

# ОСНОВИ ТЕОРІЇ КІЛ ТА СИГНАЛІВ

## 1. Основи символічного методу розрахунку електричних кіл

### 1.1. Основні поняття та закони електричних кіл

#### 1.1.1. Електричне коло: визначення, склад

**Електричне коло** – це сукупність елементів (пристроїв), певним чином з'єднаних поміж собою та утворюючих шлях для електричного струму. Електричні кола мають велику кількість призначень та функцій, серед яких важливе місце займають генерація електромагнітних коливань, їх передача, прийом та обробка.

Електромагнітні процеси в електричному колі можна описати за допомогою понять „струм“, „напруга“, „електрорушійна сила“ („ЕРС“). Ці електричні величини можуть бути постійними (незмінними в часі), а можуть мати певну часову залежність. В зв'язку з цим, загальноприйнятими є їх відповідні позначення, а саме

Фізична величина	Позначення, в залежності від характеру	
	Змінні в часі	Незмінні
Струм	$i(t)$	$I$
Напруга	$u(t)$	$U$
Електрорушійна сила	$e(t)$	$E$

*Пригадаємо:*

Електричний струм - упорядкований рух вільних носіїв електричного заряду (електронів, іонів). За напрямком струму прийнятий напрямок руху позитивних зарядів.

Величина струму вимірюється в амперах (А). Використовують також дробові одиниці:  $1\text{ма} = 10^{-3}\text{А}$ ,  $1\ \mu\text{А} = 10^{-6}\text{А}$ .

Електрична напруга між двома точками кола є різниця потенціалів між цими точками. Вона спрямована від точки з більшим потенціалом до точки з меншим потенціалом, тобто співпадає з напрямком струму на даній ділянці кола.

Напруга вимірюється в вольтах (В), а також:  $1\text{кВ} = 10^3\text{В}$ ,  $1\text{мВ} = 10^{-3}\text{В}$ ,  $1\text{мкВ} = 10^{-6}\text{В}$  і т. д.

Електрорушійна сила (ЕРС) характеризує роботу сторонніх сил по переміщенню зарядів в джерелі енергії. Сторонні сили є силами не електромагнітного походження. Вони обумовлені механічною, хімічною, світловою та іншими видами енергії. Напрямок ЕРС збігається з напрямком струму в джерелі і протилежний напрямку напруги на зовнішніх затискачах джерела.

ЕРС, як і напруга, вимірюється в вольтах (В), вона чисельно дорівнює напрузі на затискачах джерела у відсутність струму в ньому.

#### 1.1.2. Елементи електричних кіл, їх моделі та характеристики

Елементи електричних кіл розподіляють на пасивні (споживачі електричної енергії) та активні (джерела електричної енергії).

Пасивні елементи об'єднує властивість перетворювати електричну енергію в інші види або запасати її.

До типових пасивних елементів належать резистор, конденсатор та котушка індуктивності.

Методи теорії електричних кіл засновані на наближеному представленні реальних електричних кіл, пристроїв та систем за допомогою їх ідеалізованих моделей – еквівалентних електричних кіл, графічним зображенням яких є електричні схеми.

При цьому всі реальні пасивні елементи замінюють ідеальними пасивними моделями. Ці моделі з певною точністю відображають залежність між струмом і напругою реального елемента.

Моделями резистора, конденсатора, котушки індуктивності є відповідно опір, ємність, індуктивність.

Ці терміни мають подвійний сенс: по-перше, - це назва елемента (моделі), по-друге, - це основна кількісна характеристика, або параметр, цього елемента.

Параметри елементів можуть бути постійними або мати певну часову залежність. Елемент, параметр якого змінюється в часі, називається параметричним.

Крім того, елементи можуть бути лінійними і нелінійними. Лінійним називається елемент, параметр якого не залежить від величини струму або напруги, що діють на нім.

Якщо параметр залежить від величини струму (напруги), то елемент називають нелінійним.

Розглянемо моделі пасивних елементів.

Опір – це елемент, в якому відбувається необоротне перетворення електричної енергії в інші види енергії. Опором можна представити, наприклад, резистор, гучномовець, передавальну антену, електродвигун, лампу розжарювання та ін. Запасання енергії в опорі не відбувається.

Здатність опору перетворювати електричну енергію кількісно характеризується величиною опору  $R$  в Омах або величиною провідності  $G$  в Сименсах.

