Міністерство транспорту та зв'язку України

ДЕРЖАВНА АДМІНІСТРАЦІЯ ЗВ'ЯЗКУ УКРАЇНИ

ОДЕСЬКА НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ ЗВ'ЯЗКУ ім. О. С. ПОПОВА

Кафедра теорії електричного зв'язку ім. А. Г. Зюко

В.Ю Дирда, П.В. Іващенко

ТЕОРІЯ ЕЛЕКТРИЧНОГО ЗВ'ЯЗКУ

Модуль 2. ***Передавання інформації в телекомунікаційних системах***

Навчальний посібник для бакалаврів

за напрямом вищої освіти **6.050903 – Телекомунікації**

Одеса 2010

ББК 32.811я7 План НМВ 2010 р.
УДК 621.391(075)

У навчальному посібнику для бакалаврів у восьми лекціях розглянуто: основні інформаційні характеристики джерел дискретних та неперервних повідомлень; ефективне кодування джерел дискретних повідомлень; кодування аналогових сигналів методами ІКМ, ДІКМ та ДМ; інформаційні характеристики каналів зв'язку; теореми Шеннона для джерел повідомлень та каналів зв'язку.

Особливістю посібника є наявність значної кількості прикладів та вправ, довідкового матеріалу, словника термінів та визначень, індивідуальних та тестових завдань. Розрахункові формули зведені в таблиці. Така побудова посібника є більш доцільною для використання студентами під час освоєння матеріалу з модуля 2.

СХВАЛЕНО
на засіданні кафедри
теорії електричного зв'язку ім. А.Г. Зюко
та рекомендовано до друку.
Протокол № 9 від 25.03.2010 р.

ЗАТВЕРДЖЕНО
методичною радою академії зв'язку.
Протокол № 6 від 30.03.2010 р.

ЗМІСТ

ВСТУП..4
1 ВХІДНІ ЗНАННЯ ТА ВМІННЯ ДО ВИВЧЕННЯ МОДУЛЯ 6
2 КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ..7
Пояснення до конспекту лекцій 7
Лекція 1. Інформаційні характеристики джерел дискретних повідомлень 7
Лекція 2. Інформаційні характеристики двох джерел дискретних повідомлень.. 12
Лекція 3. Кодування джерел дискретних повідомлень 16
Лекція 4. Інформаційні характеристики джерела неперервних повідомлень 27
Лекція 5. Кодування неперервних повідомлень 34
Лекція 6. Кодування неперервних повідомлень із передбаченням 47
Лекція 7. Інформаційні характеристики каналів електрозв'язку...................... 55
Лекція 8. Потенційні можливості передавання інформації каналами зв'язку.... 61
3 ТЕМИ ПРАКТИЧНИХ ЗАНЯТЬ ТА ЛАБОРАТОРНИХ РОБІТ....................... 65
4 РЕКОМЕНДАЦІЇ ЩОДО САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ 66
5 ЗАВДАННЯ ДЛЯ ПЕРЕВІРКИ ЗНАНЬ ТА ВМІНЬ З МОДУЛЯ 69
6 ВИХІДНІ ЗНАННЯ ТА ВМІННЯ З МОДУЛЯ... 74
ЛІТЕРАТУРА 75
ДОДАТОК А... 76

ВСТУП

Теорія електричного зв'язку (ТЕЗ) є однією з фундаментальних теоретичних дисциплін базової підготовки фахівців-зв'язківців за напрямом 6.050903 – Телекомунікації. Вона базується на новітній науці "Статистична теорія зв'язку", яка виникла в 30…40 рр. XX ст. і стрімко розвивалась у другій його половині.

У ТЕЗ розглядаються основні процеси передавання сигналів каналами зв'язку за наявності завад. Для цього в ній прийнятий єдиний методологічний підхід до вирішення задач електрозв'язку на основі ймовірнісних моделей. Досконало вивчаються методи математичного опису сигналів і завад, методи забезпечення необхідних характеристик систем зв'язку як за достовірністю, так і за швидкістю передавання інформації.

Теоретичною базою дисципліни ТЕЗ у ВНЗ є такі дисципліни, як "Вища математика" та "Теорія електричних кіл та сигналів". Принципи і методи дисципліни ТЕЗ є основою техніки телекомунікацій і розвиваються в усіх інженерних дисциплінах підготовки бакалаврів напряму 6.050903 – Телекомунікації.

Загальна характеристика дисципліни: кількість кредитів ECTS – 9; модулів – 4; загальна кількість годин – 324; у тому числі: лекції – 104 год.; практичні заняття – 16 год.; лабораторні заняття – 40 год.; самостійна та індивідуальна робота – 164 год.; вид контролю – іспит з кожного модуля.

Згідно з навчальним планом ОНАЗ ім. О.С. Попова за напрямом 6.050903 – Телекомунікації вивчення дисципліни ТЕЗ розподілено на залікові модулі:

Модуль 1. Математичний опис сигналів.

Модуль 2. Передавання інформації в телекомунікаційних системах.

Модуль 3. Теорії завадостійкості систем передавання.

Модуль 4. Основи теорії коректувальних кодів.

Цей навчальний посібник підготовлено для вивчення та засвоєння студентами навчального матеріалу модуля 2, в якому викладено основні положення науки "Теорія інформації" – однієї із складових частин теорії зв'язку.

Започатковано науку "Теорія інформації" в 1948 р., коли Клод Шеннон (США) опублікував статтю "Математична теорія зв'язку", в якій закладені основи теорії інформації та її застосування до задач зв'язку, введені поняття – ентропія джерела повідомлень та пропускна здатність каналу зв'язку.

Теорія інформації – це, в принципі, теоретична наука про основні закономірності передавання інформації каналами зв'язку. Але вона надала поштовх для стрімкого розвитку техніки телекомунікацій у XX ст. особливо, наприкінці.

По-перше, теорія інформації надала математичний апарат обчислення надмірності повідомлень та методи її скорочення. Ці методи застосовуються нині для зменшення швидкості цифрових сигналів під час передавання відео- й аудіоповідомлень та обсягу даних для запам'ятовування цих повідомлень, наприклад, у стандартах JPEG та MPEG, в архіваторах комп'ютерів.

По-друге, у теорії інформації строго математично доведено той факт, що канал зв'язку із завадами та обмеженою смугою пропускання має обмежену швидкість передавання інформації (так звану пропускну здатність), але точність передавання сигналів при цьому може бути як завгодно високою (помилки, що виникають у каналі зв'язку через дію завад, можуть бути виправлені).

По-третє, детальний розвиток ідеї виправлення помилок (так зване завадостійке кодування) призвів до появи досить потужних завадостійких кодів, що виправляють майже всі помилки. Тільки застосування завадостійких кодів дозволило реалізувати і глобальний супутниковий зв'язок, і мобільні телефони, і радіозв'язок із неземними космічними апаратами тощо.

На вивчення модуля 2 планується: кількість кредитів ECTS – 2; загальна кількість годин – 72; у тому числі: лекції – 16 год.; лабораторні заняття – 8 год.; самостійна та індивідуальна робота – 48 год.; вид контролю – іспит.

Модуль 2 складається з наступних змістовних модулів:

- інформаційні характеристики джерел повідомлень;
- ефективне кодування повідомлень;
- інформаційні характеристики каналів електрозв'язку.

Цей навчальний посібник ***не заміняє*** рекомендовану навчальну літературу, а доповнює її. Необхідні теоретичні викладки до вивчення модуля наведені в підручниках. У посібнику ж подається цілеспрямоване тлумачення основних положень "Теорії інформації" стосовно передавання інформації каналами електрозв'язку. Для поліпшення її вивчення студентами в посібнику наводяться приклади, вправи, задачі, індивідуальні завдання, довідковий матеріал, глосарій кожної лекції – тобто основні поняття і терміни.

Для полегшення сприйняття навчального матеріалу модуля найважливіші теоретичні результати, що треба зрозуміти і запам'ятати, виділені у спеціальній рамці за текстом та позначені знаком "!". Крім того, при підборі матеріалу посібника та його подання автори намагались дотримуватись правила – без складних математичних доказів (а їх у теорії інформації забагато) наочно показати, що можна, а чого неможливо досягти під час передавання інформації каналами електрозв'язку.

Посібник підготували професори Іващенко П.В. та Дирда В.Ю. Значний внесок під час роботи над посібником зробили всі викладачі кафедри теорії електричного зв'язку академії.

1 ВХІДНІ ЗНАННЯ ТА ВМІННЯ ДО ВИВЧЕННЯ МОДУЛЯ

Наведений в табл. 1.1 перелік вхідних знань та вмінь студент повинен здобути під час вивчення попередніх дисциплін, щоб засвоїти зміст модуля 2. Шифр знання та вміння встановлено згідно з чинною навчальною програмою дисципліни ТЕЗ.

Таблиця 1.1 – Перелік вхідних знань та вмінь до модуля 2

Номер	**Зміст знань**	**Шифр**
1	Методи обчислення похідної та інтегрування функцій	Вх.Зн.02
2	Основні характеристики випадкових подій та величин (теорія ймовірностей)	Вх.Зн.05
3	Математичний опис випадкових сигналів: імовірнісні і числові характеристики, кореляційна функція, спектральна густина потужності	Вх.Зн.08
4	Теорема В.О. Котельникова (відліків)	Вх.Зн.09
	Зміст умінь	
1	Виконувати диференціювання та інтегрування функцій за допомогою математичних довідників та комп'ютерних програм	Вх.Ум.03
2	Розраховувати ймовірнісні та числові характеристики випадкових подій, величин та процесів	Вх.Ум.04
3	Розраховувати частоту дискретизації аналогових сигналів	Вх.Ум.07

Наведені в табл. 1.1 вхідні знання та вміння мають забезпечити модулі дисциплін, що визначені в табл. 1.2.

Таблиця 1.2 – Модулі попередніх дисциплін, які забезпечують вивчення модуля 2

Номер	Назва модуля дисципліни, що забезпечує вхідні знання та вміння	Шифр знання та вміння, що забезпечується
	Дисципліна "Вища математика"	
1	Диференціальне числення функції однієї чи кількох змінних	Вх.Зн.02 Вх.Ум.03
2	Теорія ймовірностей та математична статистика	Вх.Зн.05 Вх.Ум.04
	Дисципліна "Теорія електричного зв'язку"	
1	Математичний опис сигналів	Вх.Зн.08 Вх.Зн.09 Вх.Ум.04 Вх.Ум.07

2 КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ

Пояснення до конспекту лекцій

За більш як 45 років викладання в усіх електротехнічних інститутах та технікумах зв'язку СРСР та України навчальної дисципліни "Теорія електричного зв'язку" (спочатку вона називалась "Теорія передавання сигналів") видано більше десяти підручників та навчальних посібників.

У підручниках (див. перелік рекомендованої літератури) основні положення такої складової частини теорії зв'язку як "Теорія інформації" детально викладені. Але в цих підручниках та посібниках основна увага приділяється теоретичним положенням "Теорія інформації" та доказу основних теорем.

Тому наведений конспект лекції ***не дублює*** навчальну літературу, а доповнює її прикладами, вправами та задачами, довідковими даними, які необхідні для висвітлення того, як основні теоретичні положення "Теорії інформації" знаходять застосування в телекомунікації.

! ***Матеріал кожної лекції*** рекомендується вивчати за навчальною літературою і цим конспектом у послідовності, що надана в тематиці лекції, використовуючи таблиці розрахункових формул та словник основних термінів і визначень стосовно лекції

Лекція 1. Інформаційні характеристики джерел дискретних повідомлень

Тематика лекції

1 Математичні моделі джерел дискретних повідомлень та їх основні параметри.

2 Кількісна міра інформації.

3 Інформаційні характеристики джерел дискретних повідомлень: ентропія джерела та її властивості; надмірність та продуктивність джерела.

Таблиця Л1.1 – Розрахункові формули інформаційних характеристик джерел дискретних повідомлень

Найменування характеристики	Розрахункова формула	Номер формули
Кількість інформації в повідомленні (знаку) a_k (власна чи безумовна), дв.од. (біт)	$I(a_k) = \log_2(1/P(a_k)) =$ $= -\log_2 P(a_k)$	(1.1)
Умовна кількість інформації в повідомленні (знаку) a_k, коли залежність між повідомленнями простягається в межах двох повідомлень a_k та a_{k-1}, дв.од. (біт)	$I(a_k/a_{k-1}) = -\log_2 P(a_k/a_{k-1})$	(1.2)
Умовна кількість інформації в повідомленні (знаку) a_k, коли залежність між повідомленнями простягається в межах n повідомлень $a_k,\ldots, a_{k-n+1}$, дв.од. (біт)	$I(a_k/a_{k-1},\ldots, a_{k-n+1}) =$ $= -\log_2 P(a_k/a_{k-1,\ldots,} a_{k-n+1})$	(1.3)

Закінчення табл. Л1.1

Ентропія джерела незалежних (знаків) повідомлень A, дв.од./знак (біт/знак)	$H(A)=-\sum_{k=1}^{M_A} P(a_k)\log_2 P(a_k)=H_1(A)$	(1.4)
Ентропія джерела залежних (знаків) повідомлень A, коли залежність між повідомленнями простягається в межах двох повідомлень, дв.од./знак (біт/знак)	$H_2(A)=\overline{I(a_k/a_{k-1})}$	(1.5)
Ентропія джерела залежних повідомлень A, коли залежність між повідомленнями простягається в межах n повідомлень, дв.од./знак (біт/знак)	$H_n(A)=\overline{I(a_k/a_{k-1},\ldots,a_{k-n+1})}$	(1.6)
Максимальна ентропія джерела A, дв.од./знак (біт/знак)	$H_{\max}(A) = \log_2 M_A$	(1.7)
Коефіцієнт надмірності (надлишковості) джерела A	$K_{\text{надм}} = 1 - H_n(A)/H_{\max}(A)$	(1.8)
Продуктивність джерела повідомлень, дв.од./с (біт/с)	$R_{\text{дж}} = H_n(A)/\overline{T}$	(1.9)
Пояснення: $P(a_k)$ – апріорна (безумовна) імовірність повідомлення (знаку) a_k; $P(a_k/a_j)$ – апостеріорна (умовна) імовірність повідомлення (знаку) a_k, якщо повідомлення (знак) a_j відоме; $a_k,\ldots, a_{k-n+1}$ – n – 1 відоме попереднє повідомлення (знак), індекс вказує номер повідомлення в послідовності з виходу джерела; $\overline{T}$ – середня тривалість повідомлення (знаку) – обчислюється як математичне сподівання тривалості повідомлень: $\overline{T} = \sum_k T_k P(a_k)$; M_A – обсяг алфавіту джерела		

!

Визначення. *Дискретне повідомлення* – це послідовність окремих знаків, кількість яких є скінченна. Знаки утворюють алфавіт джерела. Кількість знаків в алфавіті називається обсягом алфавіту M_A. Знаками можуть бути окремі літери, цифри, символи або їх сполучення, наприклад, слова чи навіть речення.

Класифікація джерел. Джерела дискретних повідомлень діляться на:

– *джерела незалежних повідомлень* (джерела без пам’яті), коли поява будь-якого знаку a_k ніяк не зумовлена знаками, що з’явились до нього;

– *джерела залежних повідомлень* (джерела з пам’яттю), коли поява знаку a_k пов’язана з попередніми знаками.

Умовно джерела дискретних повідомлень можна розділити на дві групи: текстові та цифрові.

Текстові повідомлення складаються з послідовності літер, цифр та символів алфавіту, що визначає певну мову, наприклад, українську. Обсяг алфавіту, особливо алфавітів східних мов , може бути значним – сотні та тисячі.

Цифровими вважаються повідомлення обміну інформацією між комп’ютерами та повідомлення, отримані після перетворення аналогових сигналів у цифрові (у зв'язку, мовленні, при запису на електронні носії). Як правило, цифрові повідомлення двійкові, тобто $M_A = 2$.

Удалено: .

Математична модель джерела.

Джерело незалежних повідомлень задається переліком знаків a_k та їх апріорних (безумовних) імовірностей $P(a_k)$, $k = 1, 2, ..., M_A$, при цьому ймовірності задовольняють умові $\sum_k P(a_k) = 1$.

Джерело залежних повідомлень задається апостеріорними (умовними) імовірностями; так, якщо залежність між знаками простягається в межах двох знаків a_k і a_j, то джерело задається ймовірностями $P(a_k/a_j)$, $k, j = 1, 2, ..., M_A$; якщо залежність між знаками простягається в межах трьох знаків a_k, a_j, і a_l, то джерело задається ймовірностями $P(a_k/a_j,a_l)$, $k, j, l = 1, 2, ..., M_A$ і так далі.

Джерело задається також значеннями тривалості видачі кожного знаку T_k, $k = 1, 2, ..., M_A$. Коли тривалості видачі всіх знаків однакові, джерело називають синхронним, у протилежному випадку – асинхронним.

Кількісна міра інформації детально описана в [1, с. 284...286], [3, с. 276...277]. Особливістю кількісної міри інформації є те, що за пропозицією Р. Хартлі (1928 р.) для обчислення кількості інформації в повідомленнях прийнята логарифмічна міра: розрахункові формули (1.1), (1.2) та (1.3) в табл. Л1.1.

! ***Логарифмічна міра кількості інформації*** в повідомленні застосована тому, що вона задовольняє звичним уявленням про інформацію: кількість інформації – величина адитивна; у повідомленні, ймовірність якого дорівнює одиниці, кількість інформації дорівнює нулю

Одиниці виміру інформації наведені в [1, с. 284...285], [3, с. 277]. Звертаємо увагу на такі основні положення:

! ***Одиниця виміру кількості інформації*** визначається **основою** логарифма, загальноприйняте обчислення логарифма з основою 2

! ***1 дв.од. (біт)*** – кількість інформації в повідомленні, ймовірність якого дорівнює 0,5

Приклад 1.1. Знайти кількість інформації в послідовності з шести знаків від деякого датчика, за умови, що знаки джерела рівноймовірні та незалежні, а обсяг джерела $M_A = 16$.

Розв'язання. Якщо знаки рівноймовірні, то імовірність кожного з них $P(a_k) = 1/\ M_A = 1/16$, кожен знак за формулою (1.1) несе $I(a_k) = -\log_2 16 = 4$ дв.од. інформації. Знаки незалежні, тому кількість інформації в послідовності з $N = 6$ знаків $I_{зн} = \sum_k I(a_k)$ = 6 4 = 24 дв.од.

Приклад 1.2. Знайти кількість інформації у слові українського тексту ***Одеса***, вважаючи, що літери в текстах незалежні.

Розв'язання. Імовірності літер українського тексту наведено в табл. 4.1. За формулою (1.1) вони несуть таку кількість інформації: I(о) = 3,47 дв.од.; I(д) = 5,27 дв.од.; I(е) = 4,61 дв.од.; Ii(с) = 5,09 дв.од.; I(а) = 3,76 дв.од. Таким чином, кількість інформації у слові ***Одеса*** в силу адитивності інформації дорівнює $I_{сл}$ = 3,47 + 5,27 + 4,61 + 5,09 + 3,76 = 22,20 дв.од.

Ентропія джерела та її властивості детально описані в [1, с. 294…298], [4, с. 277...278]. Розрахункові формули (1.4), (1.5), (1.6) та (1.7). Звертаємо увагу на такі основні положення:

! ***Ентропія*** джерела, це – середня кількість інформації в одному знаку джерела

! ***Максимальну ентропію*** має джерело рівноймовірних незалежних повідомлень

Вправа 1.1. Вивести формулу для ентропії $H(A)$ джерела незалежних повідомлень.

Розв'язання. Відповідно до визначення, ентропія обчислюється як математичне сподівання кількості інформації в одному знаку джерела, тобто $H(A) = \overline{I(a_k)}$. За формулою (1.1) $I(a_k) = \log_2 (1/P(a_k))$. Тоді відповідно до правила обчислення математичного сподівання ентропія буде дорівнювати

$$H(A) = \sum_{k=1}^{M_A} P(a_k) \log_2 (1/P(a_k)).$$

Вправа 1.2. Довести, що ентропія джерела повідомлень набуває лише невід'ємні значення.

Розв'язання. Оскільки ймовірності знаків $P(a_k) \le 1$, то $1/P(a_k) \ge 1$. А логарифм числа, більшого за одиницю, завжди невід'ємний, тому кількість інформації – завжди невід'ємна. Середнє значення невід'ємних чисел, що визначає ентропію, – також число невід'ємне.

Приклад 1.3 Обчислити ентропію джерела повідомлень з обсягом алфавіту $M_A = 4$, якщо імовірності незалежних знаків: $P(a_1) = 0{,}5$; $P(a_2) = 0{,}25$; $P(a_3) = P(a_4) = 0{,}125$.

Розв'язання. Відповідно до формули (1.4) ентропія джерела $H(A) = -(0{,}5 \log_2 0{,}5 + 0{,}25 \log_2 0{,}25 + 2 \cdot 0{,}125 \log_2 0{,}125) = 1{,}75$ дв.од./знак.

Приклад 1.4. Обчислити максимальну ентропію джерела повідомлень з обсягом алфавіту $M_A = 28$.

Розв'язання. Відповідно до формули (1.7) максимальна ентропія джерела $H_{max}(A) = \log_2 28 = 4{,}81$ дв.од./знак.

! ***Ентропія джерела залежних повідомлень*** менше ентропії джерела незалежних повідомлень, тобто $H_n(A) \le \ldots \le H_2(A) \le H_1(A) \le H_{max}(A)$

Надмірність джерела повідомлень – це його властивість видавати інформацію більшою кількістю знаків, ніж можна було б [1, с. 298...299], [3, с. 278...279].

! Кількісно ***надмірність джерела*** повідомлень характеризується коефіцієнтом надмірності – розрахункова формула (1.8) в табл. Л1.1.

Приклад 1.5 Обчислити коефіцієнт надмірності джерела повідомлень, заданого в прикладі 1.3.

Розв'язання. Відповідно до формули (1.7) $H_{\max}(A) = \log_2 4 = 2$ дв.од./знак. Ентропія джерела обчислена в прикладі 1.3 і дорівнює 1,75 дв.од./знак Тоді за формулою (1.8) коефіцієнт надмірності $K_{\text{надм}} = 1 - H(A)/H_{\max}(A) = 1 - 1{,}75/2 = 0{,}125$.

Продуктивність джерела визначена в [3, с. 279...280]. Розрахункова формула (1.9).

! ***Продуктивність джерела повідомлень, це*** – середня швидкість видачі інформації джерелом, тобто середня кількість інформації, що виробляється джерелом за секунду

Приклад 1.6. Обчислити продуктивність джерела дискретних повідомлень, описаного в прикладі 1.3, якщо тривалості повідомлень 1, 2, 3 і 4 мс відповідно.

Розв'язання. Ентропія цього джерела з прикладу 1.3 $H(A) = 1{,}75$ дв.од./знак, середня тривалість знаків обчислюється як математичне сподівання $\overline{T} = 0{,}5\cdot 1 + 0{,}25\cdot 2 + 0{,}125\ 3 + 0{,}125\ 4 = 1{,}875$ мс. Тоді за формулою (1.9) $R_{\text{дж}} = 1{,}75/(1{,}875\cdot 10^{-3}) = 933$ дв.од./с.

Контрольні питання

1.1. Дати визначення поняття – інформація.

1.2. Чому застосовується логарифмічна міра кількості інформації?

1.3. Що в теорії інформації називають ентропією джерела та як вона визначається для джерел незалежних і залежних повідомлень?

1.4. Пояснити, яка різниця в одиницях виміру – дв.од., біт, дв.од./с, біт/с.

1.5. Пояснити, яке відношення має одиниця виміру кількості інформації "біт" до двійкової системи числення.

1.6. Дати визначення понять – продуктивність та надмірність джерела повідомлень.

1.7. Перелічити причини появи надмірності джерела.

1.8. Чому дорівнює максимальна ентропія двійкового джерела незалежних повідомлень і за яких умов вона має місце?

ЗАДАЧІ **для самостійної роботи студентів**

1.1. Алфавіт джерела складають три знаки a_1, a_2 та a_3 з імовірностями $P(a_1) = 0{,}1$ та $P(a_2) = 0{,}3$. Тривалості видачі повідомлень 1,0 мс, 2,0 мс та 3,0 мс відповідно. Обчислити кількість інформації в кожному знаку, ентропію, продуктивність і надмірність джерела.

1.2. Знайти кількість інформації в слові ***ентропія***, якщо вважати, що літери незалежні. Імовірності літер українського змістовного тексту надані в табл. 4.1.

1.3. Джерело дискретних повідомлень видає повідомлення, використовуючи $M_a = 8$ знаків. Ентропія джерела 2,5 дв.од./знак Обчислити коефіцієнт надмірності джерела.

1.4. Обчислити продуктивність джерела дискретних повідомлень, якщо його ентропія $H(A) = 2{,}25$ дв.од./знак; середня тривалість знака – 10 мс.

Словник основних термінів і понять

Асинхронне джерело – тривалості видачі знаків джерелом можуть бути різними.

Біт (синонім – *дв.од.*) – одиниця виміру кількості інформації; у повідомленні, ймовірність якого дорівнює 0,5, кількість інформації дорівнює 1 біту.

Двійкова одиниця, скор. *дв.од.* (синонім – *біт*) – одиниця виміру кількості інформації; у повідомленні, ймовірність якого дорівнює 0,5, кількість інформації дорівнює 1 дв.од.

Ентропія джерела – середня кількість інформації в одному знаку джерела повідомлень; характеризує невизначеність стану джерела повідомлень.

Інформація – сукупність відомостей про оточуючий нас світ (явища, події, факти тощо), які ми отримуємо в результаті взаємодії з ним; ці відомості заздалегідь невідомі отримувачу.

– *власна* (синонім – *безумовна*) – кількість інформації в повідомленні a_k джерела дискретних незалежних повідомлень.

– *умовна* – кількість інформації в повідомленні a_k джерела дискретних залежних повідомлень за умови, що відомі повідомлення, з якими повідомлення a_k має статистичну залежність.

Коефіцієнт надмірності – числова характеристика надмірності джерела повідомлень. Показує, яка частина максимально можливої ентропії не використовується джерелом. Набуває значення від 0 (надмірності немає) до 1 (повідомлення не несуть інформації).

Надмірність (синонім – *надлишковість*) – властивість джерела повідомлень видавати інформацію більшою кількістю знаків, ніж можна було б.

Повідомлення – матеріальна форма подання інформації.

Продуктивність джерела повідомлень – середня швидкість видачі інформації джерелом.

Синхронне джерело – тривалості видачі всіх знаків джерела однакові.

Лекція 2. Інформаційні характеристики двох джерел дискретних повідомлень

Тематика лекції

1 Математична модель двох джерел дискретних повідомлень та її параметри (залежних та незалежних).

2 Інформаційні характеристики двох джерел дискретних повідомлень: кількість інформації, спільна та взаємна ентропії, їх властивості; надмірність та продуктивність.

