рис. 22, а). Продольные волны связаны с

объемной деформацией среды. Поэтому они могут распространяться как в твердых, так и в жидких или газообразных средах.

Волна называется **поперечной**, если частицы среды колеблются в

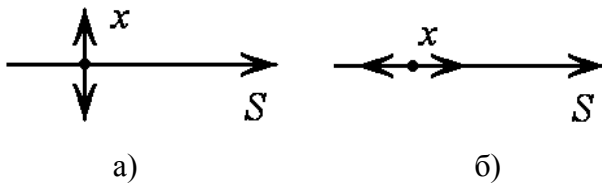


Рисунок 22 – а) поперечная волна;  
б) продольная волна.

направлениях, перпендикулярных к направлению распространения волны (рис. 22, б). Например, поперечная волна распространяется вдоль натянутого резинового шнура, один конец которого закреплен, а другой приведен в колебательное движение.

Поперечные волны могут возникать только в такой среде, которая обладает упругостью формы, т.е. способностью сопротивления деформации сдвига. Этим свойством обладают лишь твердые тела, поэтому поперечные волны распространяются только в твердых телах. **В газах и жидкостях, которые не обладают упругостью формы, распространение поперечных волн невозможно. Единственное исключение представляет собой электромагнитная волна (ЭМВ), которая является поперечной волной. ЭМВ – распространяющиеся в пространстве колебания векторов напряженности электрического поля  $\vec{E}$  и напряженности магнитного поля  $\vec{H}$**  ((рис. 23).

**Скоростью распространения волны (фазовой скоростью)  $v$**  называется физическая величина, численно равная расстоянию, которое за единицу времени проходит любая точка волновой поверхности. Вектор скорости  $\vec{v}$  направлен по нормали к волновой поверхности в сторону распространения волны.

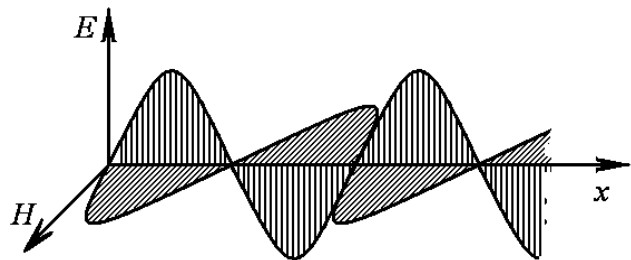


Рисунок 23 – Электромагнитная волна (ЭМВ)

**Длиной волны  $\lambda$**  называется расстояние между любыми двумя ближайшими точками волнового поля, колеблющимися с разностью фаз  $2\pi$  (колеблются «в фазе») (рис. 24). Другими словами **длина волны** – расстояние, которое проходит любая точка фронта волны за один период колебаний в источнике (вибратора).

$$\lambda = vT = \frac{v}{\nu} = \frac{2\pi v}{\omega} = \frac{2\pi}{k}, \quad (115)$$

где  $T = \frac{1}{\nu} = \frac{2\pi}{\omega}$  – период волны (наименьший интервал времени, через который колебания среды повторяются);  $\nu$  – частота волны (число колебаний совершенных за единицу времени);  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$  – волновое число (число длин волн укладываемых на  $2\pi$  единицах длины);  $v$  – фазовая скорость волны.

Пусть в источнике волн изменение колеблющейся величины происходит по закону  $y = A \cdot \sin(\omega t + \varphi)$  с амплитудой  $A$ , циклической частотой  $\omega$  и начальной фазой  $\varphi$  и волна распространяется вдоль оси  $x$  (рис. 24). В точке  $x = 0$  при  $t = 0$  начальную фазу считаем равной нулю  $\varphi = 0$ , тогда и  $y = 0$ . Все волновые поверхности перпендикулярны к оси  $x$ , и волна является плоской. В произвольной точке  $x$  колебания частиц в перпендикулярной плоскости отстают по времени на величину  $\Delta t$  от колебаний частиц в плоскости  $x = 0$ , так как чтобы пройти путь от плоскости  $x = 0$  до плоскости  $x$ , волне требуется время  $\Delta t = x/v$  ( $v$  – скорость распространения волны). Следовательно, колебания частиц фронта плоской волны в точке, отстоящей на расстоянии  $x$  от источника, запаздывают по времени на  $\Delta t$ :

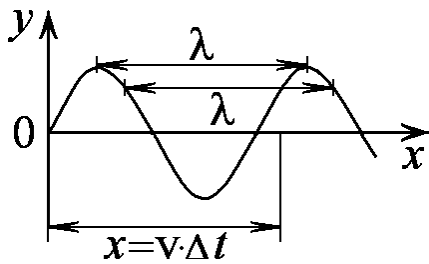


Рисунок 24 – Бегущая поперечная волна

В произвольной точке  $x$  колебания частиц в перпендикулярной плоскости отстают по времени на величину  $\Delta t$  от колебаний частиц в плоскости  $x = 0$ , так как чтобы пройти путь от плоскости  $x = 0$  до плоскости  $x$ , волне требуется время  $\Delta t = x/v$  ( $v$  – скорость распространения волны). Следовательно, колебания частиц фронта плоской волны в точке, отстоящей на расстоянии  $x$  от источника, запаздывают по времени на  $\Delta t$ :

$$y(x, t) = A \cdot \sin[\omega(t \pm \Delta t)] = y_0 \cdot \sin[\omega(t \pm x/v)].$$

При этом предполагается, что в процессе распространения волны не происходит ее затухания.

**Уравнение плоской бегущей волны**, распространяющейся вдоль оси  $x$ :

$$y(x, t) = A \cdot \sin\left[\omega\left(t - \frac{x}{v}\right)\right]. \quad (116)$$

Учитывая, что  $k = \omega/v$ , получим, **уравнение плоской незатухающей волны в интегральной форме**

$$y(x, t) = A \cdot \sin(\omega t \pm kx), \quad (117)$$

или, если бы, колебания в источнике происходили по закону  $y = A \cdot \cos(\omega t + \varphi)$ , то

$$y(x, t) = A \cdot \cos(\omega t \pm kx). \quad (118)$$

Фаза бегущей волны  $(\omega t \pm kx)$  – функция двух переменных ( $t$  и  $x$ ). Для фиксированного расстояния  $x$  смещение  $y(x, t)$  является гармонической функцией времени, а для фиксированного времени  $t$  смещение  $y(x, t)$  представляет собой синусоиду или косинусоиду в пространстве.

Знак «минус» в уравнениях (117), (118) используется при распространении волны в положительном направлении  $x$ , а знак «плюс» – в отрицательном (т.е. если мы хотим описать распространение волны, до включения прибора отсчета времени).

Найдем вторые производные по координате и по времени от (117):

$$\frac{d^2 y(x, t)}{dx^2} = -A \cdot k^2 \cdot \sin(\omega t - kx + \varphi) = -\frac{\omega^2}{v^2} y(x, t),$$

$$\frac{d^2 y(x, t)}{dt^2} = -A \cdot \omega^2 \cdot \sin(\omega t - kx + \varphi) = -\omega^2 y(x, t),$$

откуда следует **волновое уравнение в дифференциальной форме**

$$\frac{d^2 y(x,t)}{dx^2} = \frac{1}{v^2} \frac{d^2 y(x,t)}{dt^2}. \quad (119)$$

Если смещение частиц среды происходит в трех координатах со временем  $\xi(x,y,z,t)$ , то уравнение имеет вид

$$\Delta \xi(x,y,z,t) = \frac{1}{v^2} \frac{d^2 \xi(x,y,z,t)}{dt^2}, \quad (120)$$

где  $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$  – оператор Лапласа.

## 2.2. Параметрический резонанс. Стоячие волны.

Для определения частоты вибратора в данной работе используются стоячие волны, возникающие в натянутой нити, связанной с вибратором. В колеблющейся системе (нити) можно вызвать вынужденные колебания, если в такт с колебаниями периодически изменять какой-либо ее параметр. Такое явление называется *параметрическим резонансом*.