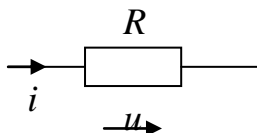
Традиційно опір позначають літерою  $R$  (r), його розмірність - “Ом”; провідність позначають літерою  $G$  (g), її розмірність – “Сименс”. Опір та провідність – взаємно зворотні величини, тобто

$$R = \frac{1}{G}.$$

У лінійному опорі струм  $i$  і напруга зв'язані законом Ома

$$R = \frac{u}{i}.$$

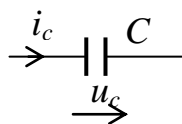
Умовне позначення опору на схемах має вигляд



За властивостями найближчим до опору пасивним елементом є резистор.

Ємність – це ідеалізований елемент, в електричному полі якого запасується енергія. Запасена енергія може за певних умов віддаватися в зовнішнє коло. Перетворення енергії в ємності не відбувається.

Умовне позначення ємності



Величина запасеної енергії визначається зарядом  $q$ , який вимірюється в кулонах

$$q = \int_{-\infty}^t i dt.$$

Здатність елемента запасати енергію кількісно характеризується величиною ємності  $C$ , яка визначається відношенням заряду до різниці потенціалів на виводах

$$C = \frac{q}{u}.$$

Ємність вимірюється у Фарадах.

При зміні напруги на виводах ємності в зовнішньому, по відношенню до неї, колі утворюється струм провідності, величина якого визначається швидкістю зміни заряду. Струм провідності замикається струмом зміщення через діелектрик ємності, тобто струм в ємності – поняття умовне, адже він обумовлений не рухом зарядів в діелектрику, а зміною напруги на обкладинках.

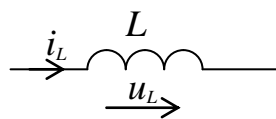
Таким чином, струм і напруга на ємності зв'язані співвідношеннями

$$i_c = \frac{dq}{dt} = C \frac{du_c}{dt}; \quad u_c = \frac{q}{C} = \frac{1}{C} \int i_c dt. \quad (1.1)$$

За властивостями найближчим до ємності пасивним елементом є конденсатор.

Індуктивність – це ідеалізований елемент, в магнітному полі якого запасається енергія. Запасена енергія за певних умов може передаватися в зовнішнє коло. Перетворення енергії в індуктивності не відбувається.

Умовне позначення індуктивності



Здатність елемента запасати енергію кількісно характеризується величиною індуктивності  $L$ , яка визначається відношенням потокозчеплення  $\Psi$  до струму  $i$ , який це потокозчеплення зумовив

$$L = \frac{\Psi}{i}.$$

Індуктивність вимірюється в Генрі.

Зв'язок між напругою і струмом в індуктивності визначається законом електромагнітної індукції

$$u_L = -e_L = \frac{d\psi}{dt} = \frac{d}{dt} Li_L = L \frac{di_L}{dt}; \quad i_L = \frac{1}{L} \int u_L dt. \quad (1.2)$$

За властивостями найближчим до індуктивності пасивним елементом є котушка індуктивності.

Ємність і індуктивність називають енергоємними, або реактивними, на відміну від опору, елементами у зв'язку з їх властивістю запасати електричну енергію і віддавати її в зовнішнє коло при певних умовах.

Активні елементи, або джерела електричної енергії, живлять електричне коло, обумовлюючи в ньому певні процеси.

Реальні джерела в рамках теорії електричних кіл представляють однією з двох ідеалізованих моделей - джерела напруги і джерела струму.

Ідеальним джерелом напруги (джерелом ЕРС) називають джерело, напруга на зовнішніх затискачах якого не залежить від величини струму, який протікає через затискачі (віддається в коло).

Вольт-амперна характеристика такого джерела має вид, представлений на рис. 1.1

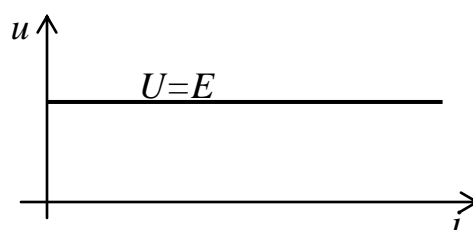


Рис. 1.1

Таким чином, ідеальне джерело напруги не має власного внутрішнього опору, а значить має нескінченно велику потужність. Напруга на його затискачах дорівнює ЕРС.

На умовному графічному зображенні показують напрям ЕРС і напруги (рис. 1.2)

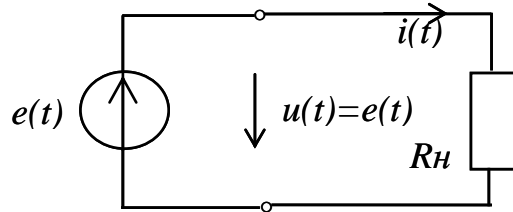


Рис. 1.2

Ідеальним джерелом струму називається активний елемент, для якого струм, що віддається в зовнішнє коло, не залежить від напруги на його затискачах.