Таблиця Л2.1 – Розрахункові формули інформаційних характеристик двох джерел дискретних повідомлень

Найменування характеристики	Розрахункова формула	Номер формули
Умовна кількість інформації в повідомленні (знаку) a_k чи b_j об'єднаного ансамблю AB двох джерел дискретних повідомлень A і B, дв.од. (біт)	$I(a_k/b_j) = -\log_2 P(a_k/b_j)$ $I(b_j/a_k) = -\log_2 P(b_j/a_k)$	(2.1)
Умовна ентропія двох джерел повідомлень A і B чи B і A, дв.од. (біт)	$H(A/B) = \overline{I(a_k/b_j)}$ $H(B/A) = \overline{I(b_j/a_k)}$	(2.2)

Закінчення табл. Л2.1

Спільна кількість інформації в повідомленнях (знаках) a_k та b_j об'єднаного ансамблю AB двох джерел повідомлень A та B, дв.од. (біт)	$I(a_k, b_j) = -\log_2 P(a_k, b_j)$ $I(b_j, a_k) = -\log_2 P(b_j, a_k)$	(2.3)
Спільна ентропія об'єднаного ансамблю AB двох джерел повідомлень A та B, дв.од./знак (біт/знак)	$H(A, B) = H(A) + H(B/A) =$ $= H(B) + H(A/B)$	(2.4)
Взаємна ентропія об'єднаного ансамблю AB двох джерел повідомлень A та B, дв.од./знак (біт/знак)	$H_{вз}(A, B) = H(A) - H(A/B) =$ $= H(B) - H(B/A)$	(2.5)
Продуктивність об'єднаного ансамблю AB двох джерел повідомлень A та B, дв.од./с (біт/с)	$R_{дж}(A, B) = H(A, B)/\overline{T}$	(2.6)
Швидкість передавання інформації від джерела повідомлень A до джерела B чи від джерела повідомлень B до джерела A, дв.од./с (біт/с)	$R_{вз}(A, B) = H_{вз}(A, B)/\overline{T}$	(2.7)
Пояснення: $P(a_k/b_j)$ – апостеріорна (умовна) імовірність повідомлення (знаку) a_k джерела A, якщо повідомлення (знак) b_j джерела B відоме; $\overline{T}$ – середня тривалість повідомлення (знаку)		

Примітка. У табл. Л2.1, а надалі і в лекціях модуля 2, прийняті деякі позначення, що відрізняються від позначень у [1] та іншій літературі, зокрема:

– взаємна ентропія двох джерел повідомлень A та B позначається як $H_{вз}(A, B)$, а не $I(A, B)$;

– швидкість передавання інформації від джерела повідомлень A до джерела B позначається як $R_{вз}(A, B)$, а не $I'(A, B)$.

Це зроблено з метою уніфікації позначень та поліпшення їх сприйняття, оскільки в усій літературі з теорії інформації ентропія позначається літерою H, а швидкість – літерою R.

Математична модель двох джерел. За термінологією [1, с. 299...300] два стаціонарні джерела A та B мають об'єднаний ансамбль AB і видають дискретні повідомлення a_k та b_j.

***Статистичні характеристики двох джерел повідомлень такі*:**

– апріорні (безумовні) імовірності знаків a_k та b_j $P(a_k)$ та $P(b_j)$, $k, j = 1, 2, ..., M_A$;

– апостеріорні (умовні) імовірність знаків a_k джерела A, якщо мав місце знак b_j джерела B $P(a_k/b_j)$, $k, j = 1, 2, ..., M_A$;

– спільні ймовірності знаків a_k та b_j $P(a_k, b_j) = P(a_k)P(b_j/a_k) = P(b_j)P(a_k/b_j)$, $k, j = 1, 2, ..., M_A$;

– тривалості видачі знаків a_k чи b_j джерелами T_k чи T_j, $k, j = 1, 2, ..., M_A$.

Типовим прикладом двох джерел повідомлень є: джерело A, що діє на вході каналу зв'язку, та вихід цього каналу зв'язку – джерело B. Ми спостерігаємо повідомлення з виходу каналу (з джерела B), а інформацію маємо отримати про джерело A.

! **_Кількість інформації_** в повідомленні a_k чи b_j об'єднаного ансамблю *АВ* двох джерел повідомлень *А* і *В* характеризується умовною та спільною інформацією – формули (2.1) та (2.3) в табл. Л2.1

Ентропії двох джерел та їх властивості детально описані в [1, с. 302...304]. Звертаємо увагу на таке положення:

! Інформаційними характеристиками об'єднаного ансамблю *АВ* двох джерел повідомлень *А* та *В* є ***умовна, спільна*** та ***взаємна*** ентропії. Розрахункові формули (2.2), (2.4) та (2.5) в табл. Л2.1

! ***Взаємна*** ентропія об'єднаного ансамблю *АВ* двох джерел повідомлень показує середню кількість інформації, яку можна отримати про джерело *А*, спостерігаючи джерело *В*

Вправа 2.1. Вивести формули для обчислення спільної $H(A, B)$ та взаємної $H_{вз}(A, B)$ ентропій двох джерел повідомлень.

Розв'язання. Оскільки ентропія це – математичне сподівання кількості інформації, то спільна ентропія об'єднаного ансамблю *АВ* двох джерел повідомлень *А* та *В*

$$H(A,B) = \overline{I(a_k,b_j)} = \overline{-\log_2 P(a_k,b_j)}.$$

Для об'єднаного ансамблю *АВ* двох джерел

$$P(a_k,b_j) = P(a_k)P(b_j/a_k) \text{ i } \log_2(a_k,b_j) = \log_2 P(a_k) + \log_2 P(b_j/a_k)$$

Тоді $\overline{-\log_2 P(a_k,b_j)} = \overline{-\log_2 P(a_k)} + \overline{-\log_2 P(a_k,b_j)}$.

А згідно з формулами (1.4) та (2.2)

$$H(A, B) = H(A) + H(B/A) = H(B) + H(A/B),$$

оскільки $P(a_k, b_j) = P(b_j, a_k)$.

З визначення взаємної ентропії та отриманої вище формули

$$H_{вз}(A, B) = H(A) – H(A/B) = H(B) – H(B/A).$$

Вправа 2.2. Довести, що спільна ентропія двох незалежних джерел повідомлень *А* і *В* дорівнює сумі їх власних ентропій, тобто $H(A, B) = H(A) + H(B)$.

Розв'язання. Оскільки спільна ймовірність незалежних повідомлень $P(a_k, b_j) = P(a_k)\,P(b_j)$, то $H(B/A) = H(B)$ і з формули (2.4) випливає, що $H(A, B) = H(A) + H(B)$.

Вправа 2.3. Довести, що взаємна ентропія двох незалежних джерел повідомлень *А* і *В* дорівнює нулю, тобто $H_{вз}(A, B) = 0$.

Розв'язання. Оскільки для незалежних повідомлень $P(a_k/b_j) = P(a_k)$ і $P(b_j/a_k) = P(b_j)$, то $H(B/A) = H(B)$ і $H(A/B) = H(A)$. Тоді з формули (2.5) випливає, що $H_{вз}(A, B) = 0$.

Приклад 2.1. Два джерела повідомлень *А* і *В* мають ентропії, дв.од./знак: $H(A) = 5{,}2$; $H(A/B) = 2{,}2$; $H(B) = 5{,}3$; $H(B/A) = 2{,}3$. Обчислити спільну та взаємну ентропії цих двох джерел.

Розв'язання. За формулами (2.4) та (2.5)
спільна ентропія $H(A, B) = H(A) + H(B/A) = H(B) + H(A/B) = 5{,}2 + 2{,}3 = 7{,}5$ дв.од./знак,
а взаємна $H_{вз}(A, B) = H(A) – H(A/B) = H(B) – H(B/A) = 5{,}3 – 2{,}3 = 3{,}0$ дв.од./знак.

Продуктивність об'єднаного ансамблю *AB* ***двох джерел*** повідомлень обчислюється за спільною ентропією [1, с. 305], формула (2.6) в табл. Л2.1.

! Продуктивність двох джерел повідомлень *A* та *B*, обчислену за взаємною ентропією, в [1] та [2] називають ***швидкістю передавання інформації*** від джерела *A* до джерела *B*. Її можна трактувати як взаємну швидкість обміну інформацією між джерелами *A* та *B*

Приклад 2.2. Обчислити продуктивність об'єднаного ансамблю *AB* двох джерел повідомлень, описаного в прикладі 2.1, якщо середня тривалість повідомлень 1,5 мс.

Розв'язання. Спільна ентропія цього ансамблю з прикладу 2.1 $H_{сп}(A, B) = 7{,}5$ дв.од./знак. Тоді за формулою (2.6) продуктивність об'єднаного ансамблю *AB* двох джерел повідомлень $R_{дж}(A, B) = H(A, B)/\overline{T} = 7{,}5/(1{,}5 \cdot 10^{-3}) = 500$ дв.од./с.

Приклад 2.3. Обчислити швидкість передавання інформації між двома джерелами *A* та *B*, описаними в прикладі 2.1, якщо середня тривалість повідомлень 1,5 мс.

Розв'язання. Взаємна ентропія цих джерел із прикладу 2.1 $H_{вз}(A, B) = 3{,}0$ дв.од./знак. Тоді за формулою (2.7) швидкість передачі інформації між двома джерелами *A* та *B* $R_{вз}(A, B) = H_{вз}(A, B)/\overline{T} = 3{,}0/(1{,}5 \cdot 10^{-3}) = 200$ дв.од./с.

Контрольні питання

2.1. Дати визначення понять – сумісна та взаємна ентропія двох джерел повідомлень.

2.2. Перелічити основні властивості сумісної та взаємної ентропії двох джерел повідомлень.

2.3. Як обчислюється продуктивність об'єднаного ансамблю *AB* двох джерел повідомлень?

2.4. Як обчислюється швидкість передавання інформації від джерела повідомлень *A* до джерела повідомлень *B*?

ЗАДАЧІ **для самостійної роботи студентів**

2.1. Два джерела повідомлень *A* і *B* мають ентропії, дв.од./знак: $H(A) = 4{,}2$; $H(A/B) = 1{,}2$; $H(B) = 4{,}3$; $H(B/A) = 1{,}3$. Обчислити спільну та взаємну ентропії об'єднаного джерела повідомлень *AB*.

2.2. За розрахованими в задачі 2.1 спільною та взаємною ентропіями об'єднаного ансамблю *AB* двох джерел повідомлень *A* та *B* обчислити продуктивність джерела *AB* та швидкість передачі інформації від джерела *A* до джерела *B*, якщо середня тривалість повідомлень 2,0 мс.

Словник основних термінів і понять

Ентропія взаємна двох джерел повідомлень A та B – середня кількість інформації на одне повідомлення джерела *A*, що можна отримати, спостерігаючи повідомлення джерела *B*.

– *спільна двох джерел повідомлень A та B* – середня кількість інформації на одне повідомлення об'єднаного ансамблю *AB* двох джерел *A* та *B* з урахуванням статистичної залежності між ними.

– *умовна джерела A* (*чи B*) – середня кількість інформації в одному повідомленні джерела *A* (чи *B*) за умови, що відомі повідомлення джерела *B* (чи *A*).

Продуктивність двох джерел дискретних повідомлень A та *B* – швидкість видачі інформації об'єднаним ансамблем *AB* двох джерел, яка обчислюється за спільною ентропією.

Швидкість передавання інформації між двома джерелами A та B – швидкість обміну інформацією між джерелами *A* та *B*, яка обчислюється за взаємною ентропією.

Лекція 3. Кодування джерел дискретних повідомлень

Тематика лекції

1 Кодування в телекомунікаційних системах – задачі та цілі кодування, класифікація кодів, вивчення кодів у різних модулях дисципліни ТЕЗ.

2 Коди джерела – параметри кодів, подання кодів, типи кодів та їх характеристики, використовувані нині стандартні коди.

3 Ефективні коди – визначення, параметри, принципи та алгоритми кодування кодами Шеннона-Фано та Хаффмена, застосування.

Таблиця Л3.1 – Розрахункові формули до кодування джерела дискретних повідомлень

Найменування параметра	Розрахункова формула	Номер формули
Кількість кодових комбінацій рівномірного коду	$M = m^n$	(3.1)
Довжина (розрядність) рівномірного двійкового коду	$n = \log_2 M$	(3.2)
Співвідношення між обсягом алфавіту (кількістю знаків) джерела та кількістю кодових комбінацій коду	$M_{\text{А}} \le M$	(3.3)
Тривалість двійкового символу (біта)	$T_{\text{б}} = T_{\text{зн}}/n$	(3.4)
Середня довжина кодових комбінацій нерівномірного коду	$\overline{n} = \sum\limits_{k} P(a_k) n_k$	(3.5)
Коефіцієнт стиснення нерівномірного коду η	$\eta = n/\overline{n}$	(3.6)
Коефіцієнт ефективності нерівномірного коду μ	$\mu = H(A)/\overline{n}$	(3.7)
Пояснення: n_k – довжина k-ї комбінації нерівномірного коду; $T_{\text{зн}}$ – тривалість видачі знака джерелом; m – обсяг (основа) коду; $H(A)$ – ентропія джерела.		

Необхідність кодування джерела. Як правило, повідомлення, що видаються джерелом, призначені для безпосереднього сприйняття органами почуттів людини і, звичайно, не пристосовані для їх передавання каналами зв'язку. Тому вони в процесі передавання, як правило, піддаються кодуванню і, як правило, неодноразово.

Необхідність кодування виникає насамперед із потреби пристосувати форму повідомлення до даного каналу зв'язку чи пристрою, призначеному для перетворення чи збереження інформації. Але після кодування кодером джерела в систему електрозв'язку вмикається ще й кодер каналу. Це пов'язано насамперед з тим, що в сучасних телекомунікаційних системах повідомлення передаються цифровими сигналами й обробляються цифровими методами.

У телекомунікаційних системах коди мають різне функціональне призначення і їх класифікація надана на рис. Л3.1.

Рисунок Л3.1 – Класифікація кодів за функціональним призначенням

Усі ці класи кодів розглядаються в різних модулях дисципліни ТЕЗ:

– коди джерела та коди АЦП – у модулі 2, кодування джерела є складовою частиною "Теорії інформації";

– коди лінії та модуляційні коди – у модулі 1, вони забезпечують узгодження сигналів електрозв'язку з параметрами каналів зв'язку;

– коректувальні (завадостійкі) коди безпосередньо випливають з основних положень "Теорії інформації" щодо потенційних можливостей передавання інформації каналами зв'язку і розглядаються в модулі 4.

Основні терміни, поняття та визначення з кодування. У літературі з теорії інформації та кодування, теорії електрозв'язку, цифрового зв'язку, зокрема [1, 2, 3, 4], застосовуються таке різноманіття термінів та визначень відносно кодування: ***код, кодування, кодер, декодер, кодек, формат коду, повідомлення, знаки, символи, біти, інформаційні біти, інформаційна послідовність, дані, цифровий потік, цифровий сигнал.***

Визначення більшості цих термінів можна знайти в рекомендованій літературі [1, с. 11…16] та [3, с. 12…16]. В кінці лекції наведено словник основних термінів і понять із кодування джерела.

Коди дискретного джерела здійснюють перетворення повідомлень (знаків) джерела в символи вторинного алфавіту. Кожному знаку присвоюється кодова комбінація за певним правилом. Як правило, такі коди рівномірні. Процедура кодування та декодування кодами дискретного джерела детально описана в рекомендованій літературі [1, с. 11…16] та [3, с. 12…16]. Нижче наведено важливе правило такого кодування.

! ***Кодування джерела*** дискретних повідомлень, як правило, провадиться без втрат інформації, тому воно не змінює ні кількості інформації джерела, ні його ентропії

Необхідно звернути увагу та запам'ятати основні параметри кодів джерела та їх класи, а саме: ***первинний алфавіт***; ***вторинний алфавіт***, або ***основа*** (***обсяг***) коду; ***довжина*** (***розрядність***) коду; коди ***рівномірні*** та ***нерівномірні***; ***двійкові*** та ***недвійкові***; ***надмірні*** та ***прості***; ***префіксні*** (***незвідні***). Визначення всіх цих термінів та понять подано в рекомендованій літературі та словнику термінів.

За своєю структурою коди джерела можна розділити на дві групи: натуральні та стандартні коди.

Натуральні коди – це подання числового номера знака (перед кодування знаки джерела якимось чином необхідно перенумерувати) у будь-якій позиційній системі числення з основою m. Приклад такого кодування надає табл. Л3.2.

Таблиця Л3.2 – Натуральні коди джерела з різною основою m

Знаки	Код з $m = 10$	Код з $m = 8$	Код з $m = 4$	Код з $m = 2$
a_0	0	00	00	0000
a_1	1	01	01	0001
a_2	2	02	02	0010
a_3	3	03	03	0011
a_4	4	04	10	0100
a_5	5	05	11	0101
a_6	6	06	12	0110
a_7	7	07	13	0111
a_8	8	10	20	1000

Основа (обсяг) коду може бути будь-якою, але найбільше поширення мають *двійкові коди*, які дуже просто формуються і легко обробляються цифровими пристроями. Тому в подальшому будемо вважати, що кодування джерела дискретних повідомлень виконується за схемою, наведеною на рис. Л3.2.

Стандартні коди – це подання знаків джерела стандартизованими тим чи іншим чином кодовими комбінаціями. Стандартизація провадиться державними або міжнародними організаціями зі стандартизації.

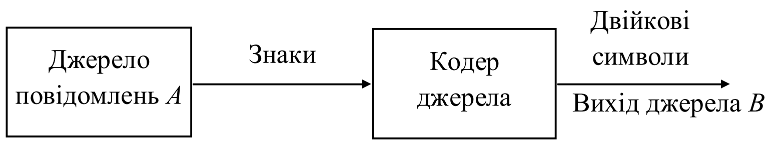


Рисунок Л3.2 – Кодування джерела дискретних повідомлень

Перелік стандартних кодів за більш як 170-річну історію існування електричного зв'язку досить великий. До них відносяться коди: Морзе, Бодо (перший міжнародний п'ятирозрядний телеграфний код), МТА № 2 (Міжнародний телеграфний алфавіт № 2), МТК № 2 (Міжнародний телеграфний код № 2, який відрізняється від МТА № 2 наявністю кирилиці), МТА № 3, МТК № 5, російські – КОИ-7 (код отображения информации – код відображення інформації), ДКОИ-8 (двоичный код отображения информации –двійковий код відображення інформації), американські – ASCII (American Standard Code for Information Interchange – американський стандартний код для обміну інформацією), EBCDIC (Extended Binary Coded Decimal Interchange) – розширений двійково-десятковий код обміну інформацією тощо.

Деякі зі стандартних кодів уже не застосовуються чи знаходять обмежене застосування, наприклад, коди Морзе, Бодо, МТК-2, КОИ-7, ДКОИ-8 та ін.

! Характеристики ***стандартних кодів*** наведено нижче

Код МТК №2 – рівномірний, п'ятирозрядний. Оскільки загальне число кодових комбінацій цього коду $M = 32$, то для кодування більшого числа знаків джерела застосовується регістровий принцип, за якого кодер і декодер містять три кодових таблиці, що можуть перемикатись, і одна і та ж кодова комбінація слугує для кодування різних знаків (див. приклад 1.1 із [3]).

Код ASCII – рівномірний, семирозрядний. Оскільки загальне число кодових комбінацій цього коду $M = 128$, то для кодування знаків джерела можна не застосовується регістровий принцип. Але якщо його застосовувати для кодування кирилицею (російською чи українською мовами), то семи розрядів уже мало. Використовується восьмий розряд. Під кирилицю підводяться двійкові комбінації, які не зайняті в загальноприйнятім коді, щоб зберегти незмінним кодування латинських літер та інших знаків. Так виник російський код ДКОИ-8, потім із появою персональних комп'ютерів – альтернативний код Windows – код 1251. Крім того, код ASCII досить гнучкий. Він може бути і шестирозрядним (один розряд не застосовується), і восьмирозрядним (добавляється розряд перевірки кодових комбінацій на парність для знаходження помилок).

Найпростішим способом подання кодів є кодові таблиці, що ставлять у відповідність: знак – кодова комбінація (див. табл. Л3.2).

Застосовується також подання кодів певною формулою (як правило, це стосується коректувальних кодів) та у вигляді кодового дерева. Кодове дерево являє собою граф, із кожного **вузла** якого виходить m **віток**. Для двійкового коду $m = 2$, тобто виходять дві вітки, які кодуються як “0” та “1”. Приклад кодового дерева подано в табл. Л3.3.

Рівномірні двійкові коди дуже широко використовуються в силу своєї простоти і зручності процедур кодування-декодування: кожному знаку відповідає однакова кількість кодових символів.

Декодування нерівномірних кодів – процедура набагато складніша, ніж для рівномірних. При цьому ускладнюється апаратура декодування і синхронізації, оскільки декодування знаків стає нерегулярним. Так, приміром, якщо до входу декодера поступив кодовий символ, наприклад, 0, то декодер повинен подивитися в кодову таблицю і з’ясувати, якому знаку відповідає така кодова комбінація. Якщо такої комбінації немає, декодер чекає приходу наступного кодового символу. Якщо з наступним кодовим символом комбінацію буде знайдено, то декодування комбінації з двох символів завершиться. Якщо за другим символом комбінацію знову не буде знайдено, треба чекати третього символу і т.д.

Ефективні коди. Визначення. Як правило, вихід кодера джерела (рис. Л3.2) – це вихід двійкового джерела повідомлень B. В якому співвідношенні знаходяться інформаційні характеристики джерел A і B?. Продуктивності джерел A і B однакові, а ентропії і коефіцієнти надмірності різні (у загальному випадку), оскільки різні алфавіти джерел і різні ймовірнісні характеристики знаків.

Вправа 3.1. Довести, що при використанні рівномірних кодів коефіцієнт надмірності джерела B не менший за коефіцієнт надмірності джерела A.

Довжина рівномірного коду $n \ge \log_2 M_{\text{A}}$.

Коефіцієнт надмірності джерела A $K_{\text{надм}}(A) = 1 - H(A)/\log_2 M_{\text{A}}$.

Коефіцієнт надмірності джерела B $K_{\text{надм}}(B) = 1 - H(B)/\log_2 m = 1 - H(B)$.

Очевидні співвідношення: $H(B) = H(A)/n \le H(A)/\log_2 M_{\text{A}}$.

$$K_{\text{надм}}(B) \ge 1 - H(A)/\log_2 M_{\text{A}} = K_{\text{надм}}(A).$$

Отже, в результаті кодування рівномірним кодом надмірність повідомлень може лише залишитись незмінною чи збільшитись.

! ***Ефективними*** (економними) називають коди джерел повідомлень, які забезпечують зменшення надмірності повідомлень під час кодування

Завдяки зменшенню надмірності повідомлень ефективні коди надають можливість більш ефективно використовувати канали зв'язку чи пристрої пам'яті.

Принципи побудови ефективних кодів. Для того, щоб сформулювати принципи побудови ефективних кодів, необхідно згадати причини надмірності повідомлень:

– статистична залежність між знаками в повідомленнях джерела;

– нерівноймовірність знаків у повідомленнях джерела.

Тому побудова ефективного коду проводиться в два етапи. На ***першому етапі*** усувається статистична залежність між знаками, що підлягають кодуванню, шляхом укрупнення алфавіту. Укрупнення алфавіту полягає в тому, що деякі знаки джерела A об'єднуються в знакосполучення з кількох знаків (у слова). Об'єднання виконується так, щоб знакосполучення в повідомленнях були незалежними. Якщо знаки джерела A незалежні, то перший етап не потрібний.

На ***другому етапі*** побудови коду необхідно врахувати наступні особливості:

– двійкові символи на виході кодера повинні бути рівноймовірними;

– у вправі 3.1 доведено, що зменшення надмірності можливе лише при використанні нерівномірних кодів;

– чим менша ймовірність знака a_k, тим менше інформації він несе, тим менше двійкових символів (меншу довжину) повинна мати кодова комбінація, що відповідає знаку a_k. Наприклад, $i(a_k) = 3$ дв.од., тоді недоцільно використовувати для знаку a_k комбінацію довжини $n_k \geq 4$, оскільки це породжує надмірність;

– код повинен бути *префіксним – ніяка з коротких кодових комбінацій не повинна бути початком більш довгої кодової комбінації.* Тоді для правильного декодування послідовності не потрібно передавати розділові знаки між кодовими комбінаціями.

Оскільки для побудови ефективного коду використовують імовірності знаків, то ефективні коди називають також *статистичними.*

Числовими характеристиками ефективного коду є:

– *коефіцієнт ефективності коду* $\eta = H(A)/\,\overline{n}$, тобто відношення ентропії джерела $H(A)$ до середньої довжини кодової комбінації $\overline{n} = \sum_k n_k P(a_k)$. Згідно з теоремою кодування Шеннона $\eta \leq 1$;

– *коефіцієнт стиснення повідомлень* $\mu = n/\overline{n}$, тобто відношення довжини рівномірного коду n до середньої довжини кодової комбінації $\overline{n}$. Набуває значення $\mu \geq 1$, і чим краще стиснення, тим значення μ є більшим

Застосовувані ефективні коди. Першим ефективним статистичним кодом був код Морзе (1837 р.), але він не префіксний, тому його коефіцієнт ефективності незначний. Нині його застосування дуже обмежене.

Першим ефективним префіксним кодом став запропонований код Шеннона-Фано (1951 р.), описаний в [1, с. 308]. Алгоритм побудови коду Шеннона-Фано має таку послідовність процедур за кроками.

1. Упорядкування шляхом розміщення знаків джерела в порядку спадання їхніх імовірностей.

2. Розділення знаків на 2 групи з приблизно рівними ймовірностями. Ця процедура призводить до різних кінцевих результатів, залежно від розділення знаків на групи, як це показано в табл. Л3.2 для двох варіантів.

3. Знакам верхньої групи (в таблиці) приписується символ “0”, знакам нижньої групи – символ “1” (чи навпаки, це не має істотного значення).

4. Повторення кроків 2 і 3, доки розділення знаків на групи не закінчиться і їм не будуть приписані символи “0” чи “1”.

5. Кодова комбінація знака формується шляхом виписування символів, приписаних цьому знаку, зліва направо.

Приклад 3.1. Побудувати код Шеннона-Фано. Знаки джерела $a_1…a_6$ незалежні і мають такі ймовірності: $P(a_1) = P(a_2) = 0{,}05$; $P(a_3) = 0{,}40$; $P(a_4) = 0{,}20$; $P(a_5) = P(a_6) = 0{,}15$. Обчислити ентропію джерела, середню довжику кодової комбінації, коефіцієнт ефективності та коефіцієнт стиснення отриманого коду.

Розв'язання. Можливі два варіанти коду, які показані в табл. 3.3.

Таблиця Л3.3 – Приклад побудови коду Шеннона-Фано

<table>
<tr><td rowspan="7">1-й варі-ант</td><td>a_k</td><td>$P(a_k)$</td><td colspan="4">Кроки 1…4</td><td>Кодові комбінації</td><td rowspan="7">2-й варі-ант</td><td>a_k</td><td>$P(a_k)$</td><td colspan="4">Кроки 1…4</td><td>Кодові комбінації</td></tr>
<tr><td>a_3</td><td>0,40</td><td rowspan="2">0</td><td>0</td><td colspan="2"></td><td>00</td><td>a_3</td><td>0,40</td><td colspan="4">0</td><td>0</td></tr>
<tr><td>a_4</td><td>0,20</td><td>1</td><td colspan="2"></td><td>01</td><td>a_4</td><td>0,20</td><td rowspan="5">1</td><td rowspan="2">0</td><td colspan="2">0</td><td>100</td></tr>
<tr><td>a_5</td><td>0,15</td><td rowspan="4">1</td><td>0</td><td colspan="2"></td><td>10</td><td>a_5</td><td>0,15</td><td colspan="2">1</td><td>101</td></tr>
<tr><td>a_6</td><td>0,15</td><td rowspan="3">1</td><td colspan="2">0</td><td>110</td><td>a_6</td><td>0,15</td><td rowspan="3">1</td><td colspan="2">0</td><td>110</td></tr>
<tr><td>a_1</td><td>0,05</td><td rowspan="2">1</td><td>0</td><td>1110</td><td>a_1</td><td>0,05</td><td rowspan="2">1</td><td>0</td><td>1110</td></tr>
<tr><td>a_2</td><td>0,05</td><td>1</td><td>1111</td><td>a_2</td><td>0,05</td><td>1</td><td>1111</td></tr>
</table>

З прикладу видно, що при першому варіанті кодування середня довжина кодової комбінації $\overline{n} = 2{,}35$ символів, а при другому варіанті кодування $\overline{n} = 2{,}30$ символів. Ентропія джерела $H(A) = 2{,}247$ дв.од./знак.