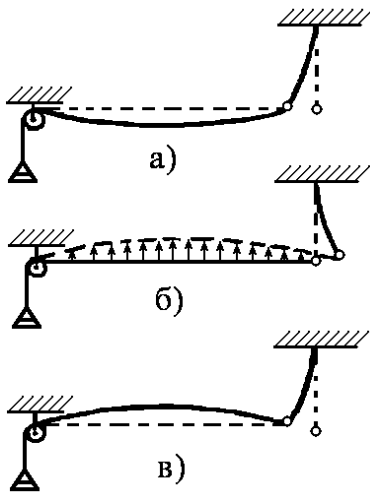


Рисунок 25 – Установка для определения частоты колебания вибратора

Если закрепленную за один конец нить натянуть горизонтально, прикрепив другим концом к вибратору, колеблющемуся вдоль натянутой нити, то в ней возникнут поперечные колебания из-за периодически меняющегося натяжения. Пусть вибратор, к которому прикрепена нить, в начальный момент времени отклонен влево и нить свободно провисает (рис. 25, а). Если стержень-вибратор начнет двигаться вправо, нить будет натягиваться и, когда он отклонится максимально вправо (рис. 25, б), нить займет горизонтальное положение, а все ее точки будут двигаться вверх (скорости некоторых точек указаны стрелками). При движении стержня-вибратора в обратном направлении натяжение нити ослабевает, но все ее точки продолжают по инерции двигаться вверх (рис.

25, в). За время следующего полного колебания стержня-вибратора нить снова провиснет. Таким образом, за время двух полных колебаний вибратора нить совершает только одно полное колебание. Следовательно, частота колебания вибратора вдвое больше частоты колебаний нити. Рассмотренный способ возбуждения колебаний, очевидно, является *параметрическим*, так как внешнее воздействие (колебания вибратора) вызывает периодическое изменение одного из параметров состояния нити (натяжения).

В любой системе, имеющей возможность совершать колебания, из-за каких-либо случайных воздействий извне возникают собственные колебания. *Если параметрическое воздействие на эту систему происходит с частотой, вдвое большей, чем частота ее собственных колебаний, то колебания начинают усиливаться* (выполняются условия параметрического

**резонанса**). Аналогичные явления можно вызвать и в электрической цепи, если с помощью внешних воздействий изменять ее емкость или индуктивность. На этом принципе основана работа параметрических генераторов электрических колебаний и параметрических усилителей электрических сигналов.

Как только вибратор начинает совершать колебания, они передаются нити и по ней распространяется упругая волна с частотой  $\omega$  и амплитудой  $A$ . При не слишком длинной нити и малых потерях энергии, точки нити будут совершать незатухающие колебания.

Примем за начало отсчета точку  $O$  (точка соприкосновения нити с блоком). Волна, дойдя до этой точки, отразится и пойдет обратно. Таким образом, у нас будет две волны, перемещающиеся в противоположных направлениях. Запишем уравнения этих волн:

$$y_1 = A \cdot \sin(\omega t + kx), \quad (121)$$

$$y_2 = A \cdot \sin(\omega t - kx + \pi). \quad (122)$$

Все точки нити отстают от колебаний вибратора, и это отставание тем

больше, чем меньше  $x$  в выбранной системе отсчета (рис. 26), поэтому уравнение (121) представляет собой уравнение плоской бегущей прямой волны, а (122) – отраженной. В фазе отраженной волны перед  $kx$  записан минус, так как фаза колебаний точек нити, вызванных отраженной волной, тем меньше, чем сильнее эта точка удалена от начала координат. Кроме этого, в фазе отраженной волны учтено условие отражения в точке  $O$  (блок не колеблется в вертикальном направлении). Так как точка  $O$  не совершает колебаний, то, очевидно, что фаза колебания в точке  $O$  в прямой волне отличается от фазы колебания этой же точки в отраженной волне на  $\pi$ .

В результате наложения прямой и отраженной волн все точки будут совершать сложные колебания по закону:

$$y = y_1 + y_2 = 2A \sin \frac{\omega t + kx + \omega t - kx + \pi}{2} \cdot \cos \frac{\omega t + kx - \omega t + kx - \pi}{2}$$

или

$$y = 2A \cos\left(kx - \frac{\pi}{2}\right) \cdot \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right). \quad (123)$$

Таким образом, мы получили **уравнение установившейся стоячей волны** в нити (123). Выражение  $\left| 2A \cos\left(kx - \frac{\pi}{2}\right) \right|$  не зависит от времени, и представляет собой **амплитуду стоячей волны**.

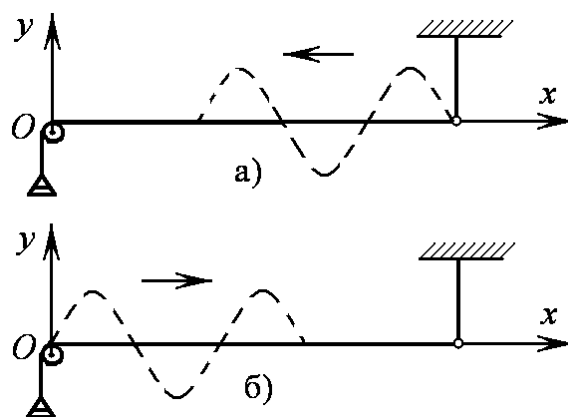


Рисунок 26 – Распространение волны

Как видно, амплитуда колебаний точек нити периодически меняется по гармоническому закону в зависимости от расстояния  $x$  от начала координат. Найдем максимальную и минимальную амплитуды:

1) В точках, где

$$kx - \frac{\pi}{2} = 2n \frac{\pi}{2} = n\pi \quad \text{или} \quad kx = (2n+1) \frac{\pi}{2}, \quad \text{где } (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (124)$$

$\cos(n\pi) = 1$  и **амплитуда колебаний достигает максимальной величины  $2A$** . Эти точки называются **пучностями стоячей волны**. Из условия (124) получаем значения координатных пучностей:

$$x_{\text{пучн}} = (2n+1) \frac{\pi}{2k} = \left[ k = \frac{2\pi}{\lambda} \right] = (2n+1) \frac{2\pi}{4k} = (2n+1) \frac{\lambda}{4}. \quad (125)$$

2) Точки нити, фазы колебаний которых:

$$kx - \frac{\pi}{2} = (2n+1) \frac{\pi}{2} \quad \text{или} \quad kx = 2n \frac{\pi}{2} = n\pi, \quad \text{где } (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (126)$$

вообще не колеблются, так как  $\cos(2n+1) \frac{\pi}{2} = 0$ , следовательно, **амплитуда колебаний равна нулю  $2A \cos(kx - \frac{\pi}{2}) = 0$** . Эти точки называются **узлами стоячей волны**.

Узлы возникают в тех точках, где прямая и отраженная волны складываются в противоположных фазах и гасят друг друга. Из (126) следует, что координаты узлов принимают значения

$$x_{\text{узел}} = \frac{n\pi}{k} = \left[ k = \frac{2\pi}{\lambda} \right] = \frac{2n\pi}{2k} = n \frac{\lambda}{2} = 2n \frac{\lambda}{4}. \quad (127)$$

Расстояние между двумя узлами (127) или пучностями (125) называют **длиной стоячей волны**, поэтому

$$\lambda_{\text{ст}} = x_{\text{пучн}(n+1)} - x_{\text{пучн}(n)} = (2(n+1)+1) \frac{\lambda}{4} - (2n+1) \frac{\lambda}{4} = \frac{\lambda}{2},$$

$$\lambda_{\text{ст}} = x_{\text{узел}(n+1)} - x_{\text{узел}(n)} = (n+1) \frac{\lambda}{2} - n \frac{\lambda}{2} = \frac{\lambda}{2}.$$

Таким образом, длина стоячей волны

$$\lambda_{\text{ст}} = \frac{\lambda}{2}. \quad (128)$$

Так как оба конца нити закреплены и в них образуются узлы, то на длине нити  $l$  должно укладываться целое число длин волн стоячей волны.

$$l = n\lambda_{\text{ст}} = n \frac{\lambda}{2}. \quad (129)$$

На рис. 27 показано образование стоячей волны при отражении, сопровождающемся изменением фазы на  $\pi$ . Смещение частиц нити, которое происходило бы под действием прямой волны, показано сплошной линией, а смещение тех же частиц под действием отраженной волны – пунктиром. Жирная линия показывает результирующее смещение точек нити. На рисунке

зафиксирован момент времени, когда к точке  $O$  приходит прямая волна с фазой, отличной от нуля.