Таким чином, внутрішній опір ідеального джерела струму нескінченно великий; його потужність - нескінченно велика.

Вольт-амперна характеристика такого джерела має вид, представлений на рис.1.3

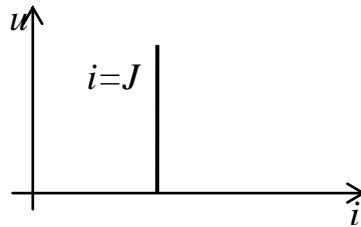


Рис. 1.3

На умовному графічному зображенні показують напрям струму в джерелі і напругу на його затискачах (рис. 1.4)

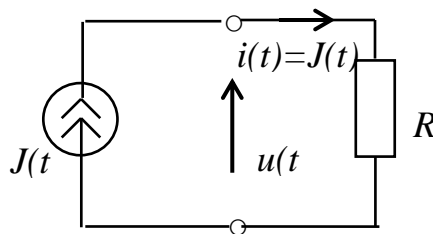


Рис. 1.4

Характеристики реальних джерел, зокрема величина внутрішнього опору та потужність, істотно відрізняються від ідеальних. Лише в окремих випадках можливе певне наближення.

Умовні зображення реальних джерел містять внутрішній опір, який в джерелі напруги включається послідовно, а в джерелі струму - паралельно зовнішнім затискачам (рис.1.5)

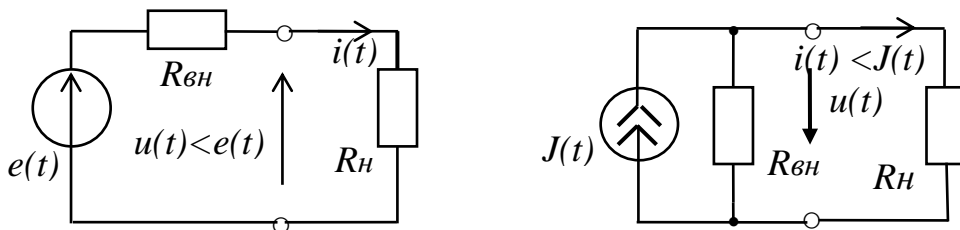


Рис. 1.5

На певних етапах розрахунків електричних кіл можуть бути доцільними еквівалентні перетворення джерела одного типу в інший.

### 1.1.3. Класифікація електричних кіл

Електричні кола найчастіше прийнято класифікувати за наступними ознаками:  
по наявності активних елементів розрізняють пасивні і активні кола;  
по властивостям (характеристикам) елементів розрізняють лінійні і нелінійні кола. Нелінійним називають коло, яке містить хоч би один нелінійний елемент;  
по часовій залежності параметрів елементів розрізняють кола з постійними параметрами і параметричні кола, до складу яких входить хоч би один параметричний елемент;  
по складу пасивних елементів розрізняють резистивні, реактивні і змішані кола;  
по числу зовнішніх полюсів (затискачів) розрізняють двополюсні, триполюсні і, в загальному випадку, багатополюсні кола. Найчастіше в теорії кіл мають справу з двополюсниками і чотирьополюсниками;  
по співвідношенню геометричних розмірів кола і довжини хвилі коливань, які діють в колі, розрізняють кола із зосередженими і розподіленими параметрами.

### 1.1.4. Елементи топології електричних схем

Топологія - розділ математики, що вивчає властивості фігур, які не змінюються при перетвореннях. У теорії кіл такими фігурами є електричні схеми. Ми згадували, що при аналізі процесів і властивостей електричних кіл їх представляють у вигляді схеми, тобто графічної моделі.

Електрична схема - це графічне зображення реального електричного кола за допомогою умовних позначень у відповідності зі стандартами і нормами. Розрізняють структурні, принципові, еквівалентні та інші види схем.

На структурній схемі відображають лише найважливіші функціональні елементи кола і зв'язки між ними.

Принципова схема містить усі елементи кола і зв'язки між ними.

Еквівалентна (розрахункова) - це схема, в якій усі реальні елементи замінені ідеалізованими моделями. Моделі з відповідною точністю відображають залежність між напругою і струмом реальних елементів.