Числові параметри коду для кращого другого варіанту кодування такі:

– коефіцієнт ефективності $\eta = H(A)/\,\overline{n} = 2{,}247/2{,}3 = 0{,}977$;

– коефіцієнт стиснення $\mu = n/\overline{n} = 3/2{,}3 = 1{,}3$.

Другим ефективним префіксним кодом є код, запропонований Д. Хаффменом (1952 р.). Цей код є оптимальним префіксним кодом для дискретних джерел без пам’яті за критерієм – мінімальна середня довжина кодової комбінації знака.

Код Хаффмена відіграє важливу роль у кодуванні зображень. Він є основною частиною побудови за стандартами JPEG, MPEG і H.261. Є стандартним для кодування факсимільних повідомлень згідно з Рекомендацією Е.452 Міжнародного Союзу Електрозв’язку. Крім того, код Хаффмена використовуються для кодування аудіо сигналів.

Оскільки код Хаффмена розглядається в рекомендованій літературі тільки в [3], розглянемо його детально. Алгоритм побудови коду Хаффмена базується на кодовому дереві і має таку послідовність процедур.

1. Упорядкування знаків шляхом розміщення їх у порядку спадання їхніх імовірностей.

2. Вибирають два вузли (знаки) з найменшими ймовірностями. З них будують дві вітки, які сходяться в один вузол, що відповідає складеному знаку, а його ймовірність дорівнює сумі ймовірностей вузлів, з яких вийшли вітки. Віткам приписують символи 1 і 0, наприклад, верхній вітці 1, а нижній вітці 0.

3. Повторення кроків 1 і 2 доки не буде досягнуто кореня кодового дерева.

4. Кодова комбінація знака формується шляхом виписування символів, починаючи з кореня кодового дерева, проходячи по вітках до цього знака, тобто справа наліво.

Примітка. У випадку, коли кілька знаків мають однакові імовірності, поєднуються ті два з них, що до цього мали найменше число об’єднань. Цим досягається вирівнювання довжин кодових комбінацій, що зменшує середню довжину кодової комбінації.

Приклад 3.2. Побудувати код Хаффмена. Знаки джерела $a_1 \ldots a_6$ незалежні і мають такі ймовірності: $P(a_1) = 0{,}12$; $P(a_2) = P(a_3) = 0{,}10$; $P(a_4) = 0{,}05$; $P(a_5) = P(a_6) = 0{,}15$; $P(a_7) = 0{,}21$; $P(a_8) = 0{,}08$; $P(a_9) = 0{,}04$. Обчислити ентропію джерела, середню довжину кодової комбінації, коефіцієнт ефективності та коефіцієнт стиснення отриманого коду.

Розв’язання. Побудову коду Хаффмена наочно показано в табл. Л3.3. Перегрупування не відображено на рисунку – в такому простому прикладі це зроблено «у розумі».

Середня довжина кодової комбінації знайденого коду $\overline{n} = 3{,}08$. Довжина кодової комбінації рівномірного коду, яким можна закодувати заданий алфавіт, $n \geq \log_2 9$ 3,17. Тому $n = 4$. Ентропія джерела

$$H(A) = -\sum_{k=1}^{9} P(a_k)\log_2 P(a_k) = 3{,}02 \text{ дв.од./знак.}$$

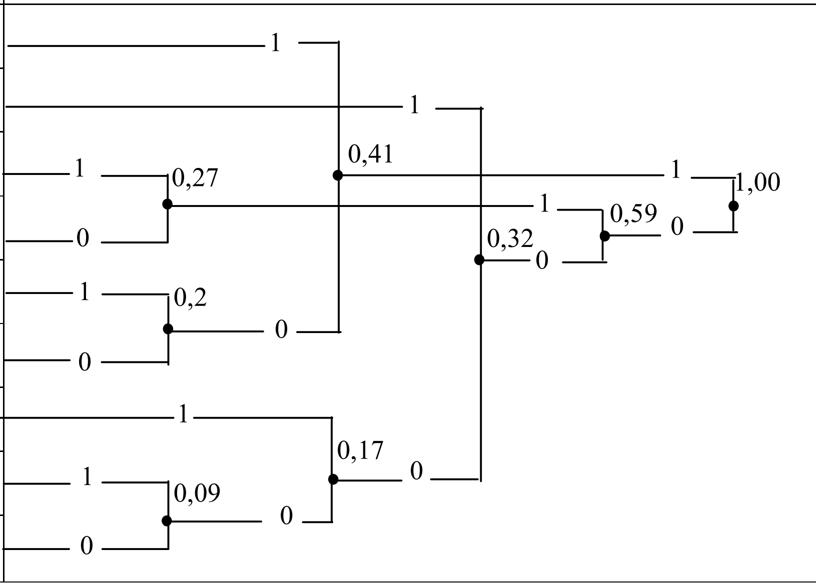
Числові параметри знайденого коду такі:

– коефіцієнт ефективності $\eta = H(A)/\,\overline{n} = 3{,}02/3{,}05 = 0{,}990$;

– коефіцієнт стиснення $\mu = n/\overline{n} = 4/3{,}05 = 1{,}143$.

З прикладу 3.2 випливає, що коефіцієнт стиснення коду Хаффмена незначний. Це тому, що ансамбль джерела має всього дев’ять знаків. Для джерела з більшим числом знаків і більшою різноманітністю ймовірностями цей показник підвищується.

Таблиця Л3.4 – Приклад побудови коду Хаффмена

Знаки	$P(a_k)$	**Граф коду Хаффмена**	**Кодові комбінації**
a_7	0,21		11
a_6	0,15		001
a_5	0,15		011
a_1	0,12		010
a_2	0,10		101
a_3	0,10		100
a_8	0,08		0001
a_4	0,05		00001
a_9	0,04		00000

Порівняємо формули (1.4) і (3.5). Легко помітити, що в разі, коли $n_k = -\log_2 P(a_k)$ для всіх k, то середня довжина кодової комбінації $\overline{n} = H(A)$. Відмітимо, це мінімально можливе значення $\overline{n}$, оскільки один двійковий символ при рівноймовірних символах не може переносити більше однієї двійкової одиниці інформації. З іншого боку, рівність $\overline{n} = H(A)$ досягається, коли ймовірності знаків, що кодуються, задовольняють рівності $P(a_k) = 2^{-n_k}$ для всіх k, тобто ймовірності є цілими степенями числа 2. У загальному випадку це не виконується. До цього можна лише наближатись під час укрупнення алфавіту. Викладене відображає суть *теореми кодування для джерела*:

> **!** Якщо ***кодування джерела*** ведеться двійковим кодом, то $\overline{n} = H(A) + \varepsilon$, де ε – як завгодно мала додатна величина

Контрольні питання

3.1. Чому знаки дискретного джерела підлягають кодуванню перед їх передаванням чи запам’ятовуванням?

3.2. Як визначаються основні параметри коду: обсяг (основа) вторинного алфавіту, довжина (розрядність) коду?

3.3. Яке число розрядів має бути в рівномірному коді, призначеному для кодування первинного алфавіту, що складається із 128 знаків, при основі коду m = 2, 4, 8, 16, 32.

3.4. Пояснити принцип ефективного кодування.

3.5. Як визначити коефіцієнти стиснення та ефективності нерівномірного коду?

ЗАДАЧІ для самостійної роботи студентів

3.1. Задано три коди

Номер коду	З н а к и							
	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7
1	000	001	010	011	100	101	110	111
2	0	1	00	01	10	11	110	111
3	00	01	100	101	1100	1101	1110	1111

Необхідно: 1) визначити вид коду; 2) визначити, які з цих кодів є префіксними та чому; 3) закодувати послідовність $a_6a_0a_3a_3a_7a_2a_1$ усіма трьома кодами; 4) декодувати двійкову послідовність: а) коду 1 – 111010011101000110; б) коду 3 – 1111001011110.

3.2. Закодувати число 47 натуральним кодом при основі коду m = 2, 4, 8, 10. Як змінюється число розрядів кодових комбінацій для різних основ коду.

3.3. Обсяг алфавіту джерела $M_А$ = 18 знаків, тривалість видачі одного знака $T_{зн}$ = 0,01 с. Визначити довжину (розрядність) рівномірного коду та швидкість цифрового сигналу (біт/с).

3.4. Джерело видає повідомлення (знаки) двійковими символами рівномірного коду: довжина коду 8 розрядів, тривалість видачі одного знака $T_{зн}$ = 0,1 мс. Визначити максимально можливе число кодових комбінацій, що можна закодувати цим кодом, тривалість видачі одного символу та швидкість цифрового сигналу (біт/с).

3.5. Імовірності повідомлень (знаків) джерела такі: $P(a_1) = 0{,}04$; $P(a_2) = 0{,}50$; $P(a_3) = 0{,}10$; $P(a_4) = 0{,}20$; $P(a_5) = 0{,}06$; $P(a_5) = 0{,}10$. Побудувати оптимальні нерівномірні двійкові коди Хаффмена чи Шеннона-Фано. Обчислити середню довжину кодової комбінації та вказати, на скільки вона менша за довжину рівномірного коду.

3.6. Декодувати послідовність 01101011111, яка була закодована кодом Хаффмена чи Шеннона-Фано: a_1 – 11111; a_2 – 0; a_3 – 110; a_4 – 10; a_5 – 11110; a_6 – 1110.

Словник основних термінів і понять

Алфавіт джерела (синонім – *алфавіт повідомлення*) – сукупність знаків, що використовуються джерелом для видачі повідомлень.

– *вторинний* – сукупність кодових символів, за допомогою яких здійснюється кодування і які відрізняються один від одного тими чи іншими ознаками.

Декодер – пристрій, що здійснює декодування.

Довжина (синонім – *розрядність*) *коду* n – число символів у кодовій комбінації рівномірного коду.

Знак – сукупність ознак, за яким що-небудь дізнається чи розпізнається. У теорії кодування все, що кодується, називають знаками.

Інформаційна послідовність (синоніми – *дані*, для двійкового коду – *інформаційні біти*) – послідовність символів вторинного алфавіту на виході кодера джерела повідомлень.

Код – алгоритм (правило) переходу від одного алфавіту до іншого.

– *багатопозиційний* (синонім – *недвійковий*) – код з основою m > 2.

– *двійковий* (синонім – *бінарний*) – код з основою m = 2, символами коду є 0 та 1.

– *джерела* – алгоритм (правило) переходу від знаків алфавіту джерела до кодових комбінацій символів вторинного алфавіту.

– *коректувальний* (синонім – *коригувальний*) – код, що дозволяє виявити та/або виправити помилки, набуті в каналі зв'язку через дію завад.

– *лінії* – правило подання двійкових символів імпульсами, які зручні для передавання певною фізичною лінією.

– *рівномірний* – код, що має постійне число кодових символів вторинного алфавіту в кожній кодовій комбінації.

– *нерівномірний* – код, що має змінне число кодових символів вторинного алфавіту в кодовій комбінації.

– *натуральний* – подання числового номера знака в будь-якій позиційній системі числення.

– *стандартний* – подання знаків джерела стандартизованими певною організацією зі стандартизації кодовими комбінаціями.

– – *Морзе* – перший ефективний статистичний непрефіксний недвійковий код, запропонований С. Морзе в 1837 р. Його вторинні символи – крапка, тире, пауза.

– – *Бодо* – перший п'ятирозрядний двійковий код для телеграфного зв'язку, запропонований у 1877 р. французьким винахідником Ж. Бодо.

– – *МТК № 2* – стандартний п'ятирозрядний двійковий Міжнародний телеграфний код № 2.

– – *МТК № 3* – стандартний семирозрядний двійковий Міжнародний телеграфний код № 3 з постійною вагою 3/4, тобто кожна кодова комбінація цього коду має три 0 і чотири 1.

– – *ASCII* – американський стандартний двійковий семирозрядний код для обміну інформацією, популярний через його застосування в комп'ютерах.

– *надмірний* – код, в якого кількість можливих кодових комбінацій M перевищує кількість знаків первинного алфавіту M_A, використовуються не всі кодові комбінації.

– *ефективний* (синонім – *економний*) – код, що дозволяє зменшити надмірність повідомлень.

– *Шеннона-Фано* –перший ефективний статистичний префіксний двійковий код, запропонований К. Шенноном та Р. Фано в 1951 р.

– *Хаффмена* – ефективний статистичний префіксний двійковий код, запропонований Д. Хаффменом у 1952 р.

– *регістровий* – код, в якого кількість кодових комбінацій M менша за кількість знаків первинного алфавіту M_A, а тому одні і ті кодові комбінації використовуються для кодування різних знаків.

– *оптимальний* – найкращий за якимось критерієм, наприклад, код Хаффмана оптимальний за критерієм мінімуму середньої довжини кодової комбінації.

– *префіксний* (синоніми – *незвідний*, *без коми*) – не потребує розділових знаків між кодовими комбінаціями.

– – *статистичний* – для кодування використовуються імовірнісні характеристики джерела повідомлень.

Кодування – процедура переходу від знаків одного алфавіту (первинного) до знаків (символів) іншого (вторинного) алфавіту.

Кодер – пристрій, що здійснює кодування.

Кодек – пристрій, що здійснює кодування та декодування.

Кодова таблиця – подання алгоритмів кодування та декодування у вигляді таблиці.

Кодова комбінація (синонім – *кодове слово*) – сукупність знаків вторинного алфавіту, що відображають один знак первинного алфавіту.

Кодове дерево – подання процедури кодування у вигляді графа.

Кодування дискретного джерела – перетворення знаків (повідомлень) джерела в кодові комбінації символів вторинного алфавіту.

Коефіцієнт стиснення повідомлення – відношення довжини рівномірного коду n до середньої довжини кодових комбінацій нерівномірного коду.

Коефіцієнт ефективності коду – відношення ентропії джерела до середньої довжини кодових комбінацій нерівномірного коду.

Обсяг алфавіту джерела повідомлень $M_А$ – кількість знаків, що використовуються джерелом.

Основа коду (синонім – *обсяг вторинного алфавіту*)– кількість символів вторинного алфавіту, що використовуються для кодування.

Символи – стандартні знаки вторинного алфавіту, за допомогою яких здійснюється кодування, відрізняються один від одного тими чи іншими ознаками, наприклад, 0 та 1.

Формат коду (синонім – *форматування коду*) – перетворення цифрової послідовності символів вторинного алфавіту в цифровий сигнал.

Цифрова послідовність (синонім – *цифровий потік*, *дані*) – послідовність символів вторинного алфавіту на виході кодера.

Лекція 4. Інформаційні характеристики джерела неперервних повідомлень

Тематика лекції

1 Математичні моделі джерел неперервних повідомлень та їх статистичні характеристики.

2 Інформаційні характеристики джерела неперервних повідомлень: кількість інформації; ентропія неперервного джерела; диференціальна, відносна та епсилон-ентропії, їхні властивості; надмірність; епсилон-продуктивність.

Таблиця Л4.1 – Розрахункові формули інформаційних характеристик неперервного сигналу $b(t)$

Найменування характеристики	**Розрахункова формула**	**Номер формули**
Кількість інформації у відліку, дв.од. (біт)	Прямує до нескінченості	(4.1)
Диференціальна ентропія джерела при незалежних відліках, дв.од./відлік (біт/відлік)	$h(B) = -\int_{-\infty}^{\infty} p(b)\log_2(p(b))db$	(4.2)
Взаємна диференціальна ентропія джерел $b(t)$ і $\hat{b}(t)$ при незалежних відліках, дв.од./відлік (біт/відлік)	$h_{вз}(B/\hat{B}) = h(B) - h(B/\hat{B}) =$ $= h(\hat{B}) - h(\hat{B}/B)$	(4.3)
Максимальна диференціальна ентропія при обмеженій середній потужності сигналу $b(t)$, дв.од./відлік (біт/відлік)	$h_{\max}(B) = \log_2 \sqrt{2\pi e D\{B\}}$	(4.4)
Максимальна диференціальна ентропія при обмеженому інтервалі значень сигналу $b(t)$, дв.од./відлік (біт/відлік)	$h_{\max}(B) = \log_2 \sqrt{12 D\{B\}}$	(4.5)

Закінчення табл. Л4.1

Відносна ентропія неперервного сигналу $b(t)$, який відтворено з похибкою $\varepsilon(t)$, дв.од./відлік (біт/відлік)	$H_{\text{від}}(B) = h(B) - h(\text{E})$	(4.6)
Епсилон-ентропія неперервного сигналу $b(t)$, дв.од./відлік (біт/відлік)	$H_\varepsilon(B) = \min[h(B) - h(\text{E})] = h(B) - \max h(\text{E})$	(4.7)
Надмірність (надлишковість) джерела	$K_{\text{над}} = 1 - H_\varepsilon(B)/\max H_\varepsilon(B)$	(4.8)
Епсилон-продуктивність джерела, дв.од./с (біт/с)	$R_{\varepsilon\ \text{дж}} = 2F_{\max}H_\varepsilon(B)$	(4.9)
Пояснення: $D\{B\} = \sigma_b^2$ – дисперсія сигналу $b(t)$; $p(b)$ – одновимірна густина ймовірності відліку сигналу $b(t)$; $F_{\max}$ – максимальна частота спектра сигналу $b(t)$		

Математичні моделі джерел неперервних повідомлень. У телекомунікаційних системах неперервне повідомлення $a(t)$ перетворюється пропорційно (без втрат інформації) у первинний сигнал $b(t) = ka(t)$. Виявилось зручним замість аналізу інформаційних характеристик джерела неперервних повідомлень аналізувати інформаційні характеристики первинного сигналу $b(t)$. Тому в подальшому мова йде лише про первинний неперервний сигнал $b(t)$.

Сигнал $b(t)$ – це реалізації стаціонарного ергодичного випадкового процесу $B(t)$ з його ймовірнісними характеристиками:

1) одновимірними функцією розподілу $F(b)$ та густиною ймовірності $p(b)$;

2) середнім значенням $\overline{B}$ та дисперсією $D\{B\}$;

3) функцією кореляції $K_B(\tau)$ та спектральною густиною потужності $G_B(\omega)$.

! ***Всі неперервні повідомлення*** (еквівалентні їм дійсні первинні сигнали) мають ***спектри***, зосереджені в обмеженій смузі частот 0...$F_{\max}$

Деякі з математичних моделей неперервних джерел повідомлень та завад розглянуті у [2, с. 73...78]. Там же детально описана модель мовного повідомлення.

Інформаційні характеристики джерел неперервних повідомлень. Кількість інформації в неперервному повідомленні розглянута, наприклад, у [1, с. 313]. Результат не є несподіваним – кількість інформації в неперервному повідомленні і відповідному йому первинному сигналі $b(t)$ прямує до нескінченності. А це тому, що неперервне повідомлення має нескінченну множину реалізацій, імовірність появи будь-якої з них прямує до нуля.

! ***Кількість інформації*** в неперервному повідомленні прямує до нескінченності

Інтуїтивно зрозуміло, що різні сигнали містять різну кількість інформації. Крім того, сигнал більшої тривалості надає одержувачу більшу кількість інформації. Тому для числової оцінки середньої кількості інформації неперервного джерела (за аналогією з дискретним джерелом) було введено поняття "***ентропія неперервного джерела***".

! Як відзначено в [5], поняття "***ентропія неперервного джерела***" більш як за півстоліття так і не дістало загальноприйнятої назви та визначення. У К. Шеннона ця величина взагалі не має назви, нині різними авторами використовуються терміни – диференціальна, відносна, Кульбака-Лейблера, епсилон-ентропія, функція швидкість-спотворення

У цьому посібнику для ентропії неперервного джерела використовується поняття і терміни з [1, 2, 5].

Диференціальна ентропія джерела неперервного сигналу $b(t)$ є аналогом ентропії джерела дискретного повідомлення, формально обчислюється як математичне сподівання кількості інформації у відліку за густиною ймовірності, характеризує ступінь невизначеності джерела. Її властивості детально описані в [1, с. 314...316], [3, с. 211...219].

Звертаємо увагу на те, що диференціальна ентропія:

– обчислюється на відлік, а відліки сигналу можуть бути незалежними або залежними;

– залежить від дисперсії сигналу $b(t)$ та її розмірності;

– не показує середньої кількості інформації у відліку, але надає можливість порівнювати кількість інформації різних джерел.

Приклади виведення формул диференціальної ентропії наведені у вправах 4.1 та 4.2, розрахункові формули – у табл. Л4.2. Для залежних (корельованих) відліків вона розраховується за n-вимірною густиною ймовірності.

Вправа 4.1. Вивести формулу для обчислення диференціальної ентропії сигналу $b(t)$, якщо він має гауссів розподіл імовірності з нульовим середнім значенням.

Розв'язання. Якщо у формулу (4.2) підставити вираз $p(b)$ для гауссового розподілу ймовірностей, дістанемо

$$h(B) = \int_{-\infty}^{\infty} p(b)\log_2 \frac{1}{p(b)}db = \int_{-\infty}^{\infty} p(b)\log_2\left[\sqrt{2\pi D\{B\}}\exp\left(\frac{b^2}{2D\{B\}}\right)\right]db =$$

$$= \log_2\sqrt{2\pi D\{B\}}\int_{-\infty}^{\infty} p(b)db + \int_{-\infty}^{\infty} p(b)\log_2\left[\exp\left(\frac{b^2}{2D\{B\}}\right)\right]db.$$

Оскільки $\int_{-\infty}^{\infty} p(b)db = 1$, $\log_2 e^z = z\cdot\log_2 e$ та $\int_{-\infty}^{\infty} b^2 p(b)db = D\{B\}$,

то $h(b) = \log_2\sqrt{2\pi D\{B\}} + 0{,}5\log_2 e = \log_2\sqrt{2\pi e D\{B\}}$.

Вправа 4.2. Вивести формулу для обчислення диференціальної ентропії сигналу $b(t)$ з рівномірним розподілом ймовірності і нульовим середнім значенням.

Розв'язання. Якщо у формулу (4.2) підставити вираз $p(b)$ для рівномірного розподілу, дістанемо

$$h(b) = \int_{-b_{\max}}^{b_{\max}} p(b)\log_2(2b_{\max})db = \log_2(2b_{\max})\int_{-b_{\min}}^{b_{\max}} p(b)db.$$

Оскільки $\int_{-\infty}^{\infty} p(b)db = 1$ та для рівномірного розподілу ймовірності $D\{B\} = (2b_{\max})^2/12$, то $h(b) = \log_2\sqrt{12D(B)}$.

Таблиця Л4.2 – Розрахункові формули для диференціальної ентропії (на відлік) сигналу $b(t)$ з дисперсією $D\{B\}$ при незалежних відліках, дв.од./відлік (біт/відлік)

Розподіл імовірностей сигналу *b*(*t*)	**Диференціальна ентропія *h*(*B*)**	**Номер формули**
Гауссів: $p(b) = \frac{1}{\sqrt{2\pi D\{B\}}}\exp\left(-\frac{b^2}{2D\{B\}}\right)$	$\log_2\sqrt{2\pi eD\{B\}}$	(4.10)
Односторонній експоненціальний: $p(b) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{D\{B\}}}\exp\left(-\frac{b}{\sqrt{D\{B\}}}\right), & b \ge 0, \\ 0, & b < 0 \end{cases}$	$\log_2\sqrt{e^2 D\{B\}}$	(4.11)
Двосторонній експоненціальний (Лапласа): $p(b) = \frac{1}{\sqrt{2D\{B\}}}\exp\left(-\frac{\sqrt{2}\lvert b\rvert}{\sqrt{D\{B\}}}\right)$	$\log_2\sqrt{2e^2 D\{B\}}$	(4.12)
Рівномірний: $p(b) = \begin{cases} 1/(2b_{\max}), & \lvert b\rvert \le b_{\max} \\ 0, & \lvert b\rvert > b_{\max} \end{cases}$	$\log_2\sqrt{12D\{B\}}$	(4.13)

Приклад 4.1. Розрахувати диференціальну ентропію сигналів $b(t)$ з такими розподілами імовірності: *а*) гауссів; *б*) односторонній експоненціальний; *в*) двосторонній експоненціальний; *г*) рівномірний. Відліки незалежні, дисперсія сигналу $D\{B\} = 10^{-4}$ В^2.

Розв'язання. За формулами (4.10)…(4.13) маємо:

а) для гауссового розподілу

$$h(B) = \log_2\sqrt{2\text{p}\, eD\{B\}} = 0{,}5\log_2(2\pi e\cdot 10^{-4}) = -4{,}60 \text{ дв.од./відлік;}$$

б) для одностороннього експоненціального розподілу

$$h(B) = \log_2\sqrt{e^2 D\{B\}} = 0{,}5\log_2(e^2\cdot 10^{-4}) = -5{,}20 \text{ дв.од./відлік;}$$

в) для двостороннього експоненціального розподілу

$$h(B) = \log_2\sqrt{2e^2 D\{B\}} = 0{,}5\log_2(2e^2\cdot 10^{-4}) = -4{,}70 \text{ дв.од./відлік;}$$

г) для рівномірного розподілу

$$h(B) = \log_2\sqrt{12D\{B\}} = 0{,}5\log_2(12\cdot 10^{-4}) = -4{,}85 \text{ дв.од./відлік.}$$

! З прикладу 4.1 випливає, що, по-перше, ***диференціальна ентропія*** може бути ***від'ємною*** (визначається значенням дисперсії), по-друге, ***найбільша*** диференціальна ентропія при однаковій дисперсії має місце в разі гауссового розподілу сигналу

Ентропію джерела неперервного сигналу b(t), яка характеризує кількість інформації у відліку, можна обчислити за різними співвідношеннями. Для цього треба звернутись до того очевидного факту, що сигнал $b(t)$ завжди можна подати наближеним до нього сигналом $\hat{b}(t)$ з деякою похибкою $\varepsilon(t)=\hat{b}(t)-b(t)$. Допустимий середній квадрат похибки $\overline{\varepsilon^2(t)}$ можна задати.

Відносна ентропія (синонім – ентропія Кульбака-Лейблера) [5] неперервного сигналу обчислюється як взаємна ентропія між сигнал $b(t)$ та його наближеним поданням $\hat{b}(t)$ (формула (4.6)). При цьому ніяких вимог до функції розподілу похибки $\varepsilon(t)$ не пред'являється, але очевидно, що чим більший середній квадрат похибки $\overline{\varepsilon^2(t)}$, тим менше значення відносної ентропії.

Академік А.М. Колмогоров увів поняття ***епсилон-ентропії***, використавши поняття еквівалентність сигналу $b(t)$ і його наближеного подання $\hat{b}(t)$. Сигнали $b(t)$ і $\hat{b}(t)$ називаються ***еквівалентними***, якщо середній квадрат похибки $\overline{\varepsilon^2(t)}$ не перевищує задане число ε_0^2.

Епсилон-ентропією $H_\varepsilon(B)$ називається мінімальна середня кількість інформації в одному незалежному відліку сигналу $\hat{b}(t)$ відносно сигналу $b(t)$, коли вони еквівалентні при заданому значенні похибки ε_0^2. При цьому розподіл імовірності похибки $\varepsilon(t)$ має бути таким, що забезпечує мінімальну середню кількість інформації у відліку (за обмеженої дисперсії похибки це гауссів розподіл імовірності).

! Тобто, ***епсилон-ентропія*** – мінімальна взаємна інформація між $\hat{b}(t)$ і $b(t)$, яку можна отримати про сигнал $b(t)$, спостерігаючи його наближене подання $\hat{b}(t)$: $H_\varepsilon(B) = \min h_{вз}(\hat{B}, B)$

Приклади виведення формул епсилон-ентропії подані у вправах 4.3, 4.4, розрахункові формули – у табл. Л4.3 для різних розподілів ймовірностей сигналу.