**Главной особенностью стоячей волны является то, что она не переносит энергии.** Это подтверждается хотя бы тем, что расположение узлов и пучностей с течением времени не изменяется. Такая особенность стоячей волны возникает в результате того, что накладывающиеся волны переносят энергию в равном количестве, но в противоположных направлениях.

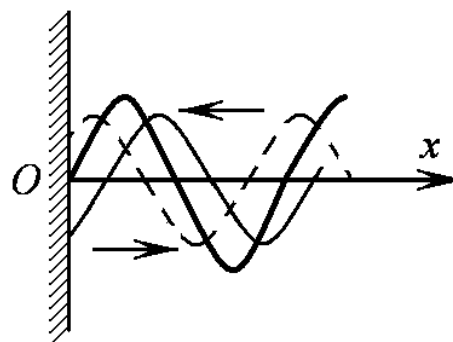


Рисунок 27 – Образование стоячей волны

### 3. Описание установки и методика измерения

На одном конце лабораторного стола закреплен вибратор, представляющий собой стержень, приводимый в колебательное движение при помощи электромагнита. Электромагнит питается переменным синусоидальным током, поэтому стержень совершает вынужденные колебания с частотой переменного тока. На другом конце стола закреплен легкий, с неподвижной осью, блок. Нить привязана одним концом к вибратору, а другой конец, переброшенный через блок, натягивается грузом, лежащим на чашечке. Схематически установка изображена на рис. 25.

Для определения частоты вибратора необходимо получить на нити устойчивую картину стоячих волн, что возможно при возникновении параметрического резонанса, т.е. когда частота вибратора вдвое больше одной из частот собственных колебаний натянутой нити. При этом на длине нити  $l$  (между вибратором и блоком) уложится целое число стоячих длин волн  $\lambda_{ст}$ , (129).

Собственная частота колебаний нити зависит от ее натяжения. Если при некотором натяжении частота вибратора  $\nu_v$  вдвое больше самой низкой частоты  $\nu$  (основной тон) нити, то на ее длине укладывается одна стоячая волна. Уменьшая натяжение нити, можно получить условия, при которых  $\nu_v$  вдвое больше второго, третьего, ...,  $n$ -го обертонов (частоты  $\nu_n$  кратны основному тону) нити:  $\nu_v = 2\nu_n$ . При этом на длине нити  $l$  будет укладываться соответственно 2, 3, ...,  $n$  стоячих волн.

Частота колебаний нити  $\nu$  связана с  $\lambda$  соотношением

$$\nu = v/\lambda, \quad (130)$$

где  $v$  – скорость распространения волн в нити.

Скорость распространения волн в нити зависит от силы натяжения нити  $F$ , обусловленной неподвижным грузом, и от ее линейной плотности  $\rho$ , определяемой массой всей нити  $m$  и ее длиной  $L$ . Так как  $v = \sqrt{\frac{FL}{m}} = \sqrt{\frac{F}{\rho}}$  то, с учетом (130) и (129), получим

$$v = \frac{v}{\lambda} = \frac{1}{\lambda} \sqrt{\frac{F}{\rho}} = \frac{n}{2l} \sqrt{\frac{F}{\rho}}.$$

Сила натяжения нити  $F$  создается весом груза, поэтому

$$F = P = Mg,$$

где  $M$  – масса груза (сюда входит и масса чашечки). Учитывая, что частота вибратора вдвое больше частоты колебания нити, получим

$$v_b = 2v = 2 \frac{n}{2l} \sqrt{\frac{F}{\rho}} = \frac{n}{l} \sqrt{\frac{Mg}{\rho}}. \quad (131)$$

#### 4. Статистическая обработка результатов измерений

Проводится аналогично тому, как показано в лабораторной работе 4-1.

#### 5. Порядок выполнения работы и обработка результатов измерения

1. Измерьте один раз длину нити  $l$  (между точкой крепления на вибраторе и точкой касания ее с блоком) с точностью, которую позволяет линейка, и запишите ее в таблицу измерений.

2. Включите электромагнит, вызвав колебания стержня-вибратора.

3. Постепенно нагружая чашечку разновесами, добейтесь устойчивых стоячих волн.

4. Запишите число стоячих длин волн  $n$ , уложившихся на длине нити  $l$ , а также получившуюся при этом массу груза  $M$  в таблицу измерений. Опыт повторить три-пять раз, добиваясь установления устойчивых стоячих волн с различным числом длин волн  $\lambda_{\text{СТ}}$  на длине нити  $l$ .

5. Снимите нить и измерьте один раз ее полную длину  $L$  с точностью линейки. Масса нити  $m$  указана на установке. Рассчитайте линейную плотность нити по формуле  $\rho = m/L$  и запишите значение в таблицу измерений.

6. По формуле (131) вычислите частоту вибратора для каждого варианта устойчивых стоячих волн.

7. Вычислите абсолютную и относительную погрешности определения частоты вибратора и запишите конечный результат как доверительный интервал с относительной ошибкой.

#### 6. Контрольные вопросы

1. В чем заключается явление параметрического резонанса? Объясните это, используя лабораторную работу № 5-1. Каково отношение частота вибратора к собственной частоте колебаний нити в этой работе?

2. Какова разность между бегущими и стоячими волнами? Рассмотрите амплитуды и фазы колебания в различных точках в обоих случаях.

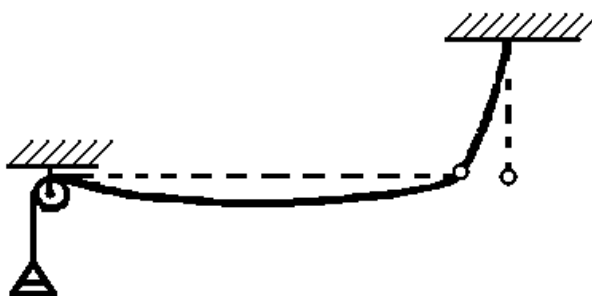
3. Что называется стоячей волной? При каких условиях возникают стоячие волны? Получите уравнение стоячей волны. Проанализируйте это уравнение.



4. Чем характеризуются колебания среды при наличии стоячих волн?
5. Что такое длина волны? Какова длина стоячей волны?
6. Что называют пучностью стоячей волны? Выведите уравнение для пучности стоячей волны.
7. Что называют узлом стоячей волны? Выведите уравнение для узла стоячей волны.
8. Как влияют условия отражения волн на расположение пучностей и узлов стоячей волны?
9. Почему при различном натяжении нити на ее длине укладывается различное число длин стоячей волны?
10. Какова цель лабораторной работы 5-1? Опишите поэтапно ход работы. Получите уравнение для вычисления частоты колебания вибратора.