На рис. 1.6 представлена еквівалентна схема електричного кола, яка представляє собою відповідні з'єднання резисторів  $R_1 \dots R_5$ , конденсаторів  $C_1 \dots C_2$ , котушки індуктивності  $L$  і джерела постійної напруги, представленого джерелом постійної  $E$  з внутрішнім опором  $R_{вн}$ .

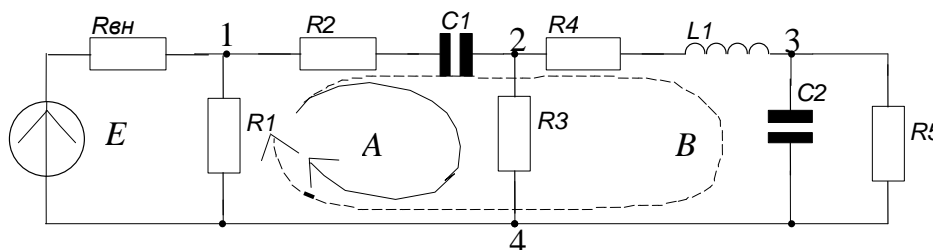


Рис. 1.6

Основними топологічними елементами схеми є гілка, вузол, контур.

Гілка - це ділянка електричної схеми, вздовж якої протікає один і той же струм. Гілка може бути утворена одним або декількома елементами, з'єднаними послідовно. На наведеній схемі кілька гілок, а саме: -  $E, R_{вн}$ ; -  $R_2$ ; -  $R_3, C_1$ ; -  $R_5, L$  і т.д.

Вузол - це місце електричного з'єднання трьох і більше гілок. На схемі місце з'єднання позначають точкою. Схема, яку ми розглядаємо, має чотири вузли -  $1, 2, 3, 4$ . Гілки, підключені до однієї пари вузлів, називають паралельними; вони знаходяться під однією й тією ж напругою, або різницею потенціалів; у нашому прикладі - гілка  $C_2$  і гілка  $R_5$ .

Контур - це замкнена ділянка схеми, утворена однією або декількома гілками; досліджувана схема містить декілька контурів, наприклад, контур  $A$  - утворений гілками  $R2, C1, R3, R1$ ; контур  $B$  - гілками  $R2, C1, R4, L, C2, R1$ .

Основні закони електротехніки - закон Ома, перший та другий закони Кірхгофа.

Представимо їх зараз в найбільш загальному вигляді, з перспективою найближчим часом ретельного відпрацювання.

Отже, закон Ома встановлює зв'язок між напругою  $u$  та струмом  $i$  в опорі  $R$

$$R = \frac{u}{i} \quad (1.3)$$

Перший закон Кірхгофа, закон балансу струмів в вузлі електричного кола стверджує: „алгебраїчна сума струмів в вузлі дорівнює нулю“:

$$\sum_{k=1}^n i_k = 0, \quad (1.4)$$

де  $n = 3, 4, \dots$  - число гілок, які утворюють вузол.

Загальноприйнято вважати струми, спрямовані до вузла, додатними, а струми, що спрямовані від вузла, - відємними.

Другий закон Кірхгофа, закон балансу напруг в замкненій ділянці електричного кола: „алгебраїчна сума е.р.с. джерел в контурі дорівнює алгебраїчній сумі падінь напруги на елементах даного контуру

$$\sum_{k=1}^n e_k = \sum_{j=1}^m u_j, \quad (1.5)$$

де  $n = 0, 1, 2, \dots$  - число джерел ЕРС, включених в контур;

$m = 1, 2, \dots$  - число пасивних елементів в контурі.

Е.р.с. та падіння напруги, напрямки яких співпадають з довільно вибраним напрямком обходу контура, беруться в рівнянні з однаковими знаками. Таким чином, алгебраїчна сума напруг на гілках замкненого контуру у відповідності з другим законом Кірхгофа дорівнює нулю.

## 1.2. Символічний (комплексний) метод розрахунку електричних кіл синусоїдального струму

### 1.2.1. Синусоїдальний струм та його характеристики

Електричний струм, електричну напругу, електрорушійну силу характеризують переліком однакових понять. У зв'язку з цим домовимося надалі відомості про згадані електричні величини представляти стосовно електричного струму, пам'ятаючи, що вони можуть бути поширені на електрорушійну силу і електричну напругу.

Залежно від того, як поводить ся струм в часі, розрізняють постійний струм і змінний струм.

Постійний струм - це струм з незмінними напрямком і величиною. Традиційно постійний струм позначають літерою  $I$ .