Вправа 4.3. Вивести формулу для обчислення епсилон-ентропії джерела неперервного сигналу $b(t)$ в загальному випадку.

Розв'язання. За формулою (4.7)

$$H_\varepsilon(B) = \min[h(B) - h(B/\hat{B})] = h(B) - \max h(B/\hat{B}) = h(B) - \max h(\mathrm{E}),$$

оскільки сигнали $b(t)$ і $\hat{b}(t)$ відрізняються на $\varepsilon(t)$.

При заданій дисперсії похибки $D\{E\} = \varepsilon_0^2$ мінімальне значення $h(E)$ має місце лише в разі гауссового розподілу похибки $\varepsilon(t)$. Тоді

$$H_\varepsilon(B) = h(B) - \log_2 \sqrt{2pe\varepsilon_0^2}\ . \qquad (4.14)$$

Вправа 4.4. Вивести формулу для обчислення епсилон-ентропії джерела неперервного сигналу $b(t)$ з гауссовим розподілом імовірностей.

Розв'язання. Якщо у формулу (4.14) підставити вираз $h(B)$ для гауссового розподілу ймовірностей (формула (4.10)), то отримаємо

$$H_\varepsilon(B) = \log_2 \sqrt{2p\, eD\{B\}} - \log_2 \sqrt{2p\, eD\{E\}} = 0{,}5\log_2\left[D(B)/D(E)\right] = 0{,}5\ \log_2 c_{с/п},$$

де $c_{с/п}$ – відношення дисперсій сигналу та похибки.

Вправа 4.5. Вивести формулу для обчислення епсилон-ентропії джерела неперервного сигналу $b(t)$, якщо сигнал має рівномірний розподіл ймовірностей.

Розв'язання. Якщо у формулу (4.14) підставити вираз $h(B)$ для рівномірного розподілу ймовірностей (формула (4.13)), то отримаємо

$$H_\varepsilon(B) = \log_2 \sqrt{12D\{B\}} - \log_2 \sqrt{2p\, eD\{E\}} = 0{,}5\log_2\left[(6/ep)D(B)/D(E)\right] = 0{,}5\ \log_2(6/e\pi)c_{с/п},$$

де $c_{с/п}$ – відношення дисперсій сигналу та похибки.

Таблиця Л4.3 – Розрахункові формули епсилон-ентропії на відлік неперервного сигналу $b(t)$ при незалежних відліках

Розподіл імовірностей сигналу $b(t)$	Епсилон-ентропія $H_\varepsilon(B)$, дв.од./відлік (біт/відлік)	Номер формули
Гауссів	$0{,}5\cdot\log_2 c_{с/п}$,	(4.15)
Односторонній експоненціальний	$0{,}5\cdot\log_2\left[(e/2p)\rho_{с/п}\right]$	(4.16)
Двосторонній експоненціальний (Лапласа)	$0{,}5\cdot\log_2\left[(2e/p)c_{с/п}\right]$	(4.17)
Рівномірний	$0{,}5\cdot\log_2((6/e\pi)\rho_{с/п})$	(4.18)
Пояснення: $c_{с/п}$ – відношення дисперсій сигналу $b(t)$ і похибки $\varepsilon(t)$		

Приклад 4.2. Розрахувати епсилон-ентропію джерел неперервного сигналу, якщо сигнали мають розподіли ймовірностей: *а*) гауссів; *б*) двосторонній експоненціальний; *в*) односторонній експоненціальний; *г*) рівномірний та відношення дисперсій сигналу і похибки $\rho_{с/п} = 43$ дБ.

Розв'язання. За формулами (4.15)…(4.18) маємо:

а) для гауссового розподілу

$H_\varepsilon(B) = 0{,}5\cdot\log_2\rho_{с-п} = 0{,}5\cdot\log_2 10^{4,3} = 7{,}14$ дв.од./відлік;

б) для одностороннього експоненціального розподілу

$H_\varepsilon(B) = 0{,}5\cdot\log_2(e\rho_{с-п}/2\pi) = 0{,}5\cdot\log_2(e\cdot 10^{4,3}/2\pi) = 6{,}54$ дв.од./відлік;

в) для двостороннього експоненціального розподілу

$H_\varepsilon(B) = 0{,}5\cdot\log_2(e\rho_{с-п}/\pi) = 0{,}5\cdot\log_2(2e\cdot 10^{4,3}/\pi) = 7{,}54$ дв.од./відлік;

г) для рівномірного розподілу

$H_\varepsilon(B) = 0{,}5\cdot\log_2(6\rho_{с-п}/\pi e) = 0{,}5\cdot\log_2(6\cdot 10^{4,3}/\pi e) = 6{,}89$ дв.од./відлік.

! ***Надмірність*** джерела неперервного сигналу необхідно розраховувати, використовуючи епсилон-ентропією за формулою (4.10)

Приклад 4.3. Розрахувати надмірність джерела неперервного сигналу з епсилон-ентропією, розрахованою в прикладі 4.2, *б*, $H_\varepsilon(B) = 6{,}54$ дв.од./відлік.

Розв'язання. За формулою (4.8) надмірність джерела $K_{\text{над}} = 1 - H_\varepsilon(B) / \max H_\varepsilon(B)$. Якщо прийняти, що густина ймовірності сигналу гауссова, то $\max H_\varepsilon (B) = 7{,}14$ дв.од./відлік (приклад 4.3) і надмірність джерела $K_{\text{над}} = 1 - 6{,}54/7{,}14 = 0{,}084$.

Продуктивність (швидкість видачі інформації) джерела неперервного сигналу можна обчислити, знаючи ентропію.

Продуктивність, обчислена за відносною ентропією, дістала назву – ***функція швидкість-спотворення***. Методи її числових розрахунків надані в [5], с. 247…251.

! Продуктивність джерела неперервного сигналу, обчислена за епсилон-ентропією носить назву – ***епсилон-продуктивність*** (формула (4.9) в табл. Л4.1.

Приклад 4.4. Розрахувати епсилон-продуктивність джерела неперервного сигналу з рівномірним спектром і максимальною частотою спектра 15,0 кГц., епсилон-ентропія якого обчислена в прикладі 4.2, *г*.

Розв'язання. Якщо спектр сигналу рівномірний, то інтервал часу між незалежними відліками $T_{\text{д}} = 1/(2F_{\max})$ і епсилон-продуктивність буде $R_{\varepsilon\ \text{дж}} = H_\varepsilon(B)/T_{\text{д}} = 2F_{\max}H_\varepsilon(B)$. При $H_\varepsilon(B) = 7{,}14$ дв.од./відлік $R_{\varepsilon\ \text{дж}} = 2\cdot 15\cdot 10^3\cdot 7{,}14 = 214{,}2\cdot 10^3$ дв.од/с.

! З прикладів 4.2…4.4 випливає, що ***найбільше значення*** епсилон-ентропії має сигнал із гауссовим розподілом ймовірності при однаковій похибці його подання і, як наслідок, найбільшу епсилон-продуктивність

Контрольні питання

4.1. Чому дорівнює кількість інформації від джерела неперервного сигналу?

4.2. Чи може диференціальна ентропія набувати від'ємних значень?

4.3. Чим відрізняється диференціальна ентропія від ентропії дискретного джерела?

4.4. Нехай $b(t)$ – первинний сигнал, що має обмежений спектр. У дискретизаторі він замінюється відліками, взятими через інтервал Котельникова. Втрачається чи ні при такому перетворенні інформація?

4.5. Дати визначення поняття – відносна ентропія, епсилон-ентропія джерела неперервного сигналу.

4.6. Дати визначення поняття – епсилон-продуктивність джерела неперервного сигналу.

ЗАДАЧІ для самостійної роботи студентів

4.1. Диференціальна ентропія джерела неперервного сигналу $h(B)$ = 3,8 дв.од./відлік та диференціальну ентропію похибки $h(\mathrm{E})$ = –2,6 дв.од./відлік. Обчислити епсилон-ентропію цього джерела.

4.2. Розрахувати диференціальну ентропію джерела неперервного сигналу, що має гауссів (односторонній чи двосторонній експоненціальний) розподіл імовірності з дисперсією 0,25 B^2.

4.3. Розрахувати епсилон-ентропію джерела неперервного сигналу, що має гауссів розподіл імовірності з дисперсією 2,5 B^2. Дисперсія похибки 0,0025 B^2.

4.4. Розрахувати епсилон-продуктивність джерела неперервного сигналу, що має гауссів розподіл імовірності з дисперсією 2,5 B^2, дисперсія похибки 0,0025 B^2. Спектр сигналу рівномірний у смузі частот від 0 до 5,0 кГц.

4.5. Розрахувати епсилон-продуктивність джерела неперервного сигналу, що має гауссів розподіл імовірностей, відношення дисперсій сигналу і похибки 40 дБ. Спектр сигналу рівномірний у смузі частот від 0 до 15,0 кГц.

Словник основних термінів і понять

Відносна ентропія джерела неперервного сигналу (синонім – ентропія Кульбака-Лейблера) – середня кількість інформації у відліку неперервного сигналу, поданого з певною похибкою.

Диференціальна ентропія – формально, за аналогією з дискретним джерелом, обчислене математичне сподівання кількості інформації у відліку неперервного сигналу за густиною ймовірності. Вона не показує середньої кількості інформації джерела неперервного сигналу, але надає можливість порівнювати кількість інформації різних джерел.

Еквівалентність сигналів – два неперервних сигнали є еквівалентними, якщо розраховані для їх реалізацій середні квадрати різниці не перевищують задану величину e_0^2.

Ентропія джерела неперервного сигналу – середня кількість інформації у відліку неперервного сигналу, обчислена за певним правилом.

Епсилон-ентропія джерела неперервного сигналу (уведена акад. А.М. Колмогоровим) – мінімальна середня кількість інформації в одному незалежному відліку сигналу $\hat{b}(t)$ відносно сигналу $b(t)$, коли вони еквівалентні при заданому значенні середнього квадрату похибки ε_0^2.

Епсилон-продуктивність – середня швидкість видачі інформації джерелом неперервного сигналу обчислена за епсилон-ентропією.

Функція швидкість-спотворення – середня швидкість видачі інформації джерелом неперервного сигналу, поданого з похибкою $\varepsilon(t)$, що обчислюється за відносною ентропією.

Лекція 5. Кодування неперервних повідомлень

Тематика лекції

1 Загальні принципи кодування неперервних повідомлень: аналого-цифрове (АЦП) та цифроаналогове (ЦАП) перетворення.

2 Кодування за методом імпульсно-кодової модуляції (ІКМ): структура АЦП та ЦАП, завадостійкість, компандування.

3 Порядок розрахунків параметрів АЦП та ЦАП при ІКМ.

Таблиця Л5.1 – Розрахункові формули параметрів цифрового методу передачі (ЦМП) неперервних (аналогових) сигналів методом ІКМ

Найменування параметра	**Розрахункова формула**	**Номер формули**
Частота дискретизації	$f_д = 1/T_д \geq 2F_{max}$	(5.1)
Інтервал дискретизації	$T_д = 1/f_д$	(5.2)
Крок квантування	$\Delta b = (b_{max} - b_{min})/(L - 1) =$ $2\,b_{max}/(L - 1)$	(5.3)
Квантовані відліки	$b_{кв}(kT_д) = L_i(kT_д)\Delta b$	(5.4)
Відліки шуму квантування	$\varepsilon_{кв}(kT_д) = b_{кв}(kT_д) - b(kT_д)$	(5.5)
Середня потужність шуму квантування	$\overline{\varepsilon_{кв}^2} = (\Delta b)^2/12$	(5.6)
Відношення сигнал/шум квантування	$\rho_{кв} = 3(L - 1)^2/K_А{}^2$	(5.7)
Допустиме число рівнів квантування при рівномірному кодуванні відліків для заданого відношення сигнал/шум квантування $\rho_{кв\,доп}$	$L_{доп} \geq K_А\sqrt{\rho_{кв\,доп}/3} + 1$	(5.8)
Довжина (розрядність) коду АЦП	$n \geq \log_2 L_{доп}$	(5.9)
Тривалість двійкового символу на виході АЦП	$T_б = T_д/n$	(5.10)
Швидкість цифрового сигналу на виході АЦП, біт/с	$R = 1/T_б = nf_д$	(5.11)
Похибка на виході ЦАП, викликаного помилками в цифровому каналі зв'язку	$\varepsilon_{цк}(kT_д) = \hat{b}_{кв}(kT_д) - b_{кв}(kT_д)$	(5.12)
Потужність шуму на виході ЦАП, викликаного помилками в цифровому каналі зв'язку	$\overline{\varepsilon_{цк}^2} = p(\Delta b)^2 \cdot (4^n - 1)/3$	(5.13)
Співвідношення між $\overline{\varepsilon_{кв}^2}$ і $\overline{\varepsilon_{цк}^2}$	$\overline{\varepsilon_{цк}^2} = \overline{\varepsilon_{кв}^2}\left(\rho_{кв}/\rho_{вих} - 1\right)$	(5.14)
μ-закон компандування	$y = y_{max}\dfrac{\ln\left(1 + \mu(x/x_{max})\right)}{\ln(1 + \mu)}$	(5.15)
A-закон компандування	$y = y_{max}\dfrac{[A(\lvert x\rvert/x_{max})]}{1 + \ln A}\operatorname{sgn} x$ при $0 < \lvert x\rvert/x_{max} \leq 1/A$; $y = y_{max}\dfrac{1 + \ln[A(\lvert x\rvert/x_{max})]}{1 + \ln A}\operatorname{sgn} x$ при $1/A < \lvert x\rvert/x_{max} < 1$	(5.16)

Пояснення до таблиці Л5.1

$K_А$ – коефіцієнт амплітуди аналогового сигналу;
b_{max} та b_{min} – максимальне та мінімальне значення сигналу відповідно;
F_{max} – максимальна частота спектра аналогового сигналу;
L_i – номери рівнів квантування, що набувають значення 0, ±1, ±2, ±3, …, ±0,5(L – 1);
$\hat{b}_{кв}(kT_д)$ – відновлений у ЦАП квантований відлік, що відрізняється від квантованого відліку в АЦП через помилки в каналі зв'язку;
p – імовірність помилки символу на вході ЦАП (виході каналу зв'язку);
μ, A – додатні константи, типові значення: $\mu = 255$, $A = 87{,}6$;
x та y – значення сигналу на вході та виході компресора відповідно;
x_{max} та y_{max} – максимальні додатні значення сигналу на вході і виході компресора відповідно;
$\rho_{вих} = \dfrac{P_b}{\varepsilon^2_{кв} + \varepsilon^2_{цк}}$ відношення сигнал/завада на виході ЦАП;
$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} +1 & \text{при} \quad x \ge 0, \\ -1 & \text{при} \quad x < 0 \end{cases}$ – знакова функція

Загальні принципи кодування неперервних повідомлень. При ***кодуванні*** неперервних повідомлень враховують той факт, що джерело неперервних повідомлень виконує перетворення повідомлення $a(t)$ в електричний первинний сигнал $b(t)$, який прийнято називати ***аналоговим***. Кодування неперервного (аналогового) первинного сигналу $b(t)$ призначено для його передавання цифровими каналами чи запам'ятовування.

Передавання аналогових сигналів цифровими сигналами того чи іншого алфавіту дістало назву ***цифрового методу передавання*** (ЦМП). Для організації ЦМП аналоговий сигнал перетворюється в цифровий за допомогою ***кодера джерела*** аналогових сигналів, який названо – ***аналого-цифровий перетворювач*** (АЦП), тобто поняття кодер джерела аналогових сигналів і АЦП, це різні назви (синоніми) одного і того ж процесу і широко використовуються в літературі. Для видачі одержувачу аналогового сигналу здійснюється зворотне перетворення цифрового сигналу в аналоговий декодером – ***цифроаналоговим перетворювачем*** (ЦАП) (друга назва – декодером джерела аналогового сигналу).

Особливості ЦМП досить детально описані в [1, с. 453…456] та [3, с. 262…264].

Основні ***переваги*** ЦМП у порівнянні з аналоговими методами передавання:

– більш висока завадостійкість, що яскраво виявляється в системах зв'язку з багаторазовою ретрансляцією (переприйманням);

– можливість широкого застосування новітньої елементної бази цифрової обчислювальної техніки та мікропроцесорів;

– із впровадженням ЦМП з'явились умови для об'єднання методів передавання різних повідомлень на цифровій основі;

– простота спряження цифрового каналу та цифрових систем комутації.

До 90-х років минулого століття у літературі відмічався основний ***недолік*** ЦМП – необхідна широка смуга пропускання каналу зв'язку у порівнянні з аналоговим передаванням. Нині цей недолік усувається використанням ефективних методів кодування аналогових сигналів (див. лекцію 6) та використанням частотно-ефективних методів цифрової модуляції.

Будь-який ЦМП характеризується швидкістю цифрового сигналу (біт/с) і якістю відновлення переданого повідомлення. Звичайно ставиться задача – задовольнити вимозі за якістю відновлення повідомлення при мінімальній швидкості цифрового сигналу (зменшення швидкості цифрового сигналу призводить до зменшення витрат основних ресурсів каналу зв'язку – смуги пропускання каналу і потужності сигналу в каналі). Це призвело до розроблення великої кількості ЦМП.

! З ***інформаційної*** точки зору всі *запропоновані нині ЦМП*, в принципі, можна поділити на дві групи:
- ***без втрат*** інформації, що міститься в аналоговому сигналі;
- ***з втратами*** частини інформації, що міститься в аналоговому сигналі

Хоча кількість інформації в аналоговому повідомленні нескінчена (див. лекцію 4), але для практичної оцінки кількості інформації джерела аналогового сигналу використовуються поняття – епсилон-ентропія і епсилон-продуктивність.

Отже, враховуючи ці поняття, можна надати таку оцінку ЦМП:

– якщо швидкість цифрового сигналу із виходу АЦП R більша за епсилон-продуктивність джерела $R_{дж}$, тобто $R \geq R_{дж,}$ то кодування джерела здійснено без втрат інформації;

– і, навпаки, якщо швидкість цифрового сигналу R менша за епсилон-продуктивність джерела $R_{дж}$, тобто $R \leq R_{дж,}$ то кодування джерела здійснено з втратами інформації.

Під ***втратами інформації*** розуміється той факт, що епсилон-ентропія джерела аналогового сигналу більша, ніж ентропія отриманого в кодері цифрового сигналу (частина інформації не передається). Але це не означає, що якість відновлення в ЦАП (декодері) аналогового сигналу погіршується. Для обчислення епсилон-ентропії використовується середньоквадратичний критерій, а для оцінки якості сприймання відновленого сигналу споживачем (наприклад, людиною) можуть бути використані інші критерії, наприклад, середньої експертної оцінки суб'єктивного сприймання мови (див. лекцію 6).

Кодування за методом імпульсно-кодової модуляції. Аналого-цифрове та цифроаналогове перетворення. Принципи аналого-цифрового перетворення під назвою ІКМ[1] були запропоновані в 1938 р.

---

[1] Незважаючи на наявність у назві ІКМ слова "модуляція", цей метод перетворення аналог-цифра не має ніякого відношення ні до аналогової, ні до цифрової модуляції.

! Особливістю ***методу ІКМ*** є те, що кожний відлік аналогового сигналу представляється цифровим сигналом незалежно від інших відліків

Метод ІКМ, його особливості та параметри детально розглядаються в літературі з ЦМП, у тому числі в [1, с. 456…462], [3, с. 264…270]. Розрахункові формули наведено в табл. Л5.1.

! ***Аналогово-цифровий перетворювач***, як мінімум, містить три блоки: дискретизатор, квантувач, кодер

! ***Цифроаналоговий перетворювач***, як мінімум, містить два блоки, що виконують зворотне перетворення: декодер та інтерполюючий (відновлюючий) фільтр. Операція квантування в принципі не має зворотного перетворення

Коди ІКМ. Нині в ІКМ застосовуються такі коди: натуральний, симетричний та рефлексний. Таблиця кодів ІКМ наведена на рис. 17.4 [3], кодування цими кодами – приклад 17.2 [3].

Натуральний двійковий код є записом номера рівня квантування L_i у двійковій системі числення. *Старший розряд* відводиться для кодування знака, при цьому додатні рівні кодуються одиницею “1”, а від’ємні – нулем “0”.

Симетричний двійковий код (передбачений Рекомендацією МСЕ G.711 для передавання цифрового сигналу ІКМ каналами електрозв’язку) відрізняється від натурального тим, що має *симетрію* верхньої та нижньої частин кодової таблиці у всіх розрядах, крім старшого, відносно осі $L/2$, де $L = 2^k$ – загальне число рівнів квантування.

Рефлексний код (*код Грея*) будується так, щоб при зміні рівня квантування на одиницю, змінювалося значення тільки одного розряду кодової комбінації.

Який із цих кодів застосовувати, залежить від статистичних характеристик аналогового сигналу, параметрів каналу зв’язку та вимог до якості відновлення аналогового сигналу.

Завадостійкість ІКМ. Визначається, в основному, двома факторами – шумом квантування в АЦП та помилками в цифровому каналі зв’язку. Механізм утворення шуму квантування описано в [1, розд. 11.7], [3, розд. 17.2], розрахункові формули наведено в табл. Л5.1. Для оцінки впливу помилок на виході цифрового каналу зв’язку нині використовуються різні методики.

1. Середньоквадратична оцінка відхилення відновлених у ЦАП квантованих відліків від переданих квантованих відліків, яка визначається як потужність шуму на виході ЦАП, викликаного помилками в цифровому каналі зв'язку $\overline{e^2_{\text{цк}}}$ – формула (5.13) у табл. Л5.1.

2. Під час відновлення в ЦАП мовного сигналу помилки на виході цифрового каналу зв'язку призводять до значного відхилення відновленого сигналу від переданого, що сприймається на слух як клацання. Для цифрових каналів передавання мови встановлюють норми на допустиму ймовірність помилки, виходячи з середнього інтервалу часу між клацаннями, наприклад, 30 с.

3. Під час відновлення в ЦАП відеосигналу помилки на виході цифрового каналу теж призводять до відхилення прийнятого сигналу від переданого і, залежно від методу формування цифрового відеосигналу, проявляються як яскраві точки (спалахи) на екрані, смужки на рядках (так звані "треки"), зриви рядкової та кадрової синхронізації (це найбільш вагома похибка). Тому для цифрових каналів передавання відеосигналів встановлена норма на допустиму ймовірність помилки $p \le 10^{-10}\ldots10^{-11}$. При такій малій ймовірності помилки її впливом на якість відновлення відеосигналу можна нехтувати.

Приклад 5.1. Швидкість цифрового сигналу передавання мови R = 64 кбіт/с. Знайти допустиму ймовірність помилки $p_{\text{доп}}$.

Розв'язання. Якщо прийняти, що середній інтервал часу між клацаннями дорівнює $T_{\text{кл}}$ = 30 с, то ймовірність помилки

$$p_{\text{доп}} = 1/(RT_{\text{кл}}) = 1/(64\cdot10^3\cdot30) = 5\cdot10^{-7}.$$

У доповнення до прикладів [3] нижче наведено вправи та приклади розрахунків параметрів АЦП і ЦАП. Для їх освоєння потрібно спочатку ознайомитись із матеріалами [1] чи [3].

Вправа 5.1. Вивести формулу дисперсії шуму квантування $D\{\mathrm{E}_{\text{кв}}\}$ при рівномірному квантуванні в АЦП з кроком Δb.

Розв'язання. Якщо прийняти, що шум квантування має рівномірний розподіл імовірності в інтервалі $-\Delta b/2 \le \varepsilon \le \Delta b/2$, то дисперсія шуму квантування, це – дисперсія величини з рівномірним розподілом імовірності, яка дорівнює

$$D\{\mathrm{E}_{\text{кв}}\} = (\Delta b)^2/12.$$

Оскільки середнє значення шуму квантування дорівнює нулю, то потужність шуму квантування $\overline{\mathrm{e}_{\text{кв}}^2} = D\{\mathrm{E}_{\text{кв}}\}$.

Вправа 5.2. Вивести формулу відношення сигнал/шум квантування $\rho_{\text{кв}}$ при рівномірному квантуванні з кроком Δb та числом рівнів квантування L.

Розв'язання. Відношення сигнал/шум квантування $\rho_{\text{кв}} = P_b/\overline{\mathrm{e}_{\text{кв}}^2}$. Потужність сигналу $P_b = b_{\max}^2 / K_{\text{А}}^2$. За формулою (5.3) $(\Delta b)^2 = 4\ b_{\max}^2/(L-1)^2$. Тоді відношення сигнал/шум квантування буде $\rho_{\text{кв}} = \dfrac{12 b_{\max}^2 (L-1)^2}{4K_{\text{А}}^2\, b_{\max}^2} = \dfrac{3}{K_{\text{А}}^2}(L-1)^2$.

Вправа 5.3. Вивести формулу потужності шуму на виході ЦАП, викликаного помилками в цифровому каналі зв'язку, за відомими кроком квантування Δb, числом рівнів квантування L, довжиною коду АЦП n, імовірністю помилки символу p.

Розв'язання. Помилково прийняті символи в кодових комбінаціях призводить до зміни рівня квантування L_i на значення L_{i+m} з похибкою $\varepsilon_{цк} = L_{i+m} - L_i$, яка залежить від розряду k в кодовій комбінації, де виникла помилка, а значення похибки (тобто її "вага") визначається як $\varepsilon_{цк}(k) = 2^{(k-1)}\cdot\Delta b$, $k = 1, 2, 3,..., n$.

Помилки у розрядах кодових комбінацій рівноймовірні. В реальних системах передавання $p << 1$. Тоді ймовірність того, що кодова комбінація містить помилку, дорівнює np. Отже, потужність шуму, викликаного помилками в цифровому каналі зв'язку, визначається

$$\overline{e^2_{цк}} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} e^2_{цк}(k)np = \sum_{k=1}^{n} 2^{2(k-1)}(\Delta b)^2 .$$

Якщо врахувати рівність $\sum_{k=1}^{n} 2^{2(k-1)} = \left(4^n - 1\right)/3$, отримаємо наступну формулу

$$\overline{e^2_{цк}} = p(\Delta b)^2 \frac{4^n - 1}{3} .$$

Вправа 5.4. За заданими відношеннями сигнал/шум квантування $\rho_{кв}$ та сигнал/завада на виході ЦАП $\rho_{вих}$ знайти співвідношення між потужністю шуму квантування $\overline{e^2_{кв}}$ та потужністю шуму, викликаного помилками в цифровому каналі, $\overline{e^2_{цк}}$.

Розв'язання. За визначення маємо

$$с_{кв} = \frac{P_b}{\overline{\varepsilon^2_{кв}}} \text{ та } \rho_{вих} = \frac{P_b}{\overline{e^2_{кв}} + \overline{e^2_{кв}}} .$$

З цих співвідношень випливає, що

$$\overline{e^2_{цк}} = \overline{e^2_{кв}}\left(с_{кв}/с_{вих} - 1\right).$$

Вправа 5.5. Показати, якщо відношення сигнал/шум квантування $\rho_{кв}$ та відношення сигнал/завада $\rho_{вих}$ відрізняються на 3 дБ, то $\overline{e^2_{кв}} = \overline{e^2_{цк}}$.

Розв'язання. Різниця між $\rho_{кв}$ і $\rho_{вих}$ на 3 дБ означає, що $\rho_{кв}/\rho_{вих} = 10^{0,3} = 2$. Тоді з отриманої у вправі 5.4 формули випливає, що $\overline{e^2_{кв}} = \overline{e^2_{цк}}$.