### 7. Протокол выполнения лабораторной работы № 5-1

- 1) **Тема:** Определение частоты колебания вибратора методом Мельде.
- 2) **Цель работы:** Ознакомление с явлениями параметрического резонанса, с условиями возникновения стоячих волн и определение частоты вибратора.
- 3) **Схема прибора или установки**



#### 4) Таблица приборов

| № п/п. | Наименование | Тип | Заводской № | Предел шкалы | Цена деления | Класс точности |
|--------|--------------|-----|-------------|--------------|--------------|----------------|
| 1      | Разновесы    |     |             |              |              |                |
| 2      | Линейка      | У   | –           | 1000 мм      | 1 мм         | 1 мм           |

#### 5) Формулы расчета величин и их погрешностей:

$$1) \rho = m/L;$$

$$2) v_B = \frac{n}{l} \sqrt{\frac{Mg}{\rho}};$$

$$3) \Delta v_B = t_{\alpha, n} \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (\Delta v_{Bi})^2}{n(n-1)}}, \text{ где } t_{0,95;5} = 2,77.$$

**6) Таблица измерений**

$l =$  \_\_\_\_\_ м – длина нити от вибратора до оси блока;  $L =$  \_\_\_\_\_ м;  $m =$  \_\_\_\_\_ кг.

| № | $M$ , кг | $n$ | $v_B$ , Гц | $\Delta v_B$ , Гц | $(\Delta v_B)^2$ , Гц |
|---|----------|-----|------------|-------------------|-----------------------|
| 1 |          |     |            |                   |                       |
| 2 |          |     |            |                   |                       |
| 3 |          |     |            |                   |                       |
| 4 |          |     |            |                   |                       |
| 5 |          |     |            |                   |                       |
|   |          |     |            |                   |                       |

**7) Расчеты величин и их погрешностей:****8) Запись окончательных результатов:**

$$v_B = (\langle v_B \rangle \pm \Delta v_B)_{\alpha} \text{ Гц}; \quad \delta_{v_B \%} = \frac{\Delta v_B}{\langle v_B \rangle} \cdot 100 \%$$

**9) Вывод:**

**10) Работу выполнил:**

Работу проверил:

### *Лабораторная работа № 5-2*

## ОПРЕДЕЛЕНИЕ СКОРОСТИ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ЗВУКОВЫХ ВОЛН В ВОЗДУХЕ С ПОМОЩЬЮ ЯВЛЕНИЯ РЕЗОНАНСА

### 1. Цель работы:

- 1.1. Изучение распространения упругих волн в воздухе.
- 1.2. Определение скорости распространения звуковых волн.

### 2. Основные понятия

(Смотрите теорию к лабораторной работе 5-1).

При распространении упругих волн происходит деформация вещества. В твердых телах происходит деформация сжатия или растяжения. Она характеризуется относительным изменением длины тела  $\varepsilon = \frac{\Delta x}{x}$ , а упругие свойства твердого тела характеризуются *модулем Юнга*

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon} = \frac{F}{S} \frac{x}{\Delta x},$$

где  $F$  – сила, действующая на поверхность  $S$ .

Скорость продольных упругих волн в твердом теле

$$v = \sqrt{\frac{E}{\rho}}, \quad (132)$$

а поперечных

$$v = \sqrt{\frac{G}{\rho}}, \quad (133)$$

где  $G = \frac{\tau}{\gamma}$  – модуль сдвига ( $\tau$  – напряжение;  $\gamma$  – величина относительного сдвига), а  $\rho$  – плотность вещества.

Упругая волна в газах представляет собой распространяющуюся последовательность областей сжатия и разрежения.

Скорость распространения упругих звуковых волн в газах зависит от температуры газа. Для идеальных газов скорость звука

$$v = \sqrt{\gamma \frac{R}{\mu} T}, \quad (134)$$

где  $R = 8,31 \frac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{К}}$  – универсальная газовая постоянная;  $T$  – термодинамическая температура;  $\mu$  – молярная масса;  $\gamma = C_p/C_v$  – постоянная для данного газа, зависящая от отношения теплоемкостей (теплоемкость равна количеству теплоты которое необходимо сообщить газу для нагревания его на один градус). *Скорость звуковой волны растет с увеличением температуры.*

В воздухе при  $T = 273 \text{ К}$  скорость звуковой волны  $v = 330 \text{ м/с}$ , а при  $T = 293 \text{ К}$  –  $v = 343 \text{ м/с}$ .

**Скорость упругих волн в жидкостях и продольных волн в твердых телах превышает скорость звука в газах и зависит от плотности среды.**

**Звуковые волны (или звук)** – это механические волны с частотой от 16 Гц до 20 кГц, которые воспринимает ухо человека.

Звуковые волны с частотами менее 16 Гц называются **инфразвуками**, а более 20 кГц – **ультразвуками**.

Скорость звука ( $v$ ), как и других механических волн, изменяется при переходе из одной среды в другую, но частота ( $\nu$ ) и период ( $T$ ) колебаний частиц среды остаются постоянными. Звук не может распространяться в вакууме.

Звуки разделяют на **тоны** и **шумы**.

**Тон (музыкальный тон)** – это звук, который создаёт тело при гармонических колебаниях.

Тоны отличаются по громкости и высоте.

**Высота тона** – это субъективная характеристика звука, которая определяется частотой колебаний.

**Шум** – это звук, который состоит из колебаний различной амплитуды и частоты.

**Громкость** – это субъективная характеристика звука, которая определяется амплитудой колебаний (и, следовательно, энергией, которую переносит волна за единицу времени через единицу поверхности) в звуковой волне. Громкость звука зависит от интенсивности звука. Ухо способно воспринимать звуки с интенсивностью  $I$  (**интенсивность звука** – среднее значение плотности потока энергии в единицу времени, которую несет звуковая волна) около  $10^{-12} \dots 10^{-11} \text{ Вт/м}^2$ , где  $I_0 \approx 10^{-12} \text{ Вт/м}^2$  – **порог слышимости** (минимальная интенсивность звука, которую можно услышать).

Мерой чувствительности органов слуха есть **уровень интенсивности (громкость звука)**

$$L = 10 \lg \left( \frac{I}{I_0} \right). \quad (135)$$

Единица измерения децибел (дБ). Ухо человека воспринимает звуки громкостью от 0 до 130 дБ. Затухание в 20 дБ соответствует уменьшению интенсивности звука в 100 раз.

### 3. Описание установки и методика измерения

Фазовая скорость  $v$  распространения звуковой волны в упругой среде связана с частотой  $\nu$  источника волны и длиной волны  $\lambda$  соотношением

$$v = \lambda \nu,$$

поэтому, зная частоту источника звука и измерив длину волны, можно вычислить скорость распространения звука в среде.

Источником звука в рассматриваемой работе является телефон, на который подается переменное напряжение звуковой частоты от генератора ГЗ-36.

На рис. 28 изображена установка, с помощью которой определяется длина волны. Внутри тонкостенной металлической трубы 1 (диаметром 40...45 мм и длиной 900 мм) свободно перемещается стержень 2 с поршнем 3. Поршень состоит из двух войлочных кружков, прикрепленных к концу стержня посредством двух металлических шайб. С одного конца труба открыта, с другого – имеет крышку с отверстием, через которое проходит стержень. Длина стержня подобрана так, что поршень находится у края открытого отверстия трубы, когда стержень полностью вдвинут в трубу. Таким образом, длина выступающей из трубы части стержня 2 равна длине воздушного столба  $L$ .

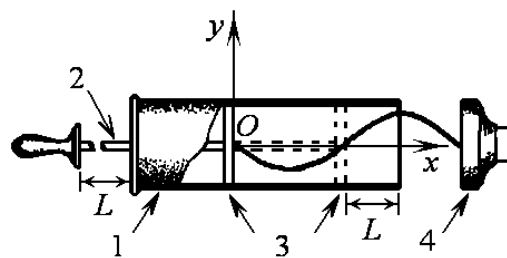


Рисунок 28 – Установка для определения длины звуковой волны

При включении телефона 4, находящегося возле открытого конца трубы, колебания мембраны передаются воздуху внутри трубы, т.е. по воздушному столбу к поверхности поршня будет распространяться продольная звуковая волна. Частота этой волны равна частоте переменного тока, поступающего от генератора ГЗ-36. Амплитуда колебаний частиц воздуха будет наибольшей, когда частота генератора совпадает с одной из собственных частот колебаний воздушного столба, т.е. возникнет явление резонанса. Чтобы получить резонанс, изменяют длину воздушного столба  $L$ , передвигая поршень. При этом изменяется и набор собственных частот колебаний воздушного столба, так как он зависит от длины столба.