Змінним електричним струмом називається такий струм, який змінюється в часі як за величиною, так і за напрямком. Він характеризується миттєвим значенням, тобто значенням струму в будь-який момент часу; загальноприйняте позначення -  $i(t)$ .

В електротехніці, а тим більше в радіотехніці, в телекомунікаціях основне застосування знаходить не постійний, а змінний струм; кола постійного струму в радіотехнічних пристроях застосовуються в основному для живлення електронних і напівпровідникових приладів.

Окремим випадком змінного струму є періодичний струм.

Періодичний струм - це струм, миттєве значення якого повторюється через однакові проміжки часу, тобто

$$i(t) = i(t + nT), \quad n = 1, 2, \dots$$

Мінімальний проміжок часу  $T$ , через який повторюються миттєві значення періодичного струму, називається періодом. Період вимірюють у секундах (с).

Величина, зворотна періоду, називається частотою

$$f = \frac{1}{T}.$$

Частота вимірюється в герцах (Гц),  $1 \text{ Гц} = \text{с}^{-1}$ .

Частоті в 1 Гц відповідає період  $T = 1 \text{ с}$ , тобто за одну секунду відбувається одне повне коливання.

У промислових та побутових електромережах застосовується струм з частотою 50 Гц, в радіотехніці мають справу з частотами, вимірюваними в кілогерцах ( $1 \text{ кГц} = 10^3 \text{ Гц}$ ), мегагерцах ( $1 \text{ МГц} = 10^6 \text{ Гц}$ ), гігагерцах ( $1 \text{ ГГц} = 10^9 \text{ Гц}$ ).

Закони зміни періодичного струму можуть бути різними. Одним з найпоширеніших варіантів періодичного струму є гармонічний струм, тобто струм, миттєве значення якого змінюється за законом синуса (косинуса).

Поширення гармонічного струму обумовлено рядом причин, а саме:

- способом отримання електричної енергії на електростанціях - обертання провідника в магнітному полі призводить до появи на затискачах генератора електрорушійної сили синусоїдальної форми;

- способом формування коливань з використанням коливальних контурів в електронних генераторах;

- гармонічні коливання лежать в основі класичного спектрального представлення періодичних негармонічних процесів, а саме, коливання будь-якої форми можна представити сумою гармонічних коливань;

- гармонічні коливання являють собою єдиний вид коливань, які проходячи через лінійні кола не зазнають змін форми. Це обумовлено властивостями гармонічних функцій - в результаті лінійних операцій над цими функціями (множення на постійне число, алгебраїчне додавання, диференціювання, інтегрування) отримують гармонічні функції тієї ж частоти з новими значеннями амплітуди і початкової фази.

Зобразимо графік часової залежності гармонічного, зокрема, синусоїдального струму (рис. 1.7)

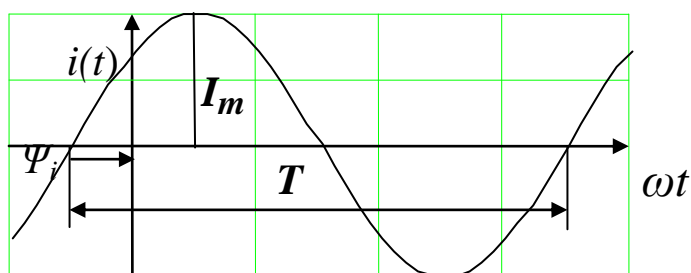


Рис. 1.7

Миттєве значення гармонічного струму представляє наступне співвідношення

$$i(t) = I_m \sin(\omega t + \psi_i),$$

де  $I_m$  - амплітуда, або максимальне значення, струму;

$\omega$  - кутова частота коливань; одиниця виміру "радіан / с" (1 / с). Кутова частота пов'язана з лінійною частотою співвідношенням

$$\omega = 2\pi f ;$$

$\psi_i$  - початкова фаза коливання; одиниця виміру - радіан (градус).

Початкова фаза визначає величину струму в початковий момент відліку часу, тобто при  $t = 0$ ; початкова фаза може мати додатне значення (кажуть про "випередження по фазі") або від'ємне ("запізнювання по фазі"), у відповідності зі знаком синуса при  $t = 0$ ;

$\Phi(t) = \omega t + \psi_i$  - миттєва фаза коливання; визначає струм в будь-який момент часу, вимірюється, як і початкова фаза, в градусах або радіанах.