Приклад 5.2. Знайти потужність шуму на виході ЦАП, викликаного помилками в цифровому каналі зв'язку, якщо $\overline{e^2_{кв}} = 10^{-4}$ В^2, відношення сигнал/шум квантування $\rho_{кв} = 45$ дБ та відношення сигнал/завада $\rho_{вих} = 40$ дБ.

Розв'язання. За формулою, отриманою у вправі 5.4, $\overline{e^2_{цк}} = \overline{e^2_{кв}}\left(с_{кв}/с_{вих} - 1\right)$. Оскільки $\rho_{кв}/\rho_{вих} = 10^{4,5}/10^{4,0} = 10^{0,5} = 3,16$, то $\overline{e^2_{цк}} = 10^{-4}\cdot 3,16 = 3,16\cdot 10^{-4}$ В^2.

Нерівномірне квантування. Необхідність нерівномірного квантування випливає з того, що при кроці квантування Δb = const відношення сигнал/шум квантування буде різним при великих та малих рівнях аналогового сигналу. Тому малі рівні сигналу слід квантувати з малим кроком Δb, а великі рівні – з більшим кроком Δb.

Цей метод кодування технічно реалізується при поєднанні компресора аналогового сигналу і квантувача з рівномірним кроком. Процедура компандування описана в [3, с. 269]. Найчастіше застосовується для мовних повідомлень (ІКМ для розмовних сигналів з нерівномірним квантуванням стандартизована Рекомендацією МККТТ G.711: частота дискретизації 8 кГц; довжина коду на виході кодера ІКМ 8 розрядів), тому що вони мають такі особливості:

– розподіл імовірностей – гауссів, тобто, малі рівні сигналу зустрічаються частіше, ніж великі;

– людське вухо сприймає звук нелінійно – краще розрізняє значення звукового тиску на малих рівнях.

Компресія розмовного сигналу забезпечує зменшення коефіцієнта амплітуди аналогового сигналу $K_А$. Відповідно до формули (5.7) збільшується відношення сигнал/шум квантування (або відповідно можна зменшити швидкість цифрового сигналу).

Оптимальним законом компандування є логарифмічний закон компресії, але його складно технічно забезпечити. Тому застосовують апроксимацію: A-закон (формула (5.16) в Європі й Азії і μ-закон (формула (5.15) у США, Канаді, Японії і в деяких інших країнах.

Існуючі нині два алгоритми ІКМ-кодування з нерівномірним квантуванням (A-закон і μ-закон) забезпечують необхідну якість цифрового передавання телефонних сигналів. Але відсутність єдиного міжнародного стандарту створює незручності, тому що вимагає перекодування мови при передаванні розмовного сигналу з однієї мережі зв'язку в іншу. Змушене перекодування вносить додаткові похибки і знижує якість передавання.

Технічне виконання АЦП та ЦАП при ІКМ. Як випливає з наведених вище пояснень, розрахункових формул, вправ та прикладів, АЦП та ЦАП при ІКМ можуть мати різні параметри: частоту дискретизації, число рівнів квантування і відповідну довжину коду, різні коди та закони компандування. Та й компресор (і відповідно – експандер) можна вмикати або в колі аналогового сигналу, або в колі цифрового сигналу.

З технологічної точки зору, особливо при масовому виробництві, таке різноманіття АЦП і ЦАП є незручним. Тому нині в зв'язку з масовим впровадження цифрових технологій виник такий компромісний варіант: фірми виготовляють типовий АЦП (і відповідно ЦАП) з мінімальним набором блоків (дискретизатор, квантувач, кодер) і довжиною коду, як правило, n = 16 (два байти)). Після АЦП вмикається ще один кодер, який у цифровому форматі виконує всі необхідні надалі операції (перетворення коду, зменшення довжини кодових комбінацій, компресію, нерівномірне квантування тощо) (рис. 5.1).

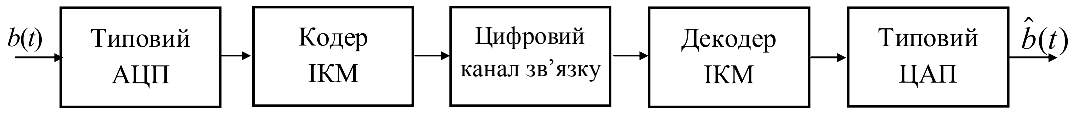


Рисунок Л5.1 – Узагальнена схема передавання аналогових сигналів методом ІКМ

Порядок розрахунків параметрів АЦП та ЦАП при ІКМ. Порядок та послідовність розрахунків параметрів АЦП і ЦАП, та які саме параметри розраховуються в значній мірі залежать від вихідних даних. Але обов'язковими мають бути параметри аналогового сигналу та вимоги до точності відновлення аналогового сигналу на виході ЦАП.

Типові вихідні дані для розрахунків АЦП та ЦАП при ІКМ:

– максимальна частота спектра аналогового сигналу $F_{\max}$;

– середня потужність аналогового сигналу P_b або його максимальне $b_{\max}$;

– коефіцієнт амплітуди аналогового сигналу $K_{\text{А}}$;

– допустиме відношення сигнал/шум квантування $\rho_{\text{кв.доп}}$;

– допустиме відношення сигнал/завада на виході ЦАП $\rho_{\text{вих.доп}}$;

– середній інтервал часу між клацаннями $T_{\text{кл}}$;

– в АЦП виконується рівномірне чи нерівномірне квантування.

***Вимагається розрахувати*:**

– частоту дискретизації $f_{\text{д}}$ та інтервал дискретизації $T_{\text{д}}$;

– число рівнів квантування L, довжину двійкового коду n, швидкість цифрового сигналу R;

– відношення сигнал/шум квантування $\rho_{\text{кв}}$ при вибраних параметрах АЦП;

– допустиму ймовірність помилки символу (біта) p на вході ЦАП;

– робочі параметри інтерполюючого фільтра ЦАП.

Розрахункові формули наведено в табл. Л5.1 та [1, 2, 3]. При цьому слід вирішити – вмикати чи не вмикати ФНЧ перед АЦП, так званий передфільтр? Відповідь проста:

– якщо спектр аналогового сигналу вже обмежений (задано $F_{\max}$) і подальше зменшення $F_{\max}$ не допустиме, то вмикати ФНЧ до АЦП немає потреби;

– якщо спектр аналогового сигналу необмежений, то з метою зменшення значення $F_{\max}$ сигнал пропускають через ФНЧ. Як правило, параметри передфільтра і інтерполюючого (відновлюючого) ФНЧ в ЦАП вибирають однаковими. Приклади розрахунків наведено нижче.

Приклад 5.3. Розрахувати параметри АЦП з рівномірним квантуванням за такими вихідними даними:

– максимальна частота спектра аналогового сигналу $F_{\max}$ = 14 кГц;

– максимальне значення аналогового сигналу $b_{\max}$ = 1,5 В;

– коефіцієнт амплітуди аналогового сигналу $K_{\text{А}}^2$ = 9,0 дБ або $K_{\text{А}}^2 = 10^{0,9} = 7{,}94$;

– допустиме відношення сигнал/шум квантування $\rho_{\text{кв.доп}}$ = 48 дБ або $\rho_{\text{кв.доп}} = 10^{4,8} =$ = 63096.

Розв'язання.

1. Згідно з теоремою Котельникова частота дискретизації $f_д = 1/T_д$ повинна задовольняти умові (формула (5.1)) $f_д \geq 2F_{\max}$.

Для заданого $F_{\max}$ = 14,0 кГц за рекомендаціями [1, 3] (запас на використання нескладного ФНЧ в ЦАП 10…15 %) можна вибрати $f_д$ = 32 кГц.

2. За заданим допустимим відношенням сигнал/шум квантування $\rho_{\text{кв.доп}}$ з формули (5.8) число допустимих рівнів квантування

$$L_{\text{доп}} \geq \sqrt{K_А^2 \rho_{\text{кв доп}}/3} + 1 = \sqrt{7{,}94 \cdot 63096/3} + 1 = 410.$$

Вибирається для реалізації АЦП число рівнів квантування як найближче більше значення з ряду степенів числа 2 (2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512 і т.д.), у нашому прикладі L = 512. Тоді за формулою (5.9) довжина (розрядність) коду АЦП $n = \log_2 512 = 9$.

3. Крок квантування за формулою (5.3)

$$\Delta b = 2 \cdot 1{,}5/511 = 5{,}87 \cdot 10^{-3} \text{ В}.$$

4. За розрахованими та вибраними значеннями $f_д$, L та n інші параметри АЦП будуть такими:

– відношенням сигнал/шум квантування за формулою (5.7)

$$\rho_{\text{кв}} = 3 \cdot 511^2/7{,}94 = 98660 \text{ або } 49{,}9 \text{ дБ};$$

– швидкість цифрового сигналу за формулою (5.11)

$$R = 9 \cdot 32 \cdot 10^3 = 288 \cdot 10^3 \text{ біт/с};$$

– потужність шуму квантування за формулою (5.6)

$$\overline{e_{\text{кв}}^2} = (5{,}87 \cdot 10^{-3})^2/12 = 2{,}87 \cdot 10^{-6} \text{ В}^2.$$

Приклад 5.4. Розрахувати параметри ЦАП за такими вихідними даними (деякі з них отримані під час розрахунків АЦП у прикладі 5.3) та вимогами до цифрового каналу зв'язку:

– максимальна частота спектра аналогового сигналу $F_{\max}$ = 14 кГц;

– частота дискретизації $f_д$ = 32 кГц;

– крок квантування $\Delta b = 5{,}87 \cdot 10^{-3}$ В;

– відношення сигнал/шум квантування $\rho_{\text{кв}}$ = 49,9 дБ або $\rho_{\text{кв}} = 10^{4,99} = 98156$;

– потужність шуму квантування $\overline{e_{\text{кв}}^2} = 2{,}87 \cdot 10^{-6}$ В^2;

– допустиме відношення сигнал/завада на виході ЦАП $\rho_{\text{вих доп}}$ = 45 дБ або 31623.

Розв'язання.

1. За формулою, отриманою у вправі 5.4,

$$\overline{e_{\text{цк}}^2} = \overline{e_{\text{кв}}^2}\left(c_{\text{кв}}/c_{\text{вих}} - 1\right) = 2{,}87 \cdot 10^{-6} \cdot (98156/31623 - 1) = 6{,}04 \cdot 10^{-6} \text{ В}^2.$$

2. Потужність шуму на виході ЦАП, викликаного помилками в цифровому каналі зв'язку, залежить від імовірності помилки p на вході ЦАП і визначається формулою (5.13) $\overline{e_{\text{цк}}^2} = p(\Delta b)^2(4^n - 1)/3)$. Звідси

$$p_{\text{доп}} = 3\,\overline{e_{\text{цк}}^2}/(\Delta b)^2(4^n - 1) = 3 \cdot 6{,}04 \cdot 10^{-6}/[(5{,}87 \cdot 10^{-3})^2 \cdot (4^9 - 1)] = 2 \cdot 10^{-6}.$$

3. Вимоги до інтерполюючого ФНЧ в ЦАП згідно з рекомендаціями [1, 4] такі:

– гранична частота смуги пропускання $F_{с\,п} = F_{max} = 14$ кГц з ослабленням 3 дБ;

– гранична частота смуги затримки $F_{с\,з} = f_д - F_{max} = 32 - 14 = 18$ кГц з ослабленням, не меншим за 10…20 дБ.

Примітки. 1. Якщо задано, що помилки в каналі оцінюються клацаннями і задано середній інтервал між клацаннями, то аналогічно прикладу 5.1 можна обчислити ймовірність помилки символу на виході каналу зв’язку.

2. За отриманими даними можна розрахувати параметри реалізовуваного інтерполюючого ФНЧ – аналогового пасивного чи активного.

Приклад 5.5. Розрахувати параметри інтерполюючого фільтра ЦАП за такими вихідними даними:

– максимальна частота спектра аналогового сигналу $F_{max} = 3{,}4$ кГц;

– частота дискретизації $f_д = 8{,}0$ кГц;

– на граничній частоті смуги пропускання $F_{с.п}$ ослаблення $A(F_{с.п}) = 3{,}0$ дБ;

– на граничній частоті смуги затримки $F_{с.з}$ ослаблення не менше за $A(F_{с.з}) = 15$ дБ;

– у якості інтерполюючого фільтра використовується фільтр Баттерворта.

Необхідно визначити порядок фільтра.

Розв’язання.

1. Гранична частота смуги пропускання $F_{с.п} = F_{max} = 3{,}4$ кГц;

2. Гранична (мінімальна) частота смуги затримки $F_{с.з} = f_д - F_{max} = 8{,}0 - 3{,}4 = 4{,}6$ кГц;

3. Нормована АЧХ фільтра Баттерворта описується виразом

$$H(f) = \frac{1}{\sqrt{1 + (f\,/\,F_{с.п})^{2n}}}, \tag{5.17}$$

де n – порядок фільтра (ціле додатне число); $F_{с.п}$ – гранична частота смуги пропускання на рівні 3,0 дБ.

4. Ослаблення, забезпечуване фільтром Баттерворта на частоті $F_{сз}$,

$$A(F_{сз}) = 20\lg\frac{1}{H(F_{сз})} = 10\lg\left(1 + (F_{сз}/F_{сп})^{2n}\right). \tag{5.18}$$

5. Необхідний порядок фільтра визначається шляхом рішення рівності (5.18) відносно n

$$n \ge \frac{\lg(10^{0{,}1A(F_{сз})} - 1)}{2\lg(A_{сз}\,/\,F_{сп})}. \tag{5.19}$$

Знак нерівності з'являється, оскільки n – ціле число.

6. Якщо підставити в отриману формулу для n значення $F_{с.з} = 4{,}6$ кГц, $F_{с.п} = 3{,}4$ кГц, $A(F_{с.з}) = 15$ дБ, дістанемо

$$n \ge \frac{\lg(10^{1{,}5} - 1)}{2\lg(4{,}6/3{,}4)} = 5{,}66, \text{ тобто } n = 6.$$

При $n = 6$ фільтр Баттерворта достатньо складний, тому для зменшення порядку фільтра слід застосувати у якості інтерполюючого фільтр Чебишева, який буде мати менший порядок, чи підвищити частоту дискретизації.

Висновок. ІКМ не відноситься до методів низькошвидкісного кодування неперервних повідомлень і використовується в системах, де не ставиться задача економного використання частотних ресурсів каналів зв’язку (наприклад, у кабельних та волоконно-оптичних багатоканальних системах передавання мовних сигналів), а переважає простота реалізації АЦП та ЦАП. Нині ІКМ є також певним еталоном, за яким порівнюють якісні показники всіх інших методів передавання мовних повідомлень цифровими методами.

Контрольні питання

5.1. З якою метою застосовуються цифрові методи передавання аналогових сигналів?

5.2. Перелічити основні переваги цифрових систем передавання неперервних сигналів у порівнянні з аналоговими методами передавання.

5.3. Дати визначення: АЦП, ЦАП, шум квантування, шум, викликаний помилками у цифровому каналі зв'язку.

5.4. Дати визначення: дискретизація, квантування відліків, кодування квантуваних відліків.

5.5. Як визначаються інтервал дискретизації та частота дискретизації?

5.6. Що таке крок квантування та як він вибирається?

5.7. Яким чином можна збільшити відношення сигнал-шум квантування?

5.8. У чому полягають переваги кодування з компандуванням?

5.9. Як визначається швидкість цифрового сигналу при кодуванні за методом ІКМ?

ЗАДАЧІ для самостійної роботи студентів

5.1. Задано необхідне відношення сигнал/шум квантування $\rho_{кв}$ = 50 дБ для АЦП з рівномірним квантуванням, призначеного для перетворення мовного сигналу в цифровий. Визначити швидкість цифрового сигналу.

5.2. Розрядність коду АЦП з рівномірним квантуванням зменшили на два розряди. Визначити, як при цьому зміниться відношення сигнал/шум квантування на виході.

5.3. Задано, що під час перетворення мовного сигналу в цифровий за допомогою АЦП з рівномірним квантуванням використано 8 рівнів квантування. Визначити відношення сигнал/шум квантування $\rho_{кв}$.

5.4. У результаті дискретизації аналогового сигналу отримана така послідовність відліків: 0,28; 0,52; 1,23; 0,47; 0,02; –0,42; –0,96 В. Перетворити цю послідовність в ІКМ-сигнал у симетричному коді, якщо крок квантування Δb = 0,1 В.

5.5. Задано, що в АЦП застосовано 8-розрядний код і частота дискретизації $f_д$ = 16,0 кГц. Обчислити швидкість цифрового сигналу R на виході АЦП.

5.6. Використавши компандування, зменшили коефіцієнт амплітуди аналогового сигналу на 7 дБ. Як при цьому зміниться відношення сигнал/шум квантування на виході ЦАП?

5.7. Визначити ймовірність помилки на вході ЦАП, щоб забезпечити потужність шуму на виході ЦАП, викликаного помилками в цифровому каналі зв'язку, $\overline{e^2_{цк}}$ = 10^{-4} В^2 за таких параметрів АЦП: число рівнів квантування L = 256, крок квантування Δb = 0,015 В.

Словник основних термінів і понять

Аналогово–цифровий перетворювач (скорочено – *АЦП*, синонім – *кодер джерела неперервних сигналів*) – пристрій перетворення аналогового сигналу в цифровий.

Декодер ЦАП – пристрій перетворення цифрової послідовності кодових символів у квантовані відліки.

Декодер ІКМ – пристрій перетворення цифрового сигналу ІКМ з каналу зв'язку в типовий цифровий сигнал для ЦАП.

Дискретизатор – пристрій формування відліків аналогового сигналу з певним інтервалом *дискретизації*.

Експандер сигналу – пристрій розширення динамічного діапазону сигналу під час цифроаналогового перетворення.

Імпульсно-кодова модуляція – один із методів перетворення аналогового сигналу в цифровий, який характеризується тим, що кожний відлік представляється цифровим сигналом незалежно від інших відліків.

Інтервал дискретизації – інтервал між відліками аналогового сигналу.

Інтерполюючий фільтр ЦАП – фільтр нижніх частот, який перетворює квантовані відліки в неперервний за часом сигнал.

Квантування – процес округлення відліків аналогового сигналу до заданих рівнів.

– *рівномірне* – відстань між рівнями квантування однакова, тобто Δb = const.

– *нерівномірне* – відстань між рівнями квантування змінюється за певним законом, тобто $\Delta b \neq$ const.

Квантувач – пристрій округлення відліків аналогового сигналу до заданих рівнів.

Код ІКМ – алгоритм кодування квантованих відліків аналогового сигналу двійковими символами.

– – *натуральний двійковий* – запис номера рівня квантування у двійковій системі числення, старший розряд відводиться для кодування знаку, при цьому додатні рівні кодуються одиницею (1), а від'ємні – нулем (0).

– – *симетричний двійковий* – відрізняється від натурального коду тим, що має *симетрію* верхньої та нижньої частин кодової таблиці в усіх розрядах, крім старшого, відносно осі $L/2$, де L – число рівнів квантування.

– – *рефлексний двійковий* (*Грея*) – кодування проводиться так, що при зміні будь-якого рівня на найближчий змінюється тільки один розряд кодової комбінації.

Кодер ІКМ – пристрій перетворення цифрового сигналу з АЦП відповідно до коду ІКМ.

Кодер АЦП – пристрій кодування квантованих відліків тим чи іншим кодом, на виході кодера АЦП маємо послідовність кодових символів.

Компандування – операція стиснення динамічного діапазону аналогового сигналу на передавальному кінці системи зв'язку та розширення динамічного діапазону на приймальному кінці системи зв'язку.

Компресор сигналу – пристрій стиснення динамічного діапазону аналогового сигналу під час аналого-цифрового перетворення.

Шум квантування – похибка округлення миттєвих значень аналогового сигналу до заданих рівнів під час квантування.

Шум на виході ЦАП, викликаний помилками в цифровому каналі зв'язку – похибка відновлення миттєвих значень аналогового сигналу в ЦАП, що виникає через помилки в цифровому сигналі, які набуті в каналі.

Цифроаналоговий перетворювач (скорочено – *ЦАП,* синонім – *декодер джерела неперервного сигналу*) – пристрій перетворення цифрового сигналу в аналоговий.

Лекція 6. Кодування неперервних повідомлень із передбаченням

Тематика лекції

1 Кодування аналогових сигналів із лінійним передбаченням.

2 Принцип кодування аналогових сигналів за методом диференціальної імпульсно-кодової модуляції (ДІКМ). Поняття про методи адаптивної ДІКМ.

3 Принцип кодування аналогових сигналів за методом дельта-модуляції (ДМ). Поняття про методи адаптивної ДМ.

4 Кодування джерел мовних повідомлень.

5 Оцінка якості передавання мовних сигналів.

Кодування аналогових сигналів із лінійним передбаченням

При цифрових методах передавання частота дискретизації вибирається за умови відсутності накладення складових спектра дискретного сигналу (див. доказ теореми Котельникова). За такої умови відліки реальних аналогових сигналів є корельованими. Так, стандартизоване значення інтервалу дискретизації для мовного сигналу $T_д$ = 125 мкс. Для такого інтервалу дискретизації значення нормованої кореляційної функції сусідніх відліків мовного сигналу [2] $R_b(T_д) = 0{,}85$, тобто відліки суттєво корельовані. Це дозволяє з тією чи іншою точністю передбачати значення чергового відліку сигналу за значеннями попередніх відліків. У кодері системи передавання з передбаченням обчислюється похибка передбачення (рис. Л6.1)

$$d(kT_д) = b(kT_д) - \widetilde{b}\left(kT_д\right), \tag{6.1}$$

де $b(kT_д)$ – відлік аналогового сигналу, що надходить від дискретизатора;

$\widetilde{b}\left(kT_д\right)$ – передбачений відлік, сформований передбачником на основі N попередніх відліків $b\left((k-1)T_д\right),\ b\left((k-2)T_д\right), \cdots b\left((k-N)T_д\right)$.

Похибка передбачення передається каналом зв’язку цифровим сигналом, тому в схемі кодера системи (рис. Л6.1) є квантувач і кодер відліків похибки передбачення. У схемі декодера системи декодер відліків відновлює відліки похибки передбачення; у декодері системи є точно такий же передбачник, як і в схемі кодера системи; передбачений відлік складається з переданим відліком похибки передбачення й, тим самим, відновлюються відліки переданого аналогового сигналу.

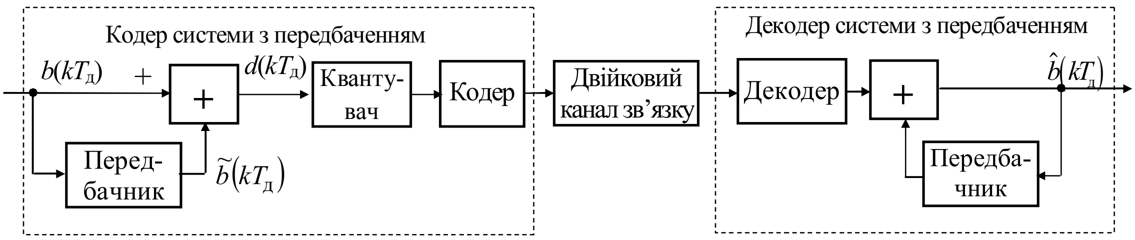


Рисунок Л6.1 – Кодер і декодер системи з передбаченням

Розмах дискретного сигналу $d(kT_д)$ менший, ніж розмах сигналу $b(kT_д)$, тому число рівнів квантування L при незмінному кроці квантування Δd буде меншим, ніж при передаванні відліків $b(kT_д)$ методом ІКМ. Зменшення числа рівнів квантування зменшує довжину коду n і швидкість цифрового сигналу $R = n f_д$. Або, при незмінному числі рівнів квантування L зменшується крок квантування $\Delta d = (d_{max} - d_{min})/L$, зменшується потужність шуму квантування $P_{ш.кв} = \Delta d^2/12$, зростає відношення сигнал/шум квантування $\rho_{кв.}$

Принцип кодування аналогових сигналів за методом ДІКМ. Найпоширеніша система з передбаченням – система з диференціальною ІКМ (ДІКМ). У різних варіантах використання методу ДІКМ число відліків N, на основі яких визначаються передбачені відліки, перебуває в межах від 1 до 6.

У випадку $N = 1$ передбаченим є попередній відлік:

$$\tilde{b}(kT_д) = b((k-1)T_д). \tag{6.2}$$

Середня потужність похибки передбачення

$$P_d = \overline{d^2(kT_д)} = \overline{[b(kT_д) - b((k-1)T_д)]^2} = \overline{b^2(kT_д)} - 2\overline{b(kT_д)b((k-1)T_д)} + \overline{b^2((k-1)T_д)} =$$

$$= P_b - 2P_b R_b(T_д) + P_b = 2P_b(1 - R_b(T_д)), \tag{6.3}$$

де P_b – середня потужність сигналу $b(t)$;

$R_b(T_д)$ – значення нормованої кореляційної функції мовного сигналу.

Оцінимо, у скільки разів середня потужність похибки передбачення менша за середню потужність мовного сигналу, якщо $T_д$ = 125 мкс та $R_b(T_д)$ = 0,85. Тоді $P_b/P_d = 2(1 - R_b(T_д))$ = 3,3. У першому наближенні можна вважати, що розмах дискретного сигналу $d(kT_д)$ менший за розмах сигналу $b(kT_д)$ у $\sqrt{3{,}3} = 1{,}8$ раз, тобто приблизно удвічі.

Передбачник при $N \geq 2$ виконується за схемою нерекурсивного фільтра, і передбачені відліки визначаються

$$\tilde{b}(kT_д) = \sum_{i=1}^{N} a_i b((k-i)T_д). \tag{6.4}$$

Схеми кодера й декодера ДІКМ, використовувані в реальній апаратурі, наведені на рис. Л6.2. У кодері похибка передбачення надходить на квантувач, аналогічний квантувачу системи з ІКМ, потім похибка квантування $d_{кв}(kT_д)$ передається цифровим сигналом каналом зв'язку (на рис. Л6.2 не показані кодер для подання $d_{кв}(kT_д)$ двійковим кодом і декодер для відновлення $d_{кв}(kT_д)$ – вони включені до складу каналу зв'язку). Передбачники в кодері й декодері повністю ідентичні.

На відміну від схеми, наведеної на рис. Л6.1, передбачник у кодері увімкнений у колі зворотного зв'язку. Завдяки цьому передбачені відліки $\tilde{b}(kT_д)$

як у схемі кодера, так і в схемі декодера виробляються з тих самих відліків $\hat{b}(kT_д)$ (якщо в каналі зв'язку не було помилок під час передавання).

Крім того, слід звернути увагу на те, що в декодері передбачник увімкнений у колі зворотного зв'язку і тому під час декодування можуть накопичуватись шуми квантування. Похибка квантування при ДІКМ за схемою рис. Л6.2

$$\varepsilon_{кв}(kT_д) = \hat{b}(kT_д) - b(kT_д) = \left[\tilde{b}(kT_д) + d_{кв}(kT_д)\right] - \left[\tilde{b}(kT_д) + d(kT_д)\right] = d_{кв}(kT_д) - d(kT_д). \quad (6.5)$$

З останнього співвідношення видно, що, завдяки увімкненню передбачника в кодері в коло зворотного зв'язку, похибка квантування визначається лише параметрами квантувача, і немає ефекту накопичення шумів квантування в декодері.