При включении телефона 4, находящегося возле открытого конца трубы, колебания мембраны передаются воздуху внутри трубы, т.е. по воздушному столбу к поверхности поршня будет распространяться продольная звуковая волна. Частота этой волны равна частоте переменного тока, поступающего от генератора ГЗ-36. Амплитуда колебаний частиц воздуха будет наибольшей, когда частота генератора совпадает с одной из собственных частот колебаний воздушного столба, т.е. возникнет явление резонанса. Чтобы получить резонанс, изменяют длину воздушного столба  $L$ , передвигая поршень. При этом изменяется и набор собственных частот колебаний воздушного столба, так как он зависит от длины столба.

Волна, бегущая от мембраны, дойдя до поверхности поршня, отражается и скачком изменяет фазу на  $\pi$  (отражение от более плотной среды, аналогично отражению от закрепленного конца нити в лабораторной работе № 5-1). Если мембрана колеблется непрерывно, то по воздушному столбу одновременно, навстречу друг другу, будут распространяться две одинаковые продольные волны. В результате наложения прямой волны бегущей от мембраны и отраженной волны, в воздушном столбе возникают стоячие волны.

Если диаметр трубы меньше длины волны и стенки ее гладкие, то заметного затухания волны не происходит. Поэтому прямая и отраженная волны могут быть представлены уравнениями (121) и (122), которые применимы в предположении, что волна распространяется вдоль оси  $x$  и начало выбрано в точке  $O$  на поверхности поршня.

Получение стоячей волны и ее анализ аналогичны рассмотренным в лабораторной работе № 5-1, поэтому в дальнейшем воспользуемся формулами, полученными в предыдущей работе.

При установившейся стоячей волне у поверхности поршня всегда образуется узел, а у открытого конца трубы – пучность. У открытого конца трубы возникает пучность, так как на открытом конце трубы также происходит отражение волны, но без изменения фазы на противоположную. Частицы

воздуха, находящиеся внутри трубы, обладают меньшей свободой движения, чем те, которые находятся снаружи. Поэтому воздух вне трубы может рассматриваться как среда менее плотная, чем воздух внутри трубы. А при отражении от менее плотной среды фаза волны не изменяется.

Таким образом, на длине воздушного столба, в силу (125), должно уложиться нечетное число  $\lambda/4$  (на выходе трубы должна быть пучность):

$$L = (2n + 1) \frac{\lambda}{4}, \quad \text{где } n = 0, 1, 2, \dots \quad (136)$$

На рис. 27 показан один из случаев образования стоячей волны, полученной в результате сложения поперечных волн. В воздухе же распространяется продольная волна, поэтому данный рисунок можно считать справедливым и в этом случае, если представить себе, что пучности соответствуют максимальному разрежению воздуха, а узлы – максимальному сжатию.

Из формулы (136) следует, что

$$\lambda = \frac{4L}{(2n + 1)}, \quad (137)$$

где  $L$  – длина воздушного столба, в которой уложилось  $(2n + 1)$  четвертей длины волны.

#### 4. Статистическая обработка результатов измерений

Проводится аналогично тому, как показано в лабораторной работе № 4-1.

#### 5. Порядок выполнения работы и обработка результатов измерения

1. Установите прибор на столе и вдвиньте весь стержень в трубу.
2. Поднесите звучащий телефон к открытому концу трубы.
3. Постепенно выдвигайте стержень до того момента, когда сила звука станет максимальной. Это и будет означать, что наступил «первый» резонанс, когда на длине воздушного столба уложилась одна четверть бегущей волны  $\lambda/4$  (см. рис. 28).
4. Измерьте выступающую часть стержня  $L_{1i}$ , показания запишите в таблицу измерений. Повторите опыт пять раз.
5. Затем выдвинуть поршень до наступления второго резонанса. При этом сила звука опять будет максимальной, а на длине воздушного столба уложится  $3\lambda/4$  (см. рис. 28).
6. Измерьте выступающую часть стержня  $L_{2i}$ , показания запишите в таблицу измерений. Повторите опыт пять раз.
7. Определите длину стоячей волны, как разность измеренных длин стержня  $\lambda_{ст} = L_{2i} - L_{1i}$ , запишите результаты в таблицу измерений.
8. Запишите показания частоты  $\nu$  с генератора ГЗ-36 в таблицу измерений.

9. Воспользовавшись тем, что  $v = \lambda\nu$ , вычислите скорость звуковой волны при температуре и влажности, которые имели место в лаборатории во время опыта по формуле

$$v = 2\nu(L_2 - L_1).$$

10. Поскольку  $\lambda_{\text{ст}} = \lambda/2$ , то определите длину звуковой волны как  $\lambda = 2\lambda_{\text{ст}}$ , результат запишите в таблицу.

11. Вычислите скорость звука  $v_0$  в сухом воздухе при  $0^\circ\text{C}$ , если известно, что скорость звука в воздухе  $v$  изменяется в зависимости от температуры  $t$  по закону

$$v = v_0\sqrt{1 + 0,004t},$$

или

$$v_0 = \frac{2\nu(L_2 - L_1)}{\sqrt{1 + 0,004t}}.$$

12. Вычислите абсолютную и относительную погрешности определения скорости звука и запишите конечный результат как доверительный интервал с относительной ошибкой.

## 6. Контрольные вопросы

1. При каком условии может возникать резонанс в воздушном столбе?
2. Как образуется стоячая волна? Вывести уравнение стоячей волны.
3. Чем отличается стоячая волна от бегущей волны?
4. От чего зависит скорость звуковой волны в воздухе?
5. Что такое громкость звука, тон, шум?
6. Как определяется скорость звуковой волны в воздухе с помощью явления резонанса?

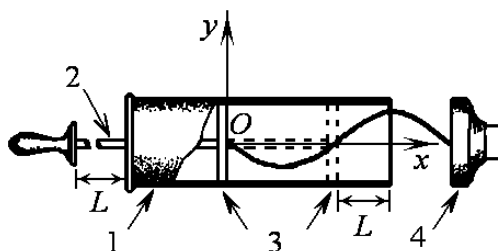
Определение скорости распространения звуковых волн в воздухе с помощью явления резонанса.

## 7. Протокол выполнения работы № 5-2

1) **Тема:** Определение скорости распространения звуковых волн в воздухе .

2) **Цель работы:** Ознакомление с явлением резонанса, условиями возникновения стоячих звуковых волн и определение скорости звуковой волны.