Якщо в одному колі порівнюють два або кілька гармонічних коливань однакової частоти, але з різними початковими фазами, то говорять про "фазовий зсув" цих коливань або, що коливання зміщені по фазі. Зміщення фаз (фазовий зсув) двох коливань  $\Delta\psi$  - є алгебраїчна величина, що дорівнює різниці початкових фаз. Величина  $\Delta\psi$  може бути довільною. Зазвичай, враховуючи періодичність коливань, різницю фаз обмежують границями  $-\pi \leq \Delta\psi \leq \pi$ .

Різниця початкових фаз є визначальним фактором при додаванні (інтерференції) коливань однакової частоти. При цьому можливі три характерних випадки:

- синфазні коливання, коли  $\Delta\psi = 2\pi n$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ ;

- квадратурні коливання, коли  $\Delta\psi = \pm \frac{\pi}{2}$ ;

- протифазні коливання, коли  $\Delta\psi = \pm \pi$ .

При аналізі властивостей кіл важливим параметром є зміщення фаз між напругою і струмом в елементі, гілці, на певній ділянці кола

$$\varphi = \psi_u - \psi_i .$$

Якщо  $\varphi > 0$ , то напруга випереджає по фазі струм ( $\psi_u > \psi_i$ );

Якщо  $\varphi < 0$ , то напруга відстає по фазі від струму ( $\psi_u < \psi_i$ ).

До силових характеристик синусоїдального струму, крім амплітуди, відносяться діюче і середнє значення.

Діюче значення  $I$  синусоїдального струму  $i(t)$  чисельно дорівнює значенню такого постійного струму, який при проходженні через опір  $R$  протягом періоду  $T$  виділяє таку ж кількість енергії, як і струм  $i(t)$ .

Діюче значення обчислюють як середньоквадратичне значення функції, а саме

$$I = \sqrt{\frac{1}{T} \cdot \int_0^T [i(t)]^2 dt} = \sqrt{\frac{1}{T} \cdot \int_0^T I_m^2 \sin^2(\omega t + \psi_i) dt} = \frac{I_m}{\sqrt{2}} \approx 0.707 \cdot I_m \quad (1.6)$$

Більшість електротехнічних вимірювальних приладів показують саме діючі значення вимірюваних величин.

Середнє за період значення  $I_{cp}$  синусоїдального струму

$$I_{cp} = \frac{1}{T} \cdot \int_0^T I_m \sin(\omega t + \psi_i) dt = 0. \quad (1.7)$$

Середньовипрямлене  $I_{cpe}$ , або середнє за половину періоду, значення синусоїдального струму

$$I_{cpe} = \frac{2}{T} \cdot \int_0^{T/2} I_m \sin(\omega t + \psi_i) dt = \frac{2}{\pi} \cdot I_m \approx 0.637 \cdot I_m. \quad (1.8)$$



Нагадаємо, розглянуті параметри синусоїдального струму використовують також для характеристики гармонічних напруги і електрорушійної сили.

### 1.2.2. Представлення гармонічних коливань векторами, що обертаються, і комплексними числами

Представляти гармонічні коливання можна не тільки за допомогою тригонометричних функцій, а й через проєкції на координатні вісі прямокутної системи координат векторів, що обертаються, а також комплексними числами.

Відомо, що гармонічне коливання з частотою  $\omega$  символічно можна представити за допомогою вектора, який обертається з круговою частотою  $\omega$  в прямокутній системі координат. Обертання вектора відповідає зміні фази коливання в часі. Dodatнім напрямком вважається обертання вектора проти годинникової стрілки. Миттєвому значенню фази коливання відповідає кут між віссю дійсних величин і вектором.

При цьому проєкція вершини вектора на вертикальну вісь в будь-який момент часу дорівнює миттєвому значенню синусоїдального струму, а проєкція вершини цього вектора на горизонтальну вісь - миттєвому значенню косинусоїдального струму (Рис. 1.8).