Широко застосовуються методи адаптивної ДІКМ (АДІКМ). У процесі роботи кодера АДІКМ адаптивними є:

– передбачник з $N = 4…6$ – його коефіцієнти (а це нерекурсивний фільтр) автоматично налаштовуються так, щоб дисперсія сигналу $d(kT_Д)$ мінімізувалася, коефіцієнти передбачника передаються каналом зв'язку, щоб у передбачнику декодера встановлювалися такі ж коефіцієнти, як і в передбачнику кодера;

– квантувач – розмах його характеристики (d_{max}, d_{min}) і відповідно крок квантування змінюються відповідно до розмаху поточної реалізації сигналу $d(kT_Д)$, відомості про крок квантування передаються каналом зв'язку, щоб у декодері встановлювався крок квантування такий же, як і в квантувачі.

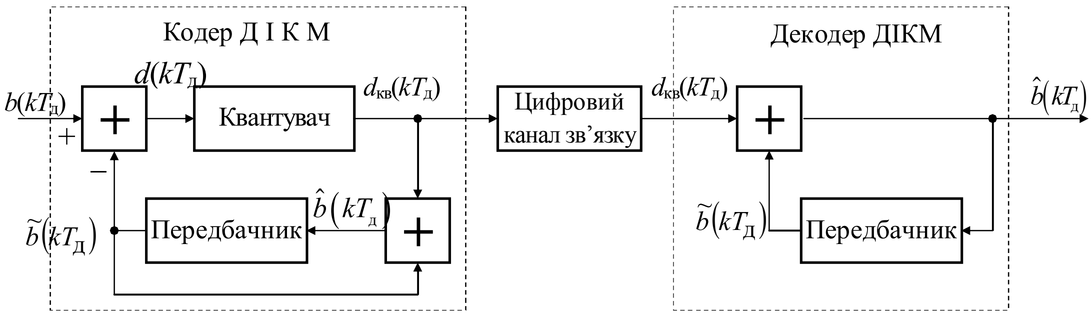


Рисунок Л6.2 – Кодер і декодер системи передавання з ДІКМ

Принцип кодування аналогових сигналів за методом ДМ. Методи ДМ також відносяться до методів передавання з передбаченням. Методи ДМ відрізняються від ІКМ і ДІКМ тим, що використовуються дворівневі квантувачі ($L = 2$). Це стає можливим, якщо частота дискретизації вибирається в кілька разів більшою, ніж $2F_{max}$, і сусідні відліки з дискретизатора мало відрізняються. На рис. Л6.3 наведені схеми кодера й декодера, що пояснюють один із методів ДМ.

Похибка передбачення обчислюється так само, як і при ДІКМ – формула (6.1), а передбачений відлік є результатом роботи накопичувача

$$\tilde{b}(kT_{\text{д}}) = \sum_{i=0}^{k-1} d_{\text{кв}}(iT_{\text{д}})\Delta b, \tag{6.6}$$

де Δb – коефіцієнт пропорційності;

$$d_{\text{кв}}(kT_{\text{д}}) = \begin{cases} +1, & \text{якщо } d(kT_{\text{д}}) \geq 0, \\ -1, & \text{якщо } d(kT_{\text{д}}) < 0 \end{cases} - \tag{6.7}$$

похибка передбачення квантується на два рівні, які передаються двійковим каналом зв'язку.

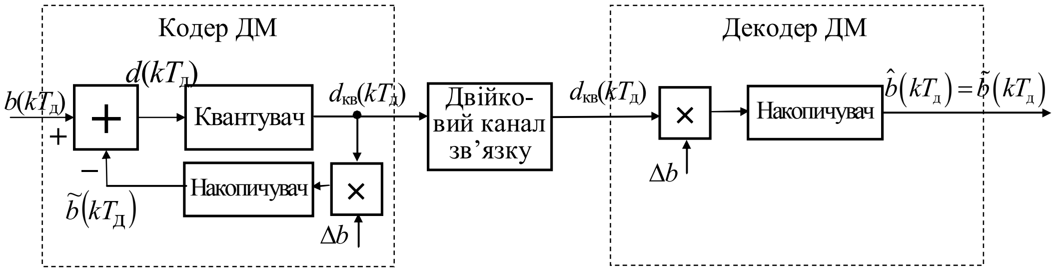


Рисунок Л6.3 – Кодер і декодер системи передавання з ДМ

Описаний метод кодування ілюструється часовими діаграмами на рис. Л6.4. Тут передбачений сигнал і сигнал квантованої похибки передбачення представлені сигналами неперервного часу. Видно, що передбачений сигнал $\tilde{b}(t)$ "відслідковує" зміни вхідного сигналу. Із рисунка випливає суть коефіцієнта Δb – це крок квантування, тому що з цим кроком квантується сигнал $\tilde{b}(t)$. На рисунку видно дві області:

1) область, де спостерігаються спотворення перевантаження за нахилом – передбачений сигнал $\tilde{b}(t)$ не встигає відслідковувати зміни вхідного сигналу;

2) область, де спостерігається шум дроблення – при незмінному вхідному сигналі передбачений сигнал змінюється з розмахом Δb.

Зрозуміло, що для зменшення першого ефекту необхідно збільшувати крок квантування, а для зменшення другого ефекту – зменшувати крок квантування. Очевидно, що існує оптимальний крок квантування, за якого мінімізується сумарний ефект прояву перевантаження за нахилом і шуму дроблення на реалізаціях сигналу $b(t)$ великої тривалості.

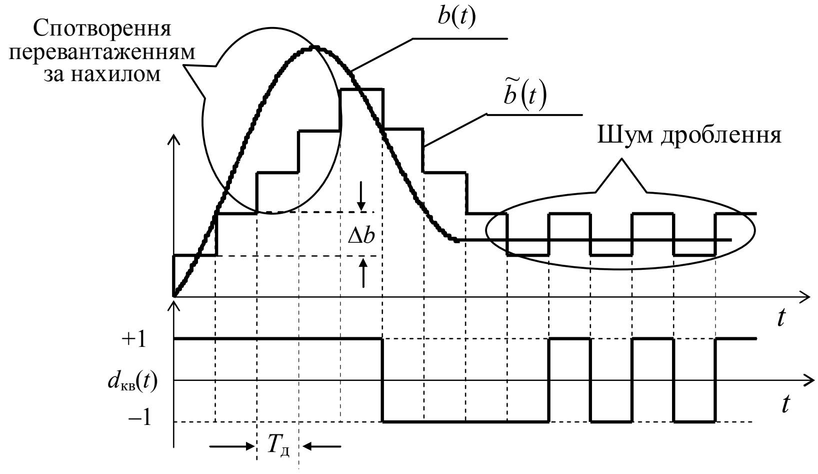


Рисунок Л6.4 – Ілюстрація роботи кодера ДМ

Робота декодера ДМ (рис. Л6.4) зводиться до обчислення відліків передбачуваного сигналу за формулою (6.6).

На основі опису роботи кодера і декодера ДМ можна сформулювати особливості методів передачі з ДМ:

– частота дискретизації $f_д$ (рис. Л6.4) у кілька разів більша за $2F_{max}$;

– оскільки квантувач дворівневий, то код має довжину n = 1, і швидкість цифрового сигналу $R = f_д$;

– оскільки n = 1, то відпадає необхідність синхронізації декодера.

При адаптивній дельта-модуляції (АДМ) може змінюватися крок квантування. Виконується це в такий спосіб. На виході кодера вмикається аналізатор послідовності двійкових символів. Якщо зустрілася послідовність 111 або 000, то крок квантування збільшується, щоб зменшити спотворення від перевантаження за нахилом. Якщо зустрілася послідовність 101 або 010, то крок квантування зменшується, щоб зменшити спотворення від шумів дроблення.

Аналогічний аналізатор вмикається на вході декодера й у такий же спосіб змінюється крок квантування в декодері.

Кодування джерел мовних повідомлень. Розглянутий у лекції 5 процес перетворення аналогового сигналу в цифровий є кодуванням “форми” сигналу. Але для кодування мови можливі (і нині застосовуються) й інші способи. Кодер виконує аналіз параметрів механізму мовоутворення і подає їх цифровим сигналом. Декодер виконує синтез мовного сигналу за отриманими параметрами механізму мовоутворення. Такі методи кодування мовних повідомлень отримали назву вокодерів або передавання на основі аналізу і синтезу.

Вокодер на основі лінійного передбачування. Механізм мовоутворення моделюється породжувальним фільтром, який збуджується відповідним вхідним сигналом. Кодер аналізує відрізок мовного сигналу $b(kT_д)$, який повинен передаватись, тривалістю 20...30 мс ($N_{відр}$ = 160...240 відліків). У вокодерах, які запропоновані десятки років тому, кодер визначає тип відрізку – тон (у разі голосних та дзвінких приголосних) чи шум (у разі глухих та шиплячих приголосних); якщо тон, то оцінюється період проходження й амплітуда основного тону; якщо шум, то оцінюється його дисперсія. Якщо тип відрізку тон, то на вхід породжувального фільтра від генератора подаються відліки послідовності імпульсів з оціненими частотою і амплітудою. Якщо ж тип відрізку шум, то на вхід породжувального фільтра подаються відліки шуму від генератора шуму з оціненою дисперсією.

Породжувальний фільтр виконується за схемою нерекурсивного фільтра, і вихідні відліки визначаються

$$\hat{b}\left(kT_{\text{д}}\right)=\sum_{i=1}^{N}a_i g\left(\left(k-i\right)T_{\text{д}}\right),\ k=1,2,\ldots,N_{\text{відр}}, \tag{6.8}$$

де N – порядок фільтра (звичайно $N = 10...20$);

$g(kT_{\text{Д}})$ – відліки від генератора імпульсів чи шуму на вході фільтра;

a_i – коефіцієнти фільтра.

Породжувальний фільтр є адаптивним, тобто його коефіцієнти a_i налаштовуються так, щоб мінімізувати середній квадрат різниці

$$\varepsilon\left(kT_{\text{д}}\right)=\hat{b}\left(kT_{\text{д}}\right)-b\left(kT_{\text{д}}\right). \tag{6.9}$$

На виході кодера для передавання цифровим каналом зв’язку формуються дані, які є параметрами механізму мовоутворення:

1) характер збудження породжувального фільтра (імпульси або шум);
2) період і амплітуда основного тону (у разі збудження імпульсами);
3) дисперсія шуму (у разі збудження шумом);
4) коефіцієнти породжувального фільтра.

У декодері використовуються генератори імпульсів і шуму. Період і амплітуда імпульсів та дисперсія шуму задаються даними від кодера. Декодер містить також породжувальний фільтр, ідентичний фільтру кодера, його коефіцієнти поступають від кодера. Вхідний сигнал фільтра (імпульси чи шум) задається даними від кодера.

Описаний алгоритм кодування джерела дозволяє одержати досить низьку швидкість цифрового сигналу (порядку 2400 біт/с), але з низькою якістю відтворення. Відтворена мова має синтетичне звучання, для неї характерна низька пізнаваність мовця.

При подальшому розвитку методів кодування якість відтворення була підвищена у змішаних алгоритмах кодування, коли крім перелічених вище даних (1...4) каналом зв’язку передається різниця (6.9), закодована одним із методів кодування аналогових сигналів (наприклад, методом АДІКМ).

Алгоритм CELP. Це змішаний алгоритм кодування, який полягає в тому, що в кодері замість двох типів збуджень використовується 512 або 1024 збуджуючих послідовностей, які записані в пам'яті кодера і декодера. Отримавши фрагмент мовного сигналу, кодер шукає послідовність, що мінімально відрізняється від фрагменту сигналу. Каналом зв'язку передається номер послідовності і різниця (6.9), вважаючи, що $\hat{b}\left(kT_{\text{д}}\right)$ – послідовність, що мінімально відрізняється від фрагменту сигналу $b(kT_{\text{Д}})$.

Оцінка якості передавання мовних сигналів. Оскільки людина, як одержувач інформації, є ключовим елементом будь-якої системи передавання мови, то якість передавання часто оцінюється за суб'єктивним сприйняттям мови. Критерій середньої експертної оцінки (СЕО) (MOS – mean opinion score) використовується як альтернатива об'єктивному середньоквадратичному критерію, який не повною мірою відображає дійсну якість відновленої мови. Випробування для одержання СЕО групою експертів проводяться на репрезентативному мовному матеріалі, який вимовляється дикторами з різними голосами. У тестах повинна брати участь достатня кількість непідготовлених слухачів (мінімум 40), щоб отримані ними висновки були представницькими.

Методика обчислення СЕО регламентована рекомендаціями Європейського інституту стандартів у галузі телекомунікацій для оцінки якості передавання мовних сигналів у телефонних мережах. У відповідності до цих рекомендацій виділено 5 рівнів, які пов'язані зі стандартизованим описом "відмінний", "хороший", "допустимий", "слабий", "поганий" (табл. Л6.1).

Таблиця Л6.1 – Опис рівнів якості

Опис рівня	Оцінка	Ступінь зусиль при сприйнятті
Відмінний	5	Без зусиль
Хороший	4	Немає відчутних зусиль
Допустимий	3	Помірні зусилля
Слабий	2	Значні зусилля
Поганий	1	Губиться сприйняття при фізично можливих зусиллях

Оцінки якості від 5 до 4 рекомендовані для телефонних мереж, значення від 4 до 3,5 вважаються допустимими в таких додатках як голосова пошта і рухомий зв'язок, значення від 3,5 до 2,5 допустимі для синтезованої мови.

У загальному випадку значення СЕО якості мовного сигналу спадає при зниженні швидкості цифрового сигналу. У табл. Л6.2 наведені значення СЕО для деяких типів кодеків, що використовуються в сучасних цифрових системах передавання мовних сигналів.

Таблиця Л6.2 – Значення СЕО розповсюджених типів кодерів мови

Тип кодера	Значення СЕО	Скорочення у таблиці
64 кбіт/с; ІКМ	4,3	**QCELP** – Qualcom Code Excited Linear Predictor (кодер на основі лінійного передбачення з кодовим збудженням фірми Qualcom) **ITU-CELP** – International Telecommunication Union – Code Excited Linear Predictor (Міжнародний союз електрозв'язку – кодер на основі лінійного передбачення з кодовим збудженням) **GSM** – Global System Mobile (глобальна система рухомого зв'язку) **LPC** – Linear Predictive Coder (кодер на основі лінійного передбачення)
14,4 кбіт/с; QCELP13	4,2	
32 кбіт/с; АДІКМ	4,1	
8 кбіт/с; ITU-CELP	3,9	
8 кбіт/с; CELP	3,7	
13 кбіт/с; GSM	3,54	
9,6 кбіт/с; QCELP	3,45	
4,8 кбіт/с; CELP	3,0	
2,4 кбіт/с; LPC	2,5	

Контрольні питання

6.1. Пояснити принцип дії цифрових систем із передбаченням.
6.2. Пояснити принцип кодування за методом ДІКМ.
6.3. Як визначається інтервал дискретизації або частота дискретизації при кодуванні аналогових сигналів методом ДІКМ?
6.4. Від чого залежить довжина коду при ДІКМ?
6.5. Як визначається швидкість цифрового сигналу під час кодування за методом ДІКМ?
6.6. У чому відмінність кодування за методами ДІКМ і ІКМ?
6.7. Що таке АДІКМ?
6.8. Пояснити кодування за методом ДМ.
6.9. Як визначається інтервал дискретизації та частота дискретизації при ДМ?
6.10. Пояснити принцип дії, переваги та недоліки передачі з дельта-модуляцією.
6.11. Пояснити принцип дії та переваги передачі з адаптивною дельта-модуляцією.
6.12. У чому відмінність систем передачі методами ДІКМ і ДМ?
6.13. Що таке спотворення перевантаження за нахилом? Як їх зменшити?
6.14. Що таке шум дроблення? Як його зменшити?
6.15. Як визначається інтервал дискретизації та частота дискретизації при ДМ?
6.16. Пояснити принцип дії, переваги та недоліки передачі з дельта-модуляцією.
6.17. Пояснити принцип дії та переваги передачі з адаптивною дельта-модуляцією.
6.18. У чому відмінність систем передачі методами ДІКМ і ДМ?
6.19. Що таке спотворення перевантаження за нахилом? Як їх зменшити?
6.20. Що таке шум дроблення та як його зменшити?

Словник основних термінів і понять

Дельта-модуляція (скорочено – *ДМ*) – окремий випадок ДІКМ, коли різницевий відлік кодується одним розрядом.

– – *адаптивна* (скорочено – *АДМ*) – різновид ДМ, коли залежно від крутості аналогового сигналу змінюється крок квантування.

Диференціальна імпульсно-кодова модуляція (скорочено – *ДІКМ*) – окремий випадок ІКМ, коли методом ІКМ кодується різницевий сигнал.

– – – *адаптивна* (скорочено – *АДІКМ*) – різновид ДІКМ, коли залежно від параметрів аналогового сигналу змінюються коефіцієнти передбачника та крок квантування.

Передбачення в цифрових методах передачі (синонім – *завбачення*) – на основі аналізу кількох попередніх відліків аналогового сигналу формується наступний (передбачений) відлік.

Передбачник в цифрових методах передачі (синонім – *завбачник*) – пристрій формування передбаченого відліку.

Перевантаження за нахилом (синонім – *за крутістю*) – похибка, яка виникає в кодері ДМ, через те, що передбачений сигнал $\tilde{b}(t)$ не встигає відслідковувати зміни вхідного сигналу.

Похибка передбачення (синонім – *різницевий сигнал*) – різниця між передбаченим відліком і поточним (оброблюваним) відліком, що надходить від дискретизатора.

Шум дроблення – похибка, яка виникає в кодері ДМ через те, що при незмінних значеннях відліків вхідного аналогового сигналу відліки передбаченого сигналу (і, відповідно, різницевого сигналу) змінюються з розмахом Δb.

Лекція 7. Інформаційні характеристики каналів електрозв’язку

Тематика лекції

1 Математичні моделі каналів електрозв’язку. Приклади моделей: двійковий симетричний канал (ДСК), канал з адитивним білим гауссовим шумом (АБГШ) тощо.

2 Інформаційні характеристики цифрових каналів зв’язку: кількість і швидкість передавання інформації, пропускна здатність каналу.

3 Інформаційні характеристики неперервних каналів зв’язку: кількість і швидкість передавання інформації, пропускна здатність каналу.

Таблиця Л7.1 – Розрахункові формули інформаційних характеристик каналів зв’язку

Найменування характеристики	**Розрахункова формула**	**Номер формули**
Цифрові канали зв’язку		
Математична модель каналу	$\hat{B} = B \oplus E$	(7.1)
Середня кількість інформації, що передана каналом, дв.од./симв. (біт/симв.)	$H_{\text{вз}}(B, \hat{B}) = H(B) - H(B/\hat{B}) = H(\hat{B}) - H(\hat{B}/B)$	(7.2)
Ненадійність каналу, дв.од./симв. (біт/симв.)	$H\left(B/\hat{B}\right) = \overline{-\log_2 P(b_k/\hat{b}_j)}$	(7.3)
Ентропія джерела помилок у каналі, дв.од./симв. (біт/симв.)	$H\left(\hat{B}/B\right) = \overline{-\log_2 P(\hat{b}_k/b_j)}$	(7.4)
Швидкість передавання інформації каналом, дв.од./с (біт/с)	$R_{\text{кан}} = H_{\text{вз}}(B, \hat{B})/\overline{T_{\text{c}}}$	(7.5)
Пропускна здатність каналу, дв.од./с (біт/с)	$C_{\text{кан}} = \max R_{\text{кан}}$	(7.6)
Пропускна здатність двійкового симетричного каналу, дв.од./с (біт/с)	$C_{\text{дск}} = B_{\text{мод}}[1 + p\log_2 p + (1-p)\log_2(1-p)]$	(7.7)
Пропускна здатність m-позиційного симетричного каналу, дв.од./с (біт/с)	$C_{\text{сим}} = B_{\text{мод}}[\log_2 m + p\log_2(p/(m-1)) + (1-p)\log_2(1-p)]$	(7.8)

Закінчення табл. Л7.1

Неперервні канали зв'язку		
Математична модель каналу з постійними параметрами	$z(t) = \mu s(t-\tau) + n(t)$ (у лекції 7 $\mu = 1$)	(7.9)
Середня кількість інформації, що передана каналом, дв.од./відлік (біт/відлік)	$h_{вз}(S, Z) = h(S) - h(S/Z) =$ $= h(Z) - h(Z/S)$	(7.10)
Ненадійність каналу, дв.од./відлік (біт/відлік)	$h(S/Z) = \overline{-\log_2 p(s/z)}$	(7.11)
Диференціальна ентропія шуму в каналі, дв.од./відлік (біт/відлік)	$h(N) = h(Z/S) = \overline{-\log_2 p(z/s)}$	(7.12)
Швидкість передавання інформації каналом при незалежних відліках, дв.од./с (біт/с)	$R_{кан} = f_д\, h_{вз}(S, Z)$	(7.13)
Пропускна здатність каналу з АБГШ, дв.од./с (біт/с)	$C_{АБГШ} = F_к \cdot \log_2(1 + P_s/P_n)$	(7.14)
Пропускна здатність гауссового каналу при необмеженій смузі пропускання, дв.од./с (біт/с)	$C_\infty = 1{,}443 \cdot P_s/N_0$	(7.15)
Пояснення: B – послідовність символів на вході каналу; E – послідовність помилок, що набуті в каналі; $\hat{B}$ – послідовність символів на виході каналу; $\oplus$ – сума за модулем m; $z(t)$ – сигнал плюс шум на виході каналу; $s(t)$ – сигнал на вході каналу; P_s/P_n – відношення середніх потужностей сигналу та шуму; N_0 – спектральна густина потужності білого шуму в каналі; $h(X)$ – диференціальна ентропія величини X; $\overline{X}$ – середнє значення величини X; $B_{мод}$ – швидкість модуляції в каналі; p – імовірність помилки символу; $H(X)$ – ентропія величини X; τ – затримка в каналі; $n(t)$ – завада (шум), що діє в каналі; $\overline{T}_с$ – середня тривалість символу; $F_к$ – смуга пропускання каналу; μ – ослаблення (підсилення) в каналі; $f_д$ – частота дискретизації		

Математичні моделі каналів зв'язку. У рекомендованій навчальній літературі канали зв'язку та їх математичні моделі описані досить детально в [1, розділ 5], [3, розділ 13].

За характером сигналів можна виділити два типи каналів зв'язку: цифрові та неперервні. Їхні математичні моделі досить складні, якщо враховувати багато характеристик та складових частин каналів. Але для розрахунків інформаційних характеристик можна користуватись простими математичними моделями.

Цифровий канал [1, с. 196–198] має різновиди – симетричний без пам'яті, несиметричний без пам'яті, марківський тощо.

Основними характеристиками цифрового каналу є:

– кількість можливих символів на вході та виході каналу (не обов'язково однакова);

– умовні ймовірності переходів вхідних символів у вихідні (визначають імовірності помилок та правильного відтворення);

– швидкість модуляції, симв./с).

Математична модель цифрового каналу надана формулою (7.1).

! Найбільш простою і поширеною моделлю цифрового каналу є ***двійковий симетричний канал без пам'яті*** (скорочено – ДСК), коли ймовірності помилок символів 0 та 1 однакові

Неперервний канал [1, с. 193–196] має різновиди – ідеальний без завад, із постійними параметрами, з адитивним гауссовим шумом, із загальними завмираннями тощо.

Основними характеристиками неперервного каналу є:

– ослаблення (підсилення) μ та затримка сигналу τ;

– смуга пропускання каналу;

– статистичні характеристики завад в каналі – густина ймовірності, спектральна густина потужності тощо.

Математична модель неперервного каналу з постійними параметрами надана формулою (7.9).

! Найбільш простою і поширеною моделлю неперервного каналу є канал з ***адитивним білим гауссовим шумом*** (скорочено – АБГШ).

Інформаційні характеристики цифрових каналів зв'язку. Інформаційні характеристики цифрових каналів зв'язку подані в [1, с. 306, 310…313]. Розрахункові формули (7.2)…(7.8). Під час обчислення ***інформаційних характеристик*** цифрового каналу необхідно враховувати, що каналом передаються послідовності кодових символів з виходу кодера джерела.

! Інформаційні характеристики цифрового каналу обчислюються ***за взаємною інформацією*** між кодовими символами на вході і виході каналу

Вправа 7.1. Показати, що у ДСК без пам'яті ентропія джерела помилок визначається виразом

$$H(\widehat{B}/B) = -p\log_2 p - (1-p)\log_2(1-p).$$

Розв'язання. У ДСК джерело помилок видає два символи: "1" – помилка є з імовірністю $P(1) = p$; "0" – помилки немає з імовірністю $P(0) = 1 - p$. За таких умов ентропія джерела помилок за формулою (1.4) буде

$$H(\widehat{B}/B) = -p\log_2 p - (1-p)\log_2(1-p).$$

Приклад 7.1. Для передавання інформації використовується ДСК. Символи на вході каналу мають імовірності 0,5. Імовірність помилки символу в ДСК $p = 0{,}01$. Визначити середню кількість інформації на один символ $H_{вз}(B, \hat{B})$, що передається каналом.

Розв'язання. За формулою (7.2) середня кількість інформації, що передається цифровим каналом $H_{вз}(B, \hat{B}) = H(B) - H(B/\hat{B}) = H(\hat{B}) - H(\hat{B}/B)$ дв.од./симв. Оскільки ймовірності символів на вході та виході каналу дорівнюють 0,5, то $H(B) = H(\hat{B}) = 1{,}0$ дв.од./симв. Із вправи (7.1) ентропія помилок

$$H(\hat{B}/B) = -p\log_2 p - (1-p)\log_2(1-p) = 0{,}01\log_2 0{,}01 - (1-0{,}01)\log_2(1-0{,}01) = 0{,}081.$$

Тоді $H_{вз}(B, \hat{B}) = 1{,}0 - 0{,}081 = 0{,}919$ дв.од./симв.

Основними інформаційними характеристиками як цифрового, так і неперервного каналів є швидкість передавання інформації каналом та його пропускна здатність.

! ***Швидкість передавання інформації*** каналом зв'язку визначається за взаємною ентропією між входом і виходом каналу

! ***Пропускна здатність каналу***, це – максимальна швидкість передавання інформації каналом зв'язку при заданих обмеженнях. Під обмеженнями розуміють характеристики каналу, що впливають на швидкість передавання інформації цимканалом

Вправа 7.2. Вивести формулу для обчислення пропускної здатності ДСК при заданих швидкості модуляції в ньому $B_{мод}$ і ймовірності помилки p.

Розв'язання. Якщо підставити у формулу (7.6) вирази (7.5) та (7.2) отримаємо, що

$$C_{ДСК} = B_{мод}\max[H(B) - H(B/\overline{B})] = B_{мод}[\max H(B) - \min H(B/\hat{B})].$$

Значення $\max H(B) = 1$ дв.од./симв. досягається, коли символи на вході каналу зв'язку рівноймовірні і незалежні. Умовну ентропію $H(B/\hat{B})$ легко визначити з таких міркувань: на виході каналу зв'язку з'явився символ $\hat{b}_j$; тоді канал можна розглядати як джерело двійкових символів з імовірностями p і $1 - p$, а ентропія такого джерела (формула (1.4))

$$H(B/\hat{B}) = -p\log_2 p - (1-p)\log_2(1-p).$$

Оскільки символи рівноймовірні, то це і є мінімум. Тоді остаточно

$$C_{ДСК} = B_{мод}[1 + p\log_2 p + (1-p)\log_2(1-p)].$$

Приклад 7.2. Обчислити пропускну здатність четвіркового симетричного каналу $C_{.кан}$ при ймовірності помилки символу $p = 0{,}01$ та швидкістю модуляції $B_{мод} = 1000$ Бод.

Розв'язання. За формулою (7.8) пропускну здатність четвіркового симетричного каналу $C_{.кан} = 1000\,[\log_2 4 + 0{,}01\cdot\log_2(0{,}01/(4-1)) + (1-0{,}01)\cdot\log_2(1-0{,}01)] = 1903$ дв.од./с.