3) **Схема прибора или установки**



1 – металлическая труба; 2 – стержень; 3 – поршень; 4 – телефон

**4) Таблица приборов**

| № п/п. | Наименование | Тип | Заводской № | Предел шкалы | Цена деления | Класс точности |
|--------|--------------|-----|-------------|--------------|--------------|----------------|
| 1      | Разновесы    |     |             |              |              |                |
| 2      | Линейка      | У   | –           | 1000 мм      | 1 мм         | 1 мм           |

**5) Формулы расчета величин и их погрешностей:**

1)  $\lambda_{ст} = L_2 - L_1$ ;

2) Скорость звука при температуре в лаборатории:  $v = 2v\lambda_{ст}$ ;

3)  $\Delta v = t_{\alpha, n} \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (\Delta v_i)^2}{n(n-1)}}$ , где  $t_{0,95;5} = 2,77$  – коэффициент Стьюдента;

4) Длина звуковой волны  $\lambda = 2\lambda_{ст}$ ;

5) Скорость звука при температуре 0°C:  $v_0 = \frac{2vv}{\sqrt{1+0,004t}}$ ,

где  $t$  – температура воздуха в аудитории.**6) Таблица измерений** $v =$  \_\_\_\_\_ Гц – частота генератора ГЗ-36;  $t =$  \_\_\_\_\_ °C.

| № | $L_{1i}$ , мм | $L_{2i}$ , мм | $\lambda_{сти}$ | $v_i$                 | $\Delta v_i$ | $(\Delta v_i)^2$        |
|---|---------------|---------------|-----------------|-----------------------|--------------|-------------------------|
| 1 |               |               |                 |                       |              |                         |
| 2 |               |               |                 |                       |              |                         |
| 3 |               |               |                 |                       |              |                         |
| 4 |               |               |                 |                       |              |                         |
| 5 |               |               |                 |                       |              |                         |
|   |               |               |                 | $\langle v \rangle =$ |              | $\sum (\Delta v_i)^2 =$ |

**7) Расчеты величин и их погрешностей:****8) Запись окончательных результатов:**

$$v = (\langle v \rangle \pm \Delta v)_\alpha \text{ м/с}; \delta_{v\%} = \frac{\Delta v}{\langle v \rangle} \cdot 100\% = \dots \%; \lambda = \dots \text{ м}; v_0 = \dots \text{ м/с}.$$

**9) Вывод:****10) Работу выполнил:**

Работу проверил:



### Лабораторная работа № 5-3

## ОПРЕДЕЛЕНИЕ ДЛИНЫ СТОЯЧЕЙ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ВОЛНЫ

### 1. Цель работы:

1.1. Изучение условий образования стоячих электромагнитных волн.

1.2. Определение длины бегущей электромагнитной волны.

### 2. Основные понятия

(Смотрите теорию к лабораторной работе № 5-1).

**Электромагнитными волнами** называются распространяющиеся в пространстве колебания векторов электрического и магнитного полей (рис. 25). Уравнения для  $E$  и  $H$  запишем в виде:

$$\begin{aligned} E &= E_0 \cdot \sin(\omega t \pm kx), \\ H &= H_0 \cdot \sin(\omega t \pm kx), \end{aligned} \quad (138)$$

где  $\omega$  – циклическая частота электромагнитной волны;  $k = 2\pi/\lambda$  – волновое число;  $x$  – расстояние от источника волн до рассматриваемой точки волнового поля.

**Скорость (фазовая скорость)**  $v$  электромагнитной волны в среде определяется из уравнения Максвелла и равна

$$v = \frac{c}{\sqrt{\epsilon\mu}},$$

где  $\epsilon$  и  $\mu$  – относительные диэлектрическая и магнитная проницаемости среды;

$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0\mu_0}}$  – скорость света в вакууме. Скорость распространения

электромагнитных волн в данной среде совпадает со скоростью света в этой среде.

**Электромагнитные волны являются поперечными**, и колебания векторов напряженности  $\vec{E}$  переменного электрического поля и индукции  $\vec{H}$  переменного магнитного поля взаимно перпендикулярны и лежат в перпендикулярной вектору  $\vec{v}$  скорости распространения волны. Векторы  $\vec{v}$ ,  $\vec{E}$ ,  $\vec{H}$  образуют правовинтовую систему: из конца вектора  $\vec{v}$  вращение от  $\vec{E}$  к  $\vec{H}$  по кратчайшему расстоянию видно происходящим против часовой стрелки (рис. 23).

Модули векторов  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  в плоской электромагнитной волне связаны соотношением

$$\sqrt{\epsilon\epsilon_0} E = \sqrt{\mu\mu_0} H, \quad (139)$$

где  $\epsilon_0$  и  $\mu_0$  – электрическая и магнитная постоянные;  $\epsilon$  и  $\mu$  – диэлектрическая и магнитная проницаемости среды.

Взаимно перпендикулярные векторы  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  в электромагнитной волне, распространяющиеся в свободном пространстве, колеблются в одинаковой фазе

– они одновременно обращаются в нуль и одновременно достигают максимальных значений.

Линия, касательная к которой в каждой точке совпадает с направлением распространения волны в этой точке (т.е. с направлением переноса энергии) называется *лучом*. Энергия переносится в направлении вектора  $\vec{v}$ .

Плотность потока энергии электромагнитной волны определяется векторным произведением  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$

$$P = [\vec{E} \times \vec{H}]. \quad (140)$$

**Интенсивностью электромагнитной волны  $I$**  называется величина энергии, которую в среднем переносит волна за единицу времени через единичную площадку, перпендикулярную к направлению распространения волны (**модуль вектора Умова-Пойтинга**):

$$I = \langle P \rangle = \frac{E \cdot H}{2}. \quad (141)$$

**Стоячая волна** образуется в результате наложения двух волн, распространяющихся во взаимно противоположных направлениях, если эти волны удовлетворяют условиям: их частоты, амплитуды и направления колебаний одинаковы. **Первоначальная и отраженная волны, складываясь, могут создавать стоячие ЭМВ.**

Колебания электрического поля бегущей (первичной) волны в точке  $x$

$$E_1 = E_0 \cdot \sin(\omega t - kx). \quad (142)$$

Колебания поля отраженной волны в точке  $x$

$$E_2 = E_0 \cdot \sin(\omega t + kx - \varphi), \quad (143)$$

где  $\varphi$  – величина запаздывания по фазе колебаний поля отраженной волны в точке  $x = 0$  по сравнению с колебаниями первичной волны в той же точке. Это запаздывание можно объяснить двумя причинами:

1) До возвращения в точку  $x = 0$  волна должна дважды пройти все расстояние. Следовательно, возникает отставание по фазе

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi \cdot \Delta x}{vT} = \frac{2\pi \cdot \Delta x}{\lambda};$$

2) При отражении от конца линии возможно изменение фазы на  $\pi$ .

Результирующее поле первоначальной и отраженной волн равно:

$$E = E_1 + E_2 = E_0 (\sin(\omega t - kx) + \sin(\omega t + kx - \varphi)).$$

Так как  $(\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta) = 2 \cos \beta \cdot \sin \alpha)$ , то если обозначить

$$\alpha = \omega t - \frac{\varphi}{2}, \quad \beta = kx - \frac{\varphi}{2},$$

получим

$$E = E_1 + E_2 = 2E_0 \cos\left(kx - \frac{\varphi}{2}\right) \cdot \sin\left(\omega t - \frac{\varphi}{2}\right), \quad (144)$$

т.е. уравнение колебания с частотой первоначальной волны и начальной фазой  $\frac{\varphi}{2}$ . Амплитуда колебаний  $E_{\text{ст}}$  стоячей волны не зависит от времени и является периодической функцией расстояния  $x$  от источника волн

$$E_{\text{ст}} = 2E_0 \left| \cos \left( kx - \frac{\varphi}{2} \right) \right|. \quad (145)$$

Точки, в которых амплитуда  $E_{\text{ст}}$  равна нулю, называются **узлами стоячей волны**:

$$kx - \frac{\varphi}{2} = (2m + 1) \frac{\pi}{2}, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (146)$$

Точки, в которых амплитуда  $E_{\text{ст}}$  максимальна и равна  $2E_0$ , называются **пучностями стоячей волны**:

$$kx - \frac{\varphi}{2} = 2m \frac{\pi}{2}, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (147)$$

При отражении волны от границы с более плотной средой фаза изменяется на  $\pi$  и происходит **потеря полуволны**.