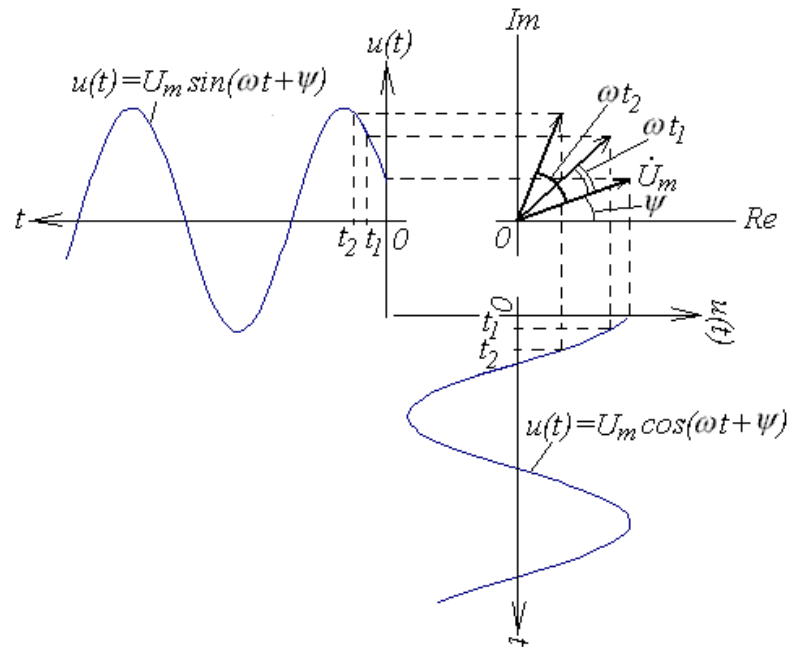


Рис. 1.8

Векторне представлення гармонічних коливань в порівнянні з їх поданням через тригонометричні функції при розрахунках обумовлює ряд переваг.

Перенесення прямокутної системи координат на комплексну площину з вісями дійсних (горизонтальна вісь) і уявних (вертикальна вісь) величин, дозволяє будь-якому вектору, що обертається, а, отже, гармонічному коливанню, поставити у відповідність комплексне число, модуль якого дорівнює амплітуді коливання, а аргумент - його фазі.

Отже, гармонічному струму  $i(t)$  відповідає комплексний миттєвий струм  $\dot{I}_m(t)$ , тобто

$$i(t) \doteq \dot{I}_m(t). \quad (1.9)$$

При цьому,  $\dot{I}_m(t) = i'(t) + ji''(t) = I_m \cos(\omega t + \psi_i) + jI_m \sin(\omega t + \psi_i)$ , тобто синусоїдальний струм дорівнює уявній складовій комплексного струму

$$i(t) = I_m \sin(\omega t + \psi_i) = \mathbf{Jm}[\dot{I}_m(t)],$$

а косинусоїдальний струм - дійсній складовій

$$i(t) = I_m \cos(\omega t + \psi_i) = \mathbf{Re}[\dot{I}_m(t)].$$

Використовуючи формулу Ейлера  $e^{j\varphi} = \cos\varphi + j\sin\varphi$ , алгебраїчну і тригонометричну форму комплексного числа можна представити у показниковій формі:

$$\dot{I}_m(t) = I_m e^{j(\omega t + \psi_i)}. \quad (1.10)$$

Таким чином, комплексний миттєвий струм (комплексне миттєве значення гармонічного струму) - це комплексне число, модуль якого дорівнює амплітуді, а аргумент - миттєвій фазі гармонічного струму.

Скористаємося показниковою формою представлення комплексного миттєвого струму і здійснимо ряд очевидних перетворень

$$\dot{I}_m(t) = I_m e^{j(\omega t + \psi_i)} = I_m e^{j\psi_i} e^{j\omega t} = \dot{I}_m e^{j\omega t},$$

де  $e^{j\omega t}$  - оператор обертання; (1.11)

$$\dot{I}_m = I_m e^{j\psi_i} \text{ - комплексна амплітуда струму.} \quad (1.12)$$

Комплексна амплітуда гармонічного струму - це комплексне число, модуль якого дорівнює амплітуді коливання, а аргумент - його початковій фазі.

Перехід від амплітуди до діючого значенням дає ще один різновид комплексних зображень - комплексне діюче значення гармонічного струму, або комплексний струм

$$I = \frac{\dot{I}_m}{\sqrt{2}} = I \cdot e^{j\psi_i}. \quad (1.13)$$

Комплексне діюче значення гармонічного струму - це комплексне число, модуль якого дорівнює діючому значенню коливання, а аргумент - початковій фазі.

Наведені різновиди комплексних зображень гармонічного струму можуть бути поширені і на інші електричні величини - напругу і електрорушійну силу.

### 1.2.3. Часові і векторні діаграми

Процеси в електричних колах досить зручно аналізувати з використанням діаграм. Використовують два види діаграм - часові і векторні.

Часовою діаграмою називають графіки часової залежності електричних величин, побудовані в прямокутній системі координат.