Інформаційні характеристики неперервних каналів зв'язку. Інформаційні характеристики неперервних каналів зв'язку подані в [1, с. 316, 319, 320]. Розрахункові формули (7.10)…(7.16).

! Інформаційні характеристики неперервного каналу обчислюються за ***взаємною інформацією*** між відліками сигналу $s(t)$ на вході каналу та сигналу $z(t)$ на його виході

Приклад 7.3. Каналом зв'язку передається сигнал $s(t)$ з гауссовим розподілом імовірностей, рівномірною густиною потужності і середньою потужністю P_s = 0,001 В^2, смуга пропускання каналу $F_к$ = 8,0 кГц. Шум у каналі білий зі спектральною густиною потужності $N_0 = 10^{-9}$ В^2/Гц. Визначити середню на один відлік кількість інформації, що передається каналом.

Розв'язання. Якщо прийняти, що частота дискретизації задовольняє теоремі Котельникова, то відліки як на вході так і на виході каналу незалежні. Згідно з формулою (7.10) середня кількість переданої інформації $h_{вз}(S, Z) = h(S) - h(S/Z) = h(Z) - h(Z/S)$. Якщо врахувати, що $h(Z) - h(Z/S)$ – це епсилон-ентропія сигналу $z(t)$, а $h(Z/S)$ – диференціальна ентропія шуму (формули (3.4) та (3.6) для гауссового сигналу та шуму), дістанемо

$$h_{вз}(S, Z) = h(Z) - h(Z/S) = \log_2 \sqrt{2\pi e P_z} - \log_2 \sqrt{2\pi e P_n} = 0{,}5\cdot\log_2(P_z/P_n).$$

Оскільки $P_z = P_s + P_n$ і $P_n = N_0 F_к$, дістанемо

$h_{вз}(S, Z) = 0{,}5\log_2(1 + P_s/P_n) = 0{,}5 \log_2 (1 + 10^{-3}/(10^{-9}\cdot 8\cdot 10^3)) = 3{,}49$ дв.од./відлік.

Вправа 7.3. Вивести формулу для обчислення пропускної здатності каналу з АБГШ.

Розв'язання. Якщо підставити у формулу (7.13) значення середньої кількості переданої інформації в неперервному каналі (7.10) і максимізувати (7.13), то отримаємо, що пропускна здатність каналу з АБГШ $C_{АБГШ} = f_д \max\, [h(Z) - h(Z/S)]$, де $h(Z/S) = h(N) = \log_2 \sqrt{2\pi e P_n}$ із формули (4.4).

Оскільки в каналі з АБГШ сигнал і шум незалежні, потужність сигналу на виході каналу $P_z = P_s + P_n$. При фіксованій потужності P_z значення $\max h(Z)$ буде мати місце при гауссовому розподілі процесу $z(t)$, що досягається при гауссовому розподілі сигналу $s(t)$ на вході каналу. Тому

$$C_{АБГШ} = f_д\cdot(\log_2 \sqrt{2\pi e P_z} - \log_2 \sqrt{2\pi e P_n}\,) = f_д \log_2(\sqrt{P_z/P_n}\,.$$

Якщо спектри сигналу і завади рівномірні у смузі пропускання каналу $F_к$, то відліки некорельовані при $f_д = 2F_к$. Остаточний вираз для пропускної здатності каналу з АБГШ:

$$C_{АБГШ} = F_к\cdot\log_2\cdot(1 + P_s/P_n).$$

Вправа 7.4. Вивести формулу для обчислення пропускної здатності гауссового каналу з необмеженою смугою пропускання.

Розв'язання. Скористаємося формулою (7.14) для пропускної здатності гауссового каналу. Оскільки $P_n = N_0\cdot F$к, можна записати $C_\infty = \lim\limits_{F_к\to\infty} [F_к \log_2(1 + P_s/(N_0 F_к))]$. При $F_к \to \infty$ виникає невизначеність типу $\infty\cdot 0$. Для розкриття цієї невизначеності скористаємось співвідношенням $\ln(1 + e) \approx e$ при $e << 1$. Враховуючи, що $\log_2 x = 1{,}443 \ln x$,

$$C_\infty = 1{,}443 F_к P_s/(N_0 F_к) = 1{,}443\, P_s/N_0.$$

Приклад 7.4. Обчислити пропускну здатність гауссового каналу із заданими: смугою пропускання $F_к$ = 10,0 кГц і відношенням середніх потужностей сигналу і шуму P_s/P_n = 36 дБ.

Розв'язання. За формулою (7.14) пропускна здатність гауссового каналу з АБГШ $C_{\text{АБГШ}} = F_{\text{к}} \log_2 (1 + P_s/P_n) = 10^4 \log_2 (1 + 10^{3,6}) = 119\ 590$ дв.од./с (для обчислення децибели переведені в рази).

Контрольні питання

7.1. З якою метою реальний канал зв'язку замінюють його математичною моделлю?

7.2. Надати визначення понять – ненадійність каналу, пропускна здатність каналу

7.3. В яких випадках важливо знати пропускну здатність каналу?

7.4. Як змінюється пропускна здатність каналу з АБГШ при розширенні його смуги пропускання?

7.5. Що означають поняття – обрив каналу, ентропія шуму?

7.6. Чим пояснюється той факт, що пропускна здатність ДСК максимальна при ймовірності помилки $p = 1$ (всі символи помилкові)?

ЗАДАЧІ для самостійної роботи студентів

7.1. Канал зв'язку між пунктами А і Б складено з каскадного з'єднання трьох парціальних каналів із пропускними здатностями: першого каналу 1200 дв.од./с; другого каналу 1500 дв.од./с; третього каналу 2000 дв.од./с. Знайти пропускну здатність складеного каналу зв'язку.

7.2. Умови ті ж, що і в задачі 7.1, але з'єднання трьох парціальних каналів паралельне. Знайти пропускну здатність складеного каналу зв'язку.

7.3. Обчислити пропускну здатність двійкового симетричного каналу без пам'яті із заданою ймовірністю помилки $p = 0,001$ та швидкістю модуляції $B_{\text{мод}} = 600$ Бод.

7.4. Обчислити пропускну здатність четвіркового симетричного каналу без пам'яті із заданою ймовірністю помилки $p = 0,01$ та швидкістю модуляції $B_{\text{мод}} = 1200$ Бод.

7.5. Розглянемо канал (майже не реальний), в якому спектральна густина потужності шуму на певній ділянці частот від f_1 до f_2 дорівнює нулю ($f_1 \neq f_2$). Чому дорівнює його пропускна здатність?

7.6. Обчислити пропускну здатність гауссового каналу із заданими смугою пропускання $F_{\text{к}} = 4,0$ кГц і відношенням середніх потужностей сигналу і шуму $P_s/P_n = 33$ дБ.

7.7. Обчислити пропускну здатність гауссового каналу з необмеженою смугою пропускання і спектральною густиною потужності шуму в ньому $N_0 = 10^{-9}$ Вт/Гц, яким передається сигнал із потужністю $P_s = 0,015$ В^2.

Словник основних термінів і понять

Ентропія шуму в каналі (синонім – *хибна інформація*) – визначає ту сторонню інформацію, яка міститься в отриманому сигналі на виході каналу внаслідок дії завад.

Канал електрозв'язку – сукупність технічних засобів, що забезпечують передавання сигналів на відстань.

– *ДСК* – двійковий симетричний канал, в якому імовірності помилок символів 0 та 1 однакові.

– *з АБГШ* – канал з адитивним білим гауссовим шумом.

Математична модель каналу зв'язку – опис перетворень сигналу в каналі, що враховує найбільш істотні особливості каналу (відкинуто другорядні особливості, що не впливають на вирішення задачі, заради якої створюється модель).

Ненадійність каналу зв'язку – середня кількість інформації (дв.од./симв. для цифрового каналу чи дв.од./відлік для неперервного каналу), що втрачається в каналі через дію завад.

Обрив каналу зв'язку – такий стан каналу, за якого пропускна здатність каналу дорівнює нулю, зокрема, у разі ДСК це має місце при $p = 0,5$.

Пропускна здатність каналу (синонім – *пропускна спроможність каналу*) – максимально можлива швидкість передавання інформації каналом зв'язку при заданих обмеженнях.

Лекція 8. Потенційні можливості передавання інформації каналами зв'язку

Тематика лекції

1. Потенційні можливості передавання інформації за швидкістю каналами зв'язку.
2. Потенційні можливості передавання інформації за якістю цифровими каналами зв'язку.
3. Потенційні можливості передавання інформації за якістю неперервними каналами зв'язку із завадами.

Таблиця Л8.1 – Розрахункові формули для потенційних можливостей передавання інформації каналами зв'язку

Найменування характеристики	Розрахункова формула	Номер формули
Середня довжина кодової комбінації статистичного коду	$\overline{n} \geq H(A)$	(8.1)
Запас пропускної здатності каналу $\Delta C_{кан}$, дв.од./с (біт/с)	$\Delta C_{кан} = C_{кан} - R_{дж}$	(8.2)
Умова досягнення якісного передавання повідомлень каналом зв'язку згідно з основною теоремою кодування Шеннона	$R_{дж} \leq C_{кан} - \varepsilon$	(8.3)
Імовірність помилкового декодування $P_{п.д}$ оптимального за Шенноном коду	$P_{п.д} = 2^{-T_{к.к}(C_{кан} - R_{дж})}$	(8.4)
Межа Шеннона	$R_{дж} = C_{кан}$	(8.5)
Пояснення: $H(A)$ – ентропія джерела повідомлень A; $C_{кан}$ – пропускна здатність каналу; $R_{дж}$ – продуктивність джерела повідомлень; $P_{п.д}$ – імовірність помилкового декодування; $T_{к.к}$ – тривалість кодової комбінації; ε – як завгодно мала величина		

Потенційні можливості передавання інформації за швидкістю каналами зв'язку. Задача визначення максимальної швидкості передавання інформації каналами зв'язку вирішується досить просто: введене К. Шенноном поняття пропускної здатності каналу дає чітку відповідь.

! ***Швидкість передавання*** інформації каналом зв'язку не може перевищувати його пропускну здатність, оскільки за визначенням пропускна здатність – це максимально можлива швидкість передавання інформації каналом

Приклад 8.1. З якою максимальною швидкістю можна передавати інформацію четвірковим симетричним каналом зв'язку, параметри якого обчислені в прикладі 7.2.

Розв'язання. Оскільки пропускна здатність цього каналу $C_{кан}$ = 1903 дв.од./с, то це число і визначає максимальну швидкість передавання інформації каналом.

Потенційні можливості передачі інформації за якістю цифровими каналами зв'язку. Потенційні можливості передавання інформації за якістю цифровими каналам визначаються теоремами К. Шеннона, які розглянуті в [1, розд. 8.2, 8.6], [2, розд. 6.2.3] та ін. Оскільки в різних джерелах їхні формулювання дещо різні, приведемо нижче найбільш прості.

! ***Кількісною мірою якості передавання*** повідомлень цифровими каналами зв'язку є ймовірність помилки в послідовності символів, що поступають одержувачу

Теорема 1. Кодування джерела дискретних повідомлень

! Будь-яке джерело дискретних повідомлень без пам'яті можна закодувати двійковою послідовністю ***при середній кількості двійкових символів на знак джерела $\overline{n}$ як завгодно близькій до ентропії***, і неможливо домогтися середньої довжини коду, меншої, ніж ентропія джерела

Доказ цієї теореми наведено в [2, розд. 7], він досить складний. Прикладний сенс цієї теореми надає можливість більш швидкого передавання повідомлень за рахунок усунення надмірності джерела нерівномірним кодуванням. Таке кодування кодом Шеннона-Фано та Хаффмана розглянуто в лекції 3.

Теорема 2. Кодування цифрового каналу зв'язку із завадами

! Якщо продуктивність джерела повідомлень $R_{дж}$ менша за пропускну здатність каналу $C_{кан}$, тобто $R_{дж} \leq C_{кан} - \varepsilon$, де ε – як завгодно мала величина, то існує **спосіб кодування** (перетворення повідомлення в цифровий сигнал на вході каналу) і **декодування** (перетворення цифрового сигналу в повідомлення на виході каналу), за якого ймовірність помилкового декодування (ненадійність каналу) може бути як завгодно мала. Якщо ж $R_{дж} \geq C_{кан}$, то такого способу не існує

Цю теорему часто називають ***основною теоремою кодування Шеннона.*** Вона описана в будь-якій літературі з теорії інформації та підручниках, зокрема, [1, с. 319], [2, с. 252], [3, с. 283]. Строгий математичний доказ цієї теореми оснований на поняттях – типові і нетипові послідовності символів і випадкове кодування. У **типових** послідовностях частота появи символів чи груп символів як завгодно мало відрізняються від їхніх імовірностей. Під випадковим кодуванням розуміють, що вибір послідовностей символів довжини n, що використовуються для кодування, провадиться випадково. Один фрагмент доказу подає вправа 8.1.

> **!** Основна теорема кодування Шеннона доказує цікавий факт – завади в каналі та набуті через них помилки обмежують тільки швидкість передавання інформації, якість передавання може бути як завгодно високою, тобто більшість помилок можна знайти і виправити коректувальним кодом

При ґрунтовному доказі теореми [5]:

– по-перше, доведено, що оптимальний код має бути випадковим та кодові комбінації повинні мати велику довжину;

– по-друге, отримана формула для ймовірності помилкового декодування оптимальним випадковим кодом (формула (8.4)).

Приклад 8.1. Який запас пропускної здатності $C_{\text{кан}} - R_{\text{дж}}$ повинен мати канал, щоб при використанні оптимального коду з тривалістю кодової комбінації $T_{\text{к.к}}$ = 200 мс імовірність помилкового декодування $P_{\text{п.д}}$ не перевищила величину 10^{-6}?

Розв'язання. З формули (8.4) одержуємо запас пропускної здатності каналу

$$\Delta C_{\text{кан}} = C_{\text{кан}} - R_{\text{дж}} = \frac{\log_2 P_{\text{п.д}}}{-T_{\text{к.к}}} = \frac{\log_2 10^{-6}}{-200 \cdot 10^{-3}} = 90{,}96 \text{ дв.од./с.}$$

Підкреслимо, що чим більший запас пропускної здатності, тим легше реалізується система зв'язку, але водночас погіршується використання пропускної здатності каналу.

Приклад 8.2. У скільки разів зміниться тривалість кодової комбінації $T_{\text{кк}}$ оптимального коду, якщо при незмінній імовірності помилки $P_{\text{п.д}}$ = const запас пропускної здатності каналу $C_{\text{кан}} - R_{\text{дж}}$ зменшується у двічі?

Розв'язання. З формули (8.4) випливає, що при $P_{\text{п.д}}$ = const

$$T_{\text{к.к}} = -\frac{\log_2 P_{\text{п.д}}}{C_{\text{к}} - R_{\text{дж}}} .$$

Тому, при збереженні ймовірності помилкового декодування (якості передавання) зменшення запасу пропускної здатності удвічі призводить до збільшення тривалості кодової комбінації удвічі, що веде до збільшення затримки повідомлень під час передавання.

Висновок. Із формулювання теореми видно, що вона є ***теоремою існування*: не вказує конкретний метод кодування, тобто вибір послідовностей для кодування. Теорема тільки ***гарантує існування*** такого способу.

Відразу ж слідом за опублікуванням теореми Шеннона серед теоретиків розгорнулися дослідження з пошуку таких методів кодування. «Керівною» ідеєю була ідея «*випадкового кодування*», покладена за основу доказу теореми, але протягом кількох років ентузіазм теоретиків зменшився, оскільки практика вимагала не абстрактних розмов про деякі «*випадкові коди*», а конкретних методів кодування-декодування. Вимоги практики вивели теоретиків на пошук *конструктивних* методів кодування (що надають конкретні принципи побудови кодів для *коректування* помилок у реальних каналах). Виникла важлива теоретична наука ***"Теорія коректувальних кодів".*** Докладно основи цієї теорії викладені в модулі 4 дисципліни ТЕЗ.

Потенційні можливості передавання інформації за якістю неперервним каналом зв'язку із завадами

! ***Кількісною мірою якості передавання*** повідомлень неперервним каналом зв'язку є середньоквадратична похибка $\overline{\varepsilon_0^2}$ між аналоговими сигналами на виході та вході каналу

Теорема 3. Кодування неперервного каналу зв'язку із завадами

! Якщо при заданій середньоквадратичній похибці $\overline{\varepsilon_0^2}$ відновлення повідомлень джерела його продуктивність $R_{\text{дж}}$ менша за пропускну здатність каналу $C_{\text{кан}}$, тобто $R_{\text{дж}} \le C_{\text{кан}} - \varepsilon$, де ε – як завгодно мала величина, то існує **спосіб кодування** (перетворення повідомлення в сигнал на вході каналу) і **декодування** (перетворення сигналу в повідомлення на виході каналу), який дозволяє передавати всі неперервні повідомлення джерела з похибкою відтворення на виході каналу, що як завгодно мало відрізняється від $\overline{\varepsilon_0^2}$

Як випливає з формулювань теорем 2 та 3, їхня сутність майже однакова (за однієї і тієї ж умови можна досягти високої якості передавання повідомлень), різниця в тому:

– кількісна міра ***якості передавання*** повідомлень цифровим і неперервним каналами різна;

– під кодуванням неперервного джерела розуміють не тільки аналого-цифрове перетворення, а також методи модуляції;

– продуктивність неперервного джерела $R_{\text{дж}}$ обчислюється за епсилон-ентропією.

Контрольні питання

8.1. Якщо в m-ковій системі зв'язку з ортогональними сигналами середня потужність сигналу і спектральна густина потужності шуму постійні, то як забезпечити наближення до нуля імовірності помилки при збереженні швидкості передачі інформації?

8.2. Що таке кодування і декодування в цифровому і неперервному каналах зв'язку? Що в них спільного і чим вони відрізняються між собою?

8.3. Яке практичне значення має основна теорема кодування Шеннона в каналі із завадами? Чи можна, використовуючи доказ цієї теореми, будувати реальні схеми кодування і декодування?

8.4. Сформулювати теореми Шеннона для цифрових каналів без помилок та з помилками. Зіставити зміст і суть цих теорем та важливість їх результатів для практики.

ЗАДАЧІ для самостійної роботи студентів

8.1. Який запас пропускної здатності $\Delta C_{\text{кан}} = C_{\text{кан}} - R_{\text{дж}}$ повинен мати канал, щоб при використанні оптимального за Шенноном коректувального коду з тривалістю кодової комбінації $T_{\text{к.к}} = 100$ мс імовірність помилкового декодування $P_{\text{п.д}}$ не перевищувала 10^{-5}?

8.2. У скільки разів зміниться тривалість кодової комбінації оптимального за Шенноном коректувального коду, якщо при незмінній імовірності помилкового декодування $P_{\text{п.д}} = \text{const}$ запас пропускної здатності каналу $\Delta C_{\text{кан}}$ зменшився в 4 рази?

8.3. Визначити, чи можна повідомлення від джерела із продуктивністю 1200 біт/с передавати з високою якістю каналом із пропускною здатністю 1200 біт/с? Відповідь пояснити.

8.4. Визначити, чи можна повідомлення від джерела із продуктивністю 1200 біт/с передавати з високою якістю каналом із пропускною здатністю 1100 біт/с? Відповідь пояснити.

Словник основних термінів і понять

Випадкове кодування – вибір послідовностей символів довжини n, що використовуються для кодування, провадиться випадково.

Нетипова послідовність – така послідовність символів у кодовій комбінації, що частота появи окремих символів чи груп символів не збігається з їхньою ймовірністю.

Помилкове декодування – імовірність помилки в послідовності символів, які поступають одержувачу з декодера.

Основна теорема кодування Шеннона – встановлює співвідношення між продуктивністю джерела $R_{\text{дж}}$ та пропускною здатністю каналу із завадами $C_{\text{кан.}}$

Типова послідовність – така послідовність символів у кодовій комбінації, частота появи окремих символів чи груп символів як завгодно мало відрізняються від їхньої імовірності.

3 ТЕМИ ПРАКТИЧНИХ ЗАНЯТЬ ТА ЛАБОРАТОРНИХ РОБІТ

Згідно з програмою дисципліни ТЕЗ для закріплення змісту лекцій передбачено як вправи, так і лабораторні роботи. Але конкретний перелік вправ та лабораторних робіт визначається на кожний навчальний рік робочим навчальним графіком ОНАЗ і закріплюються робочою навчальною програмою-технологічною картою дисципліни ТЕЗ.

3.1 Перелік рекомендованих тем вправ

1. Інформаційні характеристики джерел повідомлень.
2. Вивчення кодування дискретних повідомлень ефективними кодами.
3. Вивчення кодування неперервних повідомлень із передбаченням.
4. Інформаційні характеристики каналів зв'язку.

3.2 Перелік рекомендованих тем лабораторних робіт

1. Дослідження кодування дискретних повідомлень ефективними кодами.
2. Дискретизація первинних сигналів електрозв'язку.
3. Дослідження кодування неперервних повідомлень методом ІКМ.
4. Дослідження кодування неперервних повідомлень методом ДІКМ та ДМ.

Методичні вказівки до виконання перелічених вище вправ та лабораторних робіт наведені у виданих кафедрою ТЕЗ ОНАЗ методвказівках до лабораторних робіт.

4 РЕКОМЕНДАЦІЇ ЩОДО САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

4.1 Загальні положення

Самостійна робота студентів над матеріалом модуля має такі складові:

– опрацювання додаткового матеріалу, що задається на лекціях, лабораторних та практичних заняттях;

– виконання індивідуальних завдань ІЗ №2.1 та №2.2;

– підготовка до іспиту.

4.2 Індивідуальне завдання ІЗ №2.1 – Кодування дискретного повідомлення

Вихідні дані:

– повідомлення – Прізвище та ім'я студента, що виконує завдання;

– таблиця імовірності літер у змістовних українських текстах.

Необхідно:

1. Скласти алфавіт з літер, що використовуються для побудови заданого повідомлення.

2. Для літер, що ввійшли до алфавіту, виписати їхні ймовірності з таблиці ймовірностей літер у змістовних українських текстах і виконати нормування цих імовірностей.

3. Обчислити ентропію заданого повідомлення.

4. Для отриманого алфавіту побудувати кодову таблицю коду Шеннона-Фано чи Хаффмана (за варіантами) за умови, що літери в повідомленні незалежні.

5. Обчислити середню довжину кодових комбінацій отриманого коду і порівняти її з довжиною кодової комбінації при рівномірному кодуванні.

6. Порівняти числові значення ентропії та середньої довжини кодових комбінацій отриманого коду. В якому співвідношенні вони мають бути? Чим пояснюється відмінність числових значень?

7. Обчислити коефіцієнти стиснення повідомлення та ефективності отриманого коду.

Методичні вказівки до виконання ІЗ № 2.1

1. Інформаційні характеристики джерела дискретних повідомлень детально описані в [1, розд. 8], [3, розд. 18].

2. Побудова коду Шеннона-Фано наведено в [1, с. 309], коду Хаффмана [4, с. 879…881] та в лекції 3 цього навчального посібника. Варіант коду вибирається за останньою цифрою номера залікової книжки студента: непарна – код Шеннона-Фано, парна – код Хаффмана.

3. Імовірності літер у змістовних українських текстах наведено в табл. 4.1 цього навчального посібника.

4. Для розрахунків ентропії і середньої довжини кодових комбінацій отриманого коду ймовірності використаних літер “Прізвища та ім’я” та пропуску між ними мають бути нормовані, тобто сума ймовірностей повинна дорівнювати одиниці. Для цього необхідно ймовірності літер, взятих із табл. 4.1, поділити на суму ймовірностей використаних літер.

5. Середня довжина кодових комбінацій обчислюється як математичне сподівання кількості двійкових символів у кодових комбінаціях отриманого нерівномірного коду Шеннона-Фано чи Хаффмана.

6. У виконаному завданні обов’язково вказувати, з якого літературного джерела (номер підрозділу чи номери сторінок) взяті конкретні відомості для виконання цього індивідуального завдання.

Таблиця 4.1 – Розподіл імовірностей літер у змістовних українських текстах

Літера	**Імовірність**	**Літера**	**Імовірність**	**Літера**	**Імовірність**	**Літера**	**Імовірність**
Пропуск	0,122	Р	0,040	З	0,018	Ж	0,007
О	0,090	С	0,034	Й	0,017	Ц	0,006
А	0,074	Л	0,034	Б	0,016	Ю	0,006
И	0,059	К	0,032	Я	0,015	Ї	0,006
І	0,055	У	0,032	Г	0,013	Є	0,003
Н	0,053	Д	0,026	Ч	0,012	Ф	0,002
В	0,047	П	0,026	Ш	0,010		
Т	0,044	М	0,023	Х	0,008		
Е	0,041	Ь	0,021	Щ	0,008		

4.3 Індивідуальне завдання ІЗ №2.2 – Кодування неперервного повідомлення.

Неперервне повідомлення джерела перетворюється в неперервний первинний сигнал і далі передається каналом зв'язку методом ІКМ з використанням рівномірного квантування.

Необхідно:

1. Скласти і описати структурні схеми АЦП і ЦАП.
2. Визначити такі параметри АЦП та ЦАП:

– частоту дискретизації $f_д$;

– число рівнів квантування L;

– довжину двійкового коду n;

– швидкість цифрового сигналу на виході АЦП R;

– відношення сигнал/шум квантування $\rho_{кв}$ для розрахованих та вибраних параметрів АЦП;

– допустиму ймовірність помилки символу (біта) p на вході ЦАП;

– параметри інтерполюючого фільтра ЦАП;

– порядок фільтра Баттерворта, який можна використати у якості інтерполюючого фільтра ЦАП.

Вихідні дані для розрахунків АЦП та ЦАП задані в табл. 4.2:

– максимальна частота спектра первинного сигналу $F_{\max}$;

– середня потужність первинного сигналу P_b;

– коефіцієнт амплітуди первинного сигналу $K_А^2$;

– допустиме відношення сигнал/шум квантування $\rho_{кв.доп}$;

– відношення сигнал/похибка на виході ЦАП $\rho_{вих}$ взяти на 3 дБ меншим за $\rho_{кв.доп}$.

Таблиця 4.2 – Вихідні дані для виконання індивідуального завдання ІЗ №2.2

№ вар	P_b, В^2	$K_А^2$	$F_{\max}$, кГц	$\rho_{кв.доп}$, дБ	№ вар	P_b, В^2	$K_А^2$	$F_{\max}$, кГц	$\rho_{кв.доп}$, дБ
01	1,2	8,0	12,0	34	16	1,8	4,5	12,0	39
02	2,5	3,0	2,4	41	17	2,0	4,8	14,0	45
03	0,1	5,0	6,5	45	18	2,2	3,0	14,5	41
04	0,3	5,5	8,0	45	19	2,4	3,5	12,0	42
05	0,5	3,5	2,4	47	20	2,6	3,8	1,5	48
06	0,7	3,0	2,7	43	21	2,8	3,7	3,8	47
07	0,9	4,0	3,5	40	22	0,5	4,5	2,7	39
08	1,2	4,5	1,5	53	23	0,6	4,5	7,4	45
09	1,5	3,5	2,5	42	24	0,7	3,0	5,0	53
10	1,8	4,5	12,0	39	25	0,8	5,5	16,0	38
11	2,0	5,0	3,5	41	26	0,9	5,5	12,5	44
12	2,5	4,5	14,0	45	27	1,2	9,0	0,8	41
13	2,8	6,5	16,0	36	28	1,4	6,5	15,0	42
14	3,0	3,0	8,0	47	29	1,6	7,0	2,8	42
15	0,2	7,О	12,5	42	30	1,8	3,0	10,0	47

Методичні вказівки до виконання ІЗ №2.2 викладено в лекції 5. Номер варіанта конкретному студенту визначається вказівками лектора.