**Длиной стоячей волны**  $\lambda_{\text{ст}}$  называется расстояние между двумя соседними узлами или пучностями равное половине длины бегущей волны

$$\lambda_{\text{ст}} = \frac{\lambda}{2}. \quad (148)$$

**Колебания всех точек стоячей волны**, лежащих между соседними узлами, **происходят с различными амплитудами, но в одной фазе**, в то время, как в **бегущей волне**, наоборот, **колебания всех точек происходят с одинаковыми амплитудами, но в различных фазах**.

**В стоячей волне отсутствует перенос энергии**, так как энергия переносится в равных количествах в противоположных направлениях.

**В распространяющейся ЭМВ колебания электрического и магнитного полей находятся в одинаковой фазе. В стоячей ЭМВ между колебаниями векторов  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  существует разница фаз.** Причина такого различия заключается в изменении фазы колебаний при отражении ЭМВ от конца линии. Скорость  $\vec{v}$  распространения связана с векторами  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  правилом правого буравчика, поэтому для изменения скорости волны на противоположную, надо, чтобы один из векторов изменил фазу на  $\pi$ . Следовательно, при отражении фаза колебаний одного из векторов должна измениться скачкообразно на  $\pi$ .

**Таким образом, в стоячей ЭМВ пучности и узлы электрического и магнитного полей сдвинуты на  $\pi$ .** Узлы электрического поля совпадают с пучностями магнитного поля и наоборот.

### 3. Описание установки и методика измерения

Излучателем электромагнитных волн является линейный вибратор. Роль такого вибратора выполняет антенна, возбужденная переменным электрическим током высокой частоты.

В свободном пространстве, в так называемой волновой зоне, где расстояние от вибратора до приемника  $l \gg \lambda$ , распространяются поперечные электромагнитные волны, уравнение которых в случае плоской электромагнитной волны можно представить в виде (138).

В данной работе определяется длина электромагнитной волны методом стоячих волн. Стоячие электромагнитные волны можно получить с помощью установки, изображенной на рис. 29. Плоская электромагнитная волна, излучаемая генератором 1, распространяется по волноводу 2 к рупору 3 и излучается в пространство вдоль оси, проходящей через центры волновода и рупора. В дальнейшем для простоты будем рассматривать только электрическую составляющую  $E$  электромагнитной волны. Плоская бегущая волна вида

$$E_1 = E_0 \cdot \sin(\omega t - kx)$$

падает на гладкую металлическую пластину 4 (начало отсчета выбрано в точке 0 излучения волны генератором), а отраженная волна

$$E_2 = E_0 \cdot \sin(\omega t + kx - \pi)$$

складываясь с падающей, образует стоячую электромагнитную волну вида

$$E = E_1 + E_2 = 2E_0 \cos\left(kx - \frac{\pi}{2}\right) \cdot \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right).$$

В точке отражения фаза колебания электрического вектора  $E$  в электромагнитной волне меняется на противоположную, и на пластине образуется узел стоячей волны. Пучности волны образуются на расстоянии  $x$  (см. формулу (147) и лабораторную работу № 5-1):

$$x_{\text{пучн}} = (2m + 1) \frac{\lambda}{4}, \quad \text{где } m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad (149)$$

а узлы, в соответствии с (146) – на расстояниях

$$x_{\text{узел}} = \frac{2m\lambda}{4}, \quad \text{где } m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots. \quad (150)$$

Расстояние между двумя узлами или пучностями будет представлять длину стоячей волны, которая в два раза меньше бегущей:

$$\lambda_{\text{ст}} = \frac{\lambda}{2}.$$

Отсюда видно, что длину бегущей электромагнитной волны можно определить, зная расстояние между двумя пучностями по максимальному показанию индикатора электрического поля.

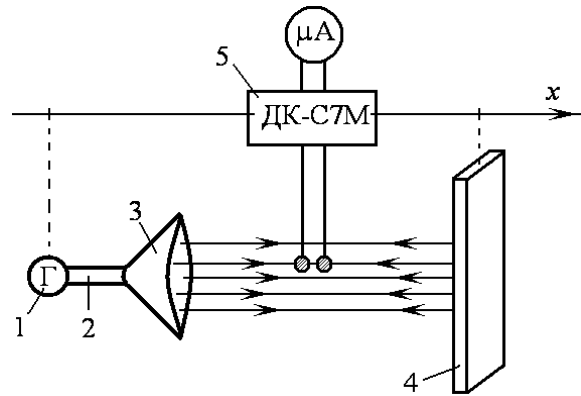


Рисунок 29 – Установка для определения длины стоячей ЭМВ

В качестве индикатора 5, измеряющего интенсивность излучения в точке наблюдения, служит детектор типа ДК-С7М, контакты которого являются ненастроенной антенной; концы детектора присоединяются к микроамперметру.

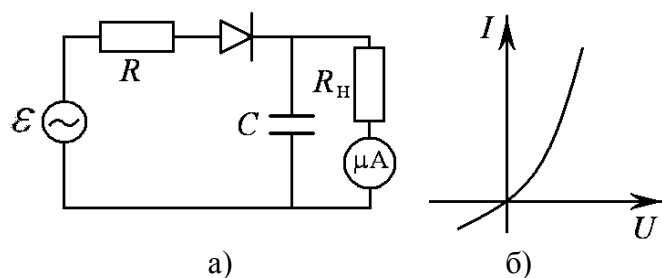


Рисунок 30 – а) Схема детектора ДК-С7М;  
б) ВАХ детектора

Эквивалентную схему индикатора приемника можно представить в виде, указанном на рис. 30, а, где  $\mathcal{E}$  – ЭДС, пропорциональная амплитуде напряженности электрического поля в точке наблюдения,  $R$  – внутреннее сопротивление детектора,  $R_{\text{н}}$  – сопротивление нагрузки и  $C$  – емкость. Из

приведенной схемы видно, что она представляет электрическую цепь однополупериодного выпрямителя. Среднее значение выпрямленного тока в такой цепи будет определяться характеристикой детектора ДК-С7М, которая представлена на рис. 30, б. Для малых сигналов характеристика зависимости тока  $I$  от напряжения  $U$  имеет вид  $I = \alpha U^2$ . Так как  $U$  пропорционально амплитуде поля  $E$ , то ток пропорционален  $E^2$  и, следовательно, интенсивности электромагнитного поля  $I_E$ .

#### 4. Статистическая обработка результатов измерений

Проводится аналогично тому, как показано в лабораторной работе № 4-1.

#### 5. Порядок выполнения работы и обработка результатов измерения

1. Расположите металлическую пластину на расстоянии 400 мм от излучателя (генератора).

2. Между пластиной и излучателем поместите зонд с детектором.

3. Поворачивая антенну зонда-детектора вокруг горизонтальной оси и перемещая вдоль стоячей волны, получите максимальное значение тока детектора.

4. Перемещая зонд вдоль оси излучателя (вдоль стоячей волны электромагнитного поля) от пластины к излучателю, измерьте зависимость тока детектора от координаты зонда  $I = f(x)$ , оно будет аналогично распределению интенсивности электромагнитной волны  $I_E = f(x)$ .

5. Координату зонда  $x$  отсчитывать от пластины. Измерить и записать в таблицу значения тока детектора  $I$ , для координаты  $x$ , изменяющейся в пределах от 20 мм до 340 мм. Перемещать зонд следует так, чтобы  $x$  менялось через каждые 20 мм. Близко к излучателю производить измерения не рекомендуется.

6. По полученным значениям построить график изменения интенсивности  $I_E = f(x)$ .

7. Рассчитать длину стоячей волны из условия (150), где  $\lambda_{ст}$  расстояние между двумя ближайшими минимумами (максимумами) кривой  $f(x)$ .

8. Рассчитать длину бегущей электромагнитной волны  $\lambda = 2\lambda_{ст}$ .