Як приклад, на рисунку 1.9 представлена часова діаграма двох гармонічних функцій:

$$\text{напруги} \quad u(t) = 5 \cdot \sin(2\pi \cdot 10^3 \cdot t + 45^\circ), \text{ В та}$$

$$\text{струму} \quad i(t) = 0.5 \cdot \sin(2\pi \cdot 10^3 \cdot t - 45^\circ), \text{ А.}$$

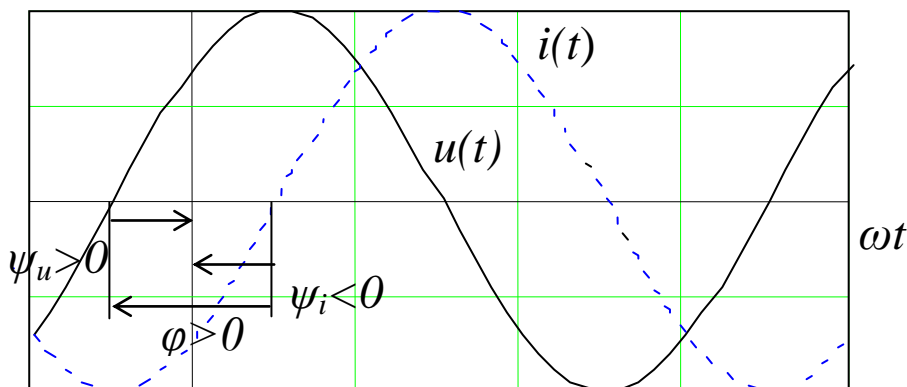


Рис. 1.9

Початкова фаза на діаграмі визначає зміщення нуля синусоїди, або максимуму косинусоїди відносно початку координат (початку спостереження), тобто  $t = 0$ . Відлік початкової фази здійснюють уздовж вісі  $\omega t$  в напрямку до початку координат. Якщо напрямок відліку збігається з додатнім напрямком вісі, початкова фаза - додатня, має місце випередження по фазі; якщо напрямок відліку протилежний, початкова фаза - від'ємна, має місце відставання по фазі. Відлік фазового зсуву між напругою і струмом  $\varphi = \psi_u - \psi_i$  здійснюють від "нуля" напруги до "нуля" струму. Якщо напрямок відліку збігається з додатнім напрямком вісі  $\omega t$ , різниця початкових фаз напруги та струму додатня,  $\varphi > 0$ , тобто напруга випереджає по фазі струм. Якщо напрямок відліку протилежний, напруга відстає по фазі від струму.

У наведеному на рис.1.9 прикладі

$$\varphi = \psi_u - \psi_i = 45^\circ - (-45^\circ) = 90^\circ,$$

тобто напруга випереджає струм на кут  $90^\circ$ .

Часові діаграми досить наочні, але зі збільшенням числа графіків будувати і досліджувати їх стає все складніше. У таких випадках доцільно користуватися векторними діаграмами.

Векторною діаграмою називається сукупність зображуючих гармонічні коливання векторів, побудованих на комплексній площині з дотриманням їх взаємної орієнтації по фазі. Довжина векторів з урахуванням масштабу відповідає амплітуді або діючому значенню відповідного коливання. Кутове положення векторів відносно горизонтальної вісі визначається початковими фазами коливань, при цьому додатні значення кутів відраховуються в напрямку, протилежному напрямку руху годинникової стрілки.

Як правило, вектори на векторній діаграмі зображують для моменту часу  $t = 0$ . Залежність процесів від часу формально відображається обертанням всієї векторної діаграми назустріч годинниковій стрілці з кутовою частотою  $\omega$ .

Фазовий зсув між напругою і струмом відраховують від вектора, який зображує струм, до вектора, який зображує напругу. Якщо напрямок відліку збігається з додатнім напрямком обертання векторів, то фазовий зсув - додатній, тобто  $\varphi > 0$ , напруга випереджає по фазі струм, в іншому випадку - навпаки.

Представлений на рис. 1.9 часової діаграмі відповідає векторна діаграма, побудована на наступному рисунку (рис. 1.10)

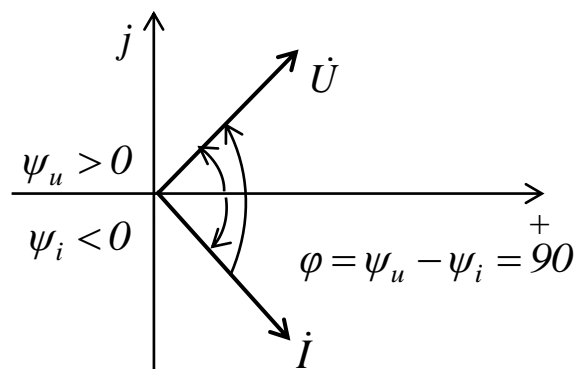


Рис.1.10

#### 1.2.4. Поняття