У виконаному завданні обов’язково вказувати, з якого літературного джерела (номер підрозділу чи номери сторінок) взяті конкретні дані для виконання цього індивідуального завдання.

5 ЗАВДАННЯ ДЛЯ ПЕРЕВІРКИ ЗНАНЬ ТА ВМІНЬ З МОДУЛЯ

5.1 Рекомендації щодо використання завдань

У цьому розділі наведено згідно з чинною програмою дисципліни ТЕЗ перелік завдань до екзамену та пояснення до фонду тестових завдань з модуля. Доцільність надання переліку екзаменаційних питань тривіальна – студент має знати обсяг навчального матеріалу, що виноситься на екзамен. Фонд тестових завдань кафедри може бути використано за різним призначенням:

– перевірки підготовленості студентів до поточних занять (вправ та лабораторних робіт, індивідуальних завдань);

– перевірки підготовленості студентів до екзамену;

– ректорської та галузевої перевірок залишкових знань з модуля.

Кількість тестових завдань та балів за кожне з них визначається призначенням конкретної перевірки.

5.2 Перелік екзаменаційних завдань

Екзамен із модуля буде провадитись в письмовій формі з подальшою співбесідою. В екзаменаційному білеті п'ять завдань – теоретичне, схемне та три задачі за темами модуля, повна відповідь на кожне з них оцінюється в 20 балів. Модуль вважається зданим за умови отримання не менше 60 балів.

5.2.1 *Теоретичні завдання*

1. Вивести формулу для обчислення ентропії джерела *A* дискретних незалежних повідомлень та провести її аналіз.

2. Вивести формулу для обчислення умовної, спільної чи взаємної ентропій двох джерел дискретних залежних повідомлень та провести її аналіз.

3. Вивести формулу для обчислення диференціальної ентропії джерела неперервних повідомлень, якщо густина ймовірності джерела має розподіл ймовірності: гауссів, односторонній чи двосторонній експоненціальні, рівномірний та провести її аналіз.

4. Вивести формулу для обчислення епсилон-ентропії джерела неперервних повідомлень, якщо густина ймовірності джерела має розподіл ймовірності: гауссів, односторонній чи двосторонній експоненціальні, рівномірний та провести її аналіз.

5. Довести, що кількість інформації в повідомленні та ентропія дискретного джерела завжди невід’ємні.

6. Довести, за яких умов ентропія двійкового джерела незалежних повідомлень дорівнює чи нулю одиниці.

7. Вивести формулу для обчислення пропускної здатності каналу зв'язку з АБГШ чи ДСК та провести її аналіз.

8. Довести, за яких умов пропускна здатність ДСК чи каналу з АБГШ дорівнює нулю чи максимальна.

5.2.2 *Структурні схеми перетворень повідомлень, сигналів*

1. Структурні схеми систем електрозв'язку для передавання дискретних повідомлень чи неперервних повідомлень цифровими методами.

2. Структурні схеми АЦП, ЦАП, кодерів та декодерів ІКМ, ДІКМ, ДМ. Пояснити принцип роботи цих пристроїв.

5.2.3 *Задачі*

Блок 1. *Розрахунки інформаційних характеристик джерел дискретних та неперервних повідомлень*

2.1. Дискретне джерело для видачі повідомлень використовує знаки із заданими ймовірностями. Обчислити кількість інформації в кожному знаку повідомлення, ентропію, продуктивність і надмірність джерела (тривалість кожного із знаків задана).

2.2. Для двох джерел повідомлень A і B задані ентропії: $H(A)$, $H(A/B)$, $H(B)$, $H(B/A)$. Обчислити спільну та взаємну ентропію заданих джерел.

2.3. Розрахувати епсилон-ентропію, надмірність та епсилон-продуктивність джерела неперервних повідомлень при заданих його ймовірнісних характеристиках.

Блок 2. *Кодування джерел дискретних та неперервних повідомлень*

2.1. Повідомлення джерела кодуються двійковим рівномірним кодом: довжини n символів, тривалість видачі кожного знака джерела $T_{\text{зн}}$. Визначити максимальний обсяг алфавіту джерела, щоб знаки можна було закодувати цим кодом, тривалість одного двійкового символу та швидкість цифрового сигналу.

2.2. Задано ймовірнісні характеристики джерела дискретних повідомлень, тобто ймовірності знаків. Побудувати кодову таблицю нерівномірного двійкового коду Шеннона-Фано чи Хаффмена. Для отриманого коду обчислити середнє число двійкових символів у кодових комбінаціях та порівняти його з обчисленою ентропією джерела.

2.3. Визначити параметри цифрового сигналу на виході АЦП з рівномірним квантуванням (швидкість цифрового сигналу та відношення сигнал/шум квантування), якщо задані параметри неперервного первинного сигналу: максимальна частота спектра $F_{\max}$, коефіцієнт амплітуди $K_{\text{А}}$, число рівнів квантування в АЦП L.

Блок 3. *Розрахунки інформаційних характеристик каналів зв'язку*

3.1. Обчислити пропускну здатність двійкового симетричного каналу без пам'яті із заданою ймовірністю помилки символу p та швидкістю модуляції $B_{\text{мод}}$.

3.2. Обчислити пропускну здатність гауссового каналу із заданими: смугою пропускання каналу, спектральною густиною потужності шуму в ньому, потужністю сигналу.

3.3. Визначити, чи можна повідомлення від джерела із заданою продуктивністю передавати з високою якістю каналом зв'язку із заданою пропускною здатністю? Відповідь пояснити.

5.3 Пояснення до фонду тестових завдань з модуля

5.3.1 Принципи побудови тестових завдань. Фонд тестових завдань із модуля 2 підготовлений викладачами кафедри за рекомендаціями Інституту інноваційних технологій і змісту освіти МНОУ і містить тестові завдання як закритого так і відкритого типу.

Зміст тестових завдань впорядкований (містить 5 змістовних блоків) та забезпечує системність за темами і відповідає:

– обсягу інформації, що отримана студентом на лекціях;

– рівню засвоєння інформації: знати основні поняття, терміни, визначення, застосування в телекомунікаціях; уміти провадити розрахунки основних інформаційних характеристик та параметрів кодів джерел повідомлень.

У цьому навчальному посібнику не приведено повний обсяг тестових завдань, а тільки тематику й окремі приклади. Це пов’язано з тим, що:

– з плином часу фонд тестових завдань кафедри удосконалюється, тобто змінюються формулювання, вилучаються та доповнюються окремі завдання;

– студенти мають запам’ятовувати не конкретні відповіді, а сутність поставлених тестових завдань.

5.3.2 ***Блок 1.*** *Інформаційні характеристики джерел дискретних повідомлень.*

1. Закриті тестові завдання складені на такі поняття, терміни та визначення: кількість інформації, ентропії (власна, умовна, спільна, взаємна) та їхні властивості, надмірність та продуктивність джерела.

Приклади

Вибрати номер правильної, на Ваш погляд, відповіді:

1 Один біт інформації, це – кількість інформації, що міститься в повідомленні, імовірність якого (0; 0,5; 1).

2. Твердження, що кількість інформації в повідомленні a_k може бути меншою за одиницю, наприклад, 0,83 біт (правильне, помилкове)

3 Середня кількість інформації на одне повідомлення для джерела A, яку можна дістати, спостерігаючи джерело B, характеризується (безумовною ентропією, умовною ентропією, сумісною ентропією, взаємною ентропією).

2. У відкритих тестових завданнях необхідно провести розрахунки: кількості інформації (ф-ли (1.1), (1.2), (2.1)), ентропії (ф-ли (1.4), (1.7), (2.4), (2.5)), надмірності (ф-ла (1.8)) та продуктивності джерела (ф-ли (1.9), (1.2), (2.6), (2.7)).

Приклади

Провести обчислення і записати відповідь:

4 Джерело дискретних повідомлень видає повідомлення a_k з імовірністю $P(a_k)$ = ____. Кількість інформації в цьому повідомленні буде _____, дв.од. (біт).

5. Джерело дискретних повідомлень має ентропію 2,0 дв.од./знак. Тривалість кожного знака повідомлення $T_{зн}$ = ___ мс. Продуктивність цього джерела буде ______, дв.од./с (біт/с).

5.3.3 *Блок 2. Кодування джерел дискретних повідомлень*

1. Закриті тестові завдання складені на такі поняття, терміни та визначення: класифікація та параметри кодів джерела, стандартні та ефективні коди.

Приклади

Вибрати номери правильних, на Ваш погляд, відповідей:

6. У теорії кодування синонімом терміна розрядність коду є термін (довжина коду, основа коду, значність коду, кодове слово).

7. Нерівномірний код, який не потребує розділових знаків між кодовими комбінаціями, отримав назву (стандартний код, код Хаффмана, код Шеннона-Фано, префіксний код, код без коми).

Вибрати номер правильної, на Ваш погляд, відповіді:

8. Для ефективних кодів між ентропією джерела $H(A)$ і середньою довжиною кодової комбінації $\overline{n}$ згідно з теоремою Шеннона існує співвідношення ($\overline{n} = H(A)$, $\overline{n} > H(A)$, $\overline{n} < H(A)$).

2. У відкритих тестових завданнях необхідно провести розрахунки: середньої довжини рівномірного та нерівномірного кодів (ф-ли (3.2), (3.5)), коефіцієнтів стиснення та ефективності нерівномірних кодів (ф-ли (3.6), (3.7)).

Приклади

Провести обчислення і записати відповідь:

9. Кодер джерела видає двійкові кодові комбінації рівномірного коду довжини ___ розрядів. Максимальне число знаків, що можна закодувати цим кодом, буде ___ знаків.

10. Якщо обсяг алфавіту джерела M_A = __ знаків, то розрядність рівномірного коду для цього джерела буде ___ символів.

5.3.4 *Блок 3. Інформаційні характеристики джерел неперервних повідомлень.*

1. Закриті тестові завдання складені на такі поняття, терміни та визначення: ентропії (диференціальна, епсилон-ентропія) та їхні властивості, надмірність та епсилон-продуктивність джерела.

Приклади

Вибрати номери правильних, на Ваш погляд, відповідей:

11. Диференціальна ентропія джерела неперервного сигналу з густиною ймовірності $p(b)$ обчислюється за формулою ($-\int_{-\infty}^{\infty} p(b)\log_2(p(b))db$, $\log_2\sqrt{2\pi eD(B)}$, $\log_2\sqrt{12D(B)}$, $\int_{-\infty}^{\infty} p(b)\log_2(1/p(b))db$).

Вибрати номер правильної, на Ваш погляд, відповіді:

12. Твердження про те, що диференціальна ентропія набуває тільки невід'ємні значення (правильне, помилкове).

2. У відкритих тестових завданнях необхідно провести розрахунки: диференціальної ентропії (ф-ли (4.2), (4.6), (4.12)…(4.15)), епсилон-ентропії (ф-ла (4.9)), надмірності (ф-ла (4.10)) та епсилон-продуктивності джерела (ф-ла (4.11)).

Приклади

Провести обчислення і записати відповідь:

13. Джерело неперервних повідомлень має диференціальну ентропію $h(A)$ = ___ дв.од./відлік і диференціальну ентропію похибки наближеного подання повідомлень h(E) = ____ дв.од./відлік. Епсилон-ентропія цього джерела $H_\varepsilon(A)$ буде ______, дв.од./відлік.
14. Диференціальна ентропія джерела неперервного сигналу, що має гауссів розподіл імовірностей з дисперсією ___ $В^2$ буде дорівнювати _____, дв.од./відлік.

5.3.5 *Блок 4. Кодування джерел неперервних повідомлень*

1. Закриті тестові завдання складені на такі поняття, терміни та визначення: методи кодування ІКМ, ДІКМ, ДМ та їхні основні характеристики, похибки під час кодування джерела неперервних повідомлень.

Приклади

Вибрати номери правильних, на Ваш погляд, відповідей:

15. У ЦАП, як мінімум, застосовуються такі функціональні вузли (фільтр нижніх частот, кодер, декодер, дискретизатор, квантувач)
16. Спотворення типу "перевантаження за крутістю" має місце в (кодері імпульсно-кодової модуляції, кодері диференціальної імпульсно-кодової модуляції, кодері дельта модуляції, декодері диференціальної імпульсно-кодової модуляції, декодері дельта-модуляції).

2. У відкритих тестових завданнях необхідно провести розрахунки для ІКМ: частоти дискретизації(ф-ла (5.1)), відношення сигнал/(шум квантування) (ф-ла (5.7)), довжини коду АЦП (ф-ла (5.9)), швидкості цифрового сингалу (ф-ла (5.11)).

Приклади

Провести обчислення і записати відповідь:

17. Задано, що для перетворення аналогового мовного сигналу з $F_{\max}$ = 3,4 кГц у цифровий за Рекомендаціями МСЕ частота дискретизації $f_д$ = _____ кГц.
18. Задано, що для забезпечення допустимого відношення сигнал/шум квантування в кодері ІКМ при рівномірному квантуванні необхідно мати, як мінімум, ___ рівнів квантування. При цьому довжина коду буде____ розрядів

5.3.6 *Блок 5. Інформаційні характеристик каналів електрозв'язку. Теореми Шеннона*

1. Закриті тестові завдання складені на такі поняття, терміни та визначення: середня кількість переданої інформації каналом, швидкість передавання ін-

формації каналом, пропускна здатність каналу (ДСК та з АБГШ), основна теорема кодування Шеннона для каналів із завадами.

Приклади

Вибрати номер правильної, на Ваш погляд, відповіді:

19. Твердження про те, що в каналі з обмеженою смугою пропускання і завадами можна досягти як завгодно великої швидкості передачі інформації (правильне, помилкове).
20. За основною теоремою кодування Шеннона якісне передавання повідомлень каналом зв'язку можливе, якщо між продуктивністю джерела $R_{дж}$ і пропускною здатністю каналу $C_{кан}$ виконується співвідношення ($R_{дж} = C_{кан}$, $R_{дж} > C_{кан}$, $R_{дж} < C_{кан}$).

2. У відкритих тестових завданнях необхідно провести розрахунки: пропускної здатності каналів ДСК та з АБГШ, (ф-ли (7.6), (7.7), (7.14), (7.15)), умов досягнення якісного передавання повідомлень каналом (ф-ла (8.3)).

Приклади

Провести обчислення і записати відповідь:

21. Пропускна здатність двійкового симетричного каналу при швидкості модуляції в ньому _____ Бод і ймовірності помилки символу p =_____ буде _____ дв.од./с.

22. Пропускна здатність гауссового каналу зв'язку зі смугою пропускання $F_{кан}$ = ___кГц і відношенням середніх потужностей сигналу і шуму P_s/P_n = ____ дБ буде _______ кбіт/с.

6 ВИХІДНІ ЗНАННЯ ТА ВМІННЯ З МОДУЛЯ

Наведений в табл. 6.1 перелік вихідних знань та вмінь студент повинен набути під час вивчення навчального матеріалу модуля 2. Шифр знання та вміння встановлено згідно з чинною навчальною програмою дисципліни ТЕЗ.

Таблиця 6.1 – Перелік вихідних знань та вмінь з модуля 2

№	Зміст знань	Шифр
1	Інформаційні характеристики джерел повідомлень	Зн.06
2	Кодування дискретних повідомлень	Зн.07
3	Кодування неперервних повідомлень (аналогових сигналів)	Зн.08
4	Інформаційні характеристики каналів зв'язку	Зн.09
5	Теореми Шеннона для каналів зв'язку без завад і із завадами	Зн.10
	Зміст умінь	
1	Розраховувати інформаційні характеристики джерел дискретних повідомлень.	Ум.04
2	Проводити кодування та декодування дискретних повідомлень ефективними кодами Хаффмена та Шеннона-Фано	Ум.05
3	Розраховувати параметри сигналів під час аналого-цифрового перетворення та параметри АЦП	Ум.06
4	Розраховувати пропускну здатність каналів зв'язку (ДСК та з АБГШ)	Ум.07

ЛІТЕРАТУРА

1. **Стеклов В.К.,** Беркман Л.Н. Теорія електричного зв'язку: Підручник для ВНЗ за ред. В.К. Стеклова. – К.: Техніка, 2006. – 552 с.

2. **Теория** электрической связи: учебник для вузов / [А.Г. Зюко, Д.Д. Кловский, В.И. Коржик, М.В. Назаров]; под ред. Д.Д. Кловского. – М.: Радио и связь, 1998. – 432 с.

3. **Панфілов І.П.** Теорія електричного зв'язку: підручник для вузів першого та другого рівнів акредитації / Панфілов І.П., Дирда В.Ю., Капацін А.В. – К.: Техніка, 1998. – 328 с.

4. **Скляр Б.** Цифровая связь. Теоретические основы и практическое применение / Скляр Б., 2-е изд.; пер. с англ. – М.: Издательский дом «Вильямс», 2003. – 1104 с.

5. **Кудряшов Б.Д.** Теория информации: учебник для вузов / Кудряшов Б.Д. – СПб.: Питер, 2009. – 320 с.

ДОДАТОК А

Пам’ятні дати створення науки “Теорія інформації” та її провідні творці

Основи теорії інформації

1928 – Р.В.Р. Хартлі публікує пропозиції про вибір логарифмічної кількісної міри інформації, заснованої на понятті вибору повідомлень з безлічі, що підлягають передаванню.

1948 – К. Шеннон публікує статті «Математична теорія зв’язку», в який закладені основи застосування теорії інформації до задач зв’язку, введені поняття: ентропія джерела повідомлень і пропускна здатність каналу зв’язку.

1955 – А.Г. Зюко, ґрунтуючись на понятті пропускної здатності каналу, вводить нові показники для оцінки ефективності систем зв'язку: інформаційна, енергетична і частотна ефективність.

1956 – акад. А.М. Колмогоров публікує низку робіт із теорії інформації, в яких:

– подає найбільш загальне доведення теореми кодування К. Шеннона для каналів із шумами;
– розробляє методи обчислення ε-ентропії для різних джерел повідомлень (1963 і 1964 – М.С. Пінскер)
– подає математично строге обґрунтування поняття взаємної інформації і розробляє метод її обчислення (1961 – Р.Л. Добрушин);

1956 – О.Я. Хінчин надає перше строге доведення основної теореми кодування К.Шеннона для стаціонарного каналу з обмеженою пам'яттю.

1959 – Р.Л. Добрушин пропонує загальний підхід до доведення теореми кодування К.Шеннона для джерел із заданим рівнем вірності, з якого випливає, що теорема Шеннона є окремим випадком теореми Добрушина.

Кодування джерел дискретних повідомлень

1838 – С. Морзе пропонує код для телеграфного зв’язку («код Морзе» – перший приклад статистичного коду, що враховує статистику літер англійського тексту).

1951 – Р. Фано висловлює ідею побудови статистичного коду для кодування джерел (код Шеннона-Фано).

1952 – Д. Хаффман пропонує метод побудови кодів з мінімальною надлишковістю (код Хаффмана).

1965 – акад. А.М. Колмогоров пропонує новий напрямок теорії кодування дискретних джерел – «універсальне кодування».

1976–1978 – Я. Зів і А. Лемпель розробляють ефективний алгоритм універсального кодування, який знайшов широко застосування (код Лемпеля–Зіва).

Кодування джерел неперервних повідомлень

1938 – А. Рівс винаходить імпульсно-кодову модуляцію (ІКМ).

1944 – В.Р. Беннет проводить перше дослідження точності відновлення аналогових сигналів при їхньому перетворенні методом ІКМ.

1946 – Е. Делорейн, С. Ван Міеро і Б. Дерьявич пропонують дельта-модуляцію (ДМ) (1949 р. – Л.А. Коробков).

1952 . – К.К. Катлер винаходить диференціальну ІКМ (ДІКМ).

1956 – Г. Крамер і М. Мас’ю розробляють метод кодування джерел неперервних повідомлень з перетворенням аналогового сигналу.

1960-1975 – Теоретичні й експериментальні дослідження й оптимізація різних методів ІКМ, ДМ і ДІКМ (СРСР – О. І. Величкін, М. Д. Венедиктов; США – Дж. Макс, Дж. Е. Ебейт, Дж. Б. О’нейл).

Кодування мовних сигналів і сигналів звукового мовлення

1956 – Розробка аналогової 48-канальної системи TASI, в якій паузи мови використовувалися для збільшення удвічі пропускної здатності каналів.

1980 – Розробка системи NICAM для скорочення надмірності сигналів звукового мовлення.

1989 – Розробка включеної в стандарт MPEG системи MUSICAM, що заснована на використанні методу перетворення сигналу і призначена для скорочення надмірності сигналів звукового мовлення.

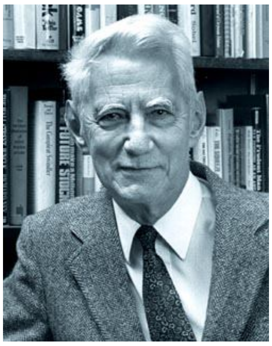
Кодування відеоповідомлень

1994 – Розроблення і широке впровадження в сучасну техніку цифрового телевізійного мовлення стандарту MPEG-2 – удосконаленої версії раніше розробленого стандарту MPEG-1. Цей стандарт є втіленням ідей та положень теорії сигналів, теорії інформації та теорії завадостійкого кодування.

1998 – Розроблення стандарту MPEG-4, який дає більше стиснення сигналів телевізійного та звукового мовлення, ніж стандарт MPEG-2.

Клод Е. ШЕННОН (Claude E. SHANNON) (1916-2001)

Математик і інженер



Біографічний нарис. Народився 30.04.1916 р. у м. Пітоскі, штат Мічиган, США. У 1936 р. закінчив Мічиганський університет і почав працювати в знаменитому Массачусетському технологічному інституті (МТІ) (асистент, професор). 1941-45 рр. – співробітник знаменитої Белл-лабораторії. У віці 50 років вийшов на пенсію і вів вільний спосіб життя, займаючись улюбленими заняттями.

Наукові досягнення. За час свого творчого життя К. Шеннон створив основи трьох нових наук: “Теорія інформації”, “Теорія криптографії” та “Теорія ігор”.

Перша з них широко відома в усьому світі й особистість її автора та науки образно охарактеризував акад. А.М. Колмогоров “*Шеннон являє винятковий приклад поєднання глибини математичної думки із широким і в той же час конкретним розумінням проблем техніки. Його в однаковій мірі можна вважати одним з перших математиків і одним з перших інженерів XX століття. Він створив основи теорії інформації і значною мірою визначив своїми роботами розвиток загальної теорії дискретних автоматів”.*

Наукові ідеї К. Шеннона, розроблені в “Теорії інформації”, зробили благотворний вплив на розвиток інших наукових напрямків: комбінаторика і теорія графів; квантова теорія інформації; статистична механіка; оцінки алгоритмічної й обчислювальної складності; лінгвістика; економетрія; молекулярна біологія тощо.

Другою наукою займався під час Другої світової війни. Розроблені ним системи криптографії використовувалися для організації урядового зв’язку з організації трансокеанських конференцій між президентом США Рузвельтом і Прем’єр-міністром Великобританії Черчиллем. Третя наука – це його захоплення.

Хобі. Улюблені заняття К. Шеннона у вільний час – конструювання механічних моделей, шахи, гра на біржі. Наприклад, ним сконструйована механічна миша Тезей, механічний цирк, розроблена перша комп’ютерна програма гри в шахи. Він був непоганим шахістом і програв чемпіону світу М. Ботвиннику тільки на 41 ході.

Успішна гра на біржі носила науковий інтерес – він розробляв оптимальну стратегію гри, тобто ним створювалася нова наука "Теорія ігор". Тільки один раз він виступив з лекцією про цю науку в МТІ, але подробиць своєї стратегії ігри так ніде і не опублікував.

Нагороди. К. Шеннону були присуджені почесні ступені ряду університетів світу, безліч наукових нагород і медалей, а саме: американські премії А. Нобеля; М. Лібмана, японська – Кіота. Він член Національної Академії наук США й Американської академії мистецтв. Але, мабуть, найбільшим визнанням заслуг стало ще прижиттєве затвердження американським Інститутом інженерів по електротехніці й електроніці премії ім. К. Шеннона, якою нагороджуються вчені за досягнення в області теорії інформації.

КОЛМОГОРОВ Андрій Миколайович (1903-1987)

Академік, Математик з великої літери, педагог

Біографічний нарис. Народився 25.04.1903 р. у м. Тамбові. З Московським державним університетом (МДУ), який він закінчив у 1925 р., нерозривно пов'язане все його життя (аспірант, ст. науковий співробітник, професор, зав кафедри, декан). Крім того – зав. відділом математичної статистики і теорії інформації Математичного інституту Стеклова.

Наукові досягнення. А.М. Колмогоров був у математиці універсалом і вніс величезний вклад у множину її розділів: теорія ймовірностей, математична логіка і лінгвістика, теорія множин і класична механіка, теорія інформації, віршознавство тощо. Надзвичайна широта математичних інтересів роблять його найбільш видатним математиком XX століття.

Внесок у теорію зв'язку. Наукові праці А.М. Колмогорова вплинули на розвиток таких напрямків теорії зв'язку: статистичні методи аналізу радіотехнічних систем, автоматизовані нелінійні слідкуючі пристрої (системи ЧАПЧ та ФАПЧ), теорія оптимальної лінійної фільтрації і теорія інформації.

Для статистичного аналізу випадкових процесів вивів стохастичне диференціальне "**рівняння Колмогорова**", що містить у собі всі попередні рівняння (Чепмена, Фокера-Планка й ін.) і дозволяє знайти розподіл імовірності випадкового процесу при переході з одного моменту часу в інший.

Теорія оптимальної лінійної фільтрації – це дітище Колмогорова, незалежно продовжене Н. Вінером. Розроблений цими видатними математиками XX ст. фільтр дістав назву – **оптимальний фільтр Колмогорова-Вінера**.

У теорії інформації А.М Колмогоров, по-перше, дав строгий математичний доказ основної теореми кодування К. Шеннона, по-друге, показав, що поряд з імовірнісним підходом до визначення інформаційних характеристик, у багатьох випадках більш природні комбінаторний і алгоритмічний підходи.

Педагог. У МГУ А.М. Колмогоров створив найбільш значну математичну школу, яку можна порівняти зі знаменитими школами великих фізиків XX ст. Резерфорда та Бора. Серед його учнів 12 членів Академії наук СРСР. Довгий час він очолював математичну секцію Академії педагогічних наук СРСР з визначення змісту математичної освіти в середній школі.

Нагороди. Лауреат Сталінської (1941 р.) і Ленінської премій (1965 р.), премій ім. Чебишева (1949 р.) і ім. Лобачевського (1985 р.), Герой Соціалістичної праці (1983 р.), сім орденів Леніна, почесний доктор університетів і академій багатьох країн. Міжнародні премії – ім. Больцмана (аналог Нобелівської премії для математиків), Гельмгольца і Фонду Вольфа та ін.

Навчальне видання

Дирда Віктор Юхимович
Іващенко Петро Васильович

ТЕОРІЯ ЕЛЕКТРИЧНОГО ЗВ'ЯЗКУ

Модуль 2. Передавання інформації в телекомунікаційних системах

Навчальний посібник

Редактор Гусак В.Т.

Здано в набір 8.10.2010 Підписано до друку 14.10.2010
Формат 60х90/16 Зам. № 43
Тираж 600 прим. Обсяг 5,0 друк. арк.
Віддруковано на видавничому устаткуванні фірми RISO
у друкарні редакційно-видавничого центру ОНАЗ ім. О.С. Попова
м. Одеса, вул. Старопортофранківська, 61
Тел. 720-78-94
ОНАЗ, 2010