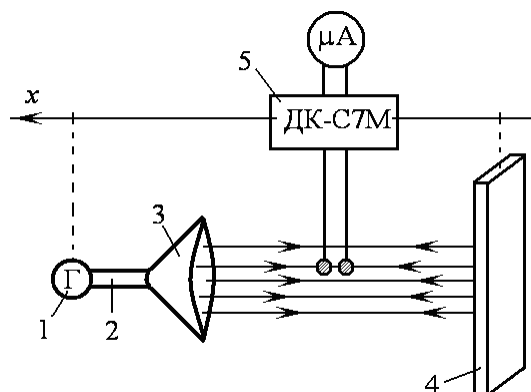
9. Показать из результатов опыта, что фаза электрического вектора при отражении от металлической пластины изменилась на  $\pi$ .

## 6. Контрольные вопросы

1. Что называется электромагнитной волной?
2. Изобразите графически вид электромагнитной волны и укажите, в каких плоскостях совершают колебания векторы  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  в линейно поляризованной волне, что называется лучом ЭМВ? Что называется интенсивностью электромагнитной волны?
3. Выведите формулу стоячей волны для колебания вектора электрического поля  $\vec{E}$ .
4. Выведите формулы для определения координат пучностей и узлов стоячей ЭМВ.
5. Объясните расположение пучностей и узлов электрического и магнитного полей в стоячей ЭМВ, изменение их фазы.
6. Объясните принцип работы приемника электромагнитного излучения.
7. Как можно определить длину электромагнитной волны экспериментально?

## 7. Протокол выполнения лабораторной работы № 5-3

- 1) **Тема:** Определение длины стоячей электромагнитной волны.
- 2) **Цель работы:** Изучение условий образования стоячих электромагнитных волн. Определение длины бегущей электромагнитной волны.
- 3) **Схема прибора или установки**



- 1 – генератор; 2 – волновод; 3 – рупор;  
4 – металлическая пластина; 5 – детектор индикатор.

**4) Таблица приборов**

| № п/п. | Наименование   | Тип | Заводской № | Предел шкалы | Цена деления | Класс точности |
|--------|----------------|-----|-------------|--------------|--------------|----------------|
| 1      | Микроамперметр |     |             |              |              |                |
| 2      | Линейка        | У   | –           | 1000 мм      | 1 мм         | 1мм            |

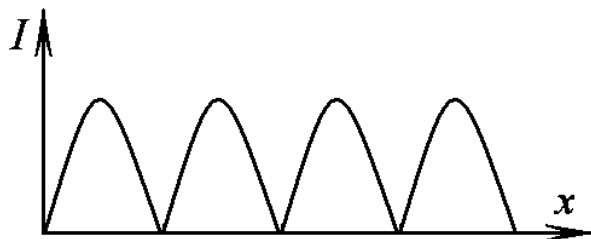
**5) Формулы расчета величин и их погрешностей:**

1)  $\lambda_{СТ} = \frac{2x_{\text{узел}}}{m}$ , где  $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

2) Длина бегущей ЭМВ:  $\lambda = 2\lambda_{СТ}$

**6) Таблица измерений**

| $x$ , мм | $I$ , мкА |
|----------|-----------|
| 20       |           |
| 40       |           |
| 60       |           |
| 80       |           |
| 100      |           |
| 120      |           |
| 140      |           |
| 160      |           |
| 180      |           |
| 200      |           |
| 220      |           |
| 240      |           |
| 260      |           |
| 280      |           |
| 300      |           |
| 320      |           |
| 340      |           |

**7) Расчеты величин и их погрешностей:****8) График зависимости  $I = f(x)$ . (Приведен пример графика)****9) Запись окончательных результатов:**

$\lambda = \dots$  м.

**10) Вывод:**

11) Работу выполнил:

Работу проверил:

**СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ**

1. Трофимова Т. И. Курс физики/Трофимова Т.И. – М.:Высшая школа, 1990.
2. Детлаф А.А. Курс физики/А.А. Детлаф, Б.М. Яворский – М.: Высшая школа, 1989.
3. Евграфова Н.Р. Руководство к лабораторным работам по физике/ Н.Р. Евграфова, В.А. Коган – М.: Высшая школа, 1970.
4. Георгиенко С.С. Колебания (методическое руководство к лабораторным работам по курсу физики)/ Георгиенко С.С. – Одесса, 1978.
5. Георгієнко С.С. Коливання (методичний посібник до лабораторних робіт з курсу фізики)/ Георгієнко С.С. – Одеса, 1999.



## З М І С Т

|   |         |
|---|---------|
| <b>Структура модуля 2 “Коливання та хвилі”</b>                                      | 3       |
| Зміст модулів   | 3       |
| Критерії оцінки знань   | 5       |
| <b>Вступ</b>  | 6, 77   |
| <b>Лабораторна робота № 4-1</b>   | 7, 79   |
| ДОСЛІДЖЕННЯ ГАРМОНІЧНИХ КОЛИВАНЬ  |         |
| <b>Лабораторна робота № 4-2</b>   | 16, 88  |
| ВИВЧЕННЯ СКЛАДАННЯ ЕЛЕКТРИЧНИХ ГАРМОНІЧНИХ КОЛИВАНЬ                                 |         |
| <b>Лабораторна робота № 4-3</b>   | 23, 95  |
| ВИЗНАЧЕННЯ ПАРАМЕТРІВ ЗГАСАЮЧИХ КОЛИВАНЬ ЗА ДОПОМОГОЮ ФІЗИЧНОГО МАЯТНИКА            |         |
| <b>Лабораторна робота № 4-4</b>   | 29, 102 |
| ДОСЛІДЖЕННЯ ЗГАСАЮЧИХ ЕЛЕКТРИЧНИХ КОЛИВАНЬ  |         |
| <b>Лабораторна робота № 4-5</b>   | 37, 110 |
| ДОСЛІДЖЕННЯ ВИМУШЕНИХ МЕХАНІЧНИХ КОЛИВАНЬ. МЕХАНІЧНИЙ РЕЗОНАНС                      |         |
| <b>Лабораторна робота № 4-6</b>   | 45, 118 |
| ДОСЛІДЖЕННЯ ВИМУШЕНИХ КОЛИВАНЬ У КОЛИВАЛЬНОМУ КОНТУРІ (послідовний $RLC$ -КОНТУР)   |         |
| <b>Лабораторна робота № 5-1</b>   | 55, 129 |
| ДОСЛІДЖЕННЯ СТОЯЧИХ ХВИЛЬ МЕТОДОМ МЄЛЬДЕ  |         |
| <b>Лабораторна робота № 5-2</b>   | 64, 139 |
| ВИЗНАЧЕННЯ ШВИДКОСТІ ПОШИРЕННЯ ЗВУКОВИХ ХВИЛЬ У ПОВІТРІ ЗА ДОПОМОГОЮ ЯВИЩ РЕЗОНАНСУ |         |
| <b>Лабораторна робота № 5-3</b>   | 70, 145 |
| ВИВЧЕННЯ ДОВЖИНИ СТОЯЧОЇ ЕЛЕКТРОМАГНІТНОЇ ХВИЛІ                                     |         |
| <b>СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ</b>  | 152     |





Навчальне видання

Криськів Світлана Казимирівна  
Марколенко Павло Юрійович

## КОЛИВАННЯ ТА ХВИЛІ

**ФІЗИКА**  
**МОДУЛЬ 2**

**ЧАСТИНА 3**

**Методичне керівництво**  
**до лабораторного циклу №2**  
**з фізики**

для студентів 1-го курсу всіх спеціальностей

Редактор – Кодрул Л.А.

Здано в набір 30.11.2011    Підписано до друку 26.12.2011  
Формат 60x90/16    Зам. № 47  
Наклад 500 прим.    Обсяг 9,7 друк. арк.  
Віддруковано на видавничому устаткуванні фірми RISO  
у друкарні редакційно-видавничого центру ОНАЗ ім. О.С. Попова  
м. Одеса, вул. Ковалевського, 5  
Тел. 720-78-94  
**ОНАЗ, 2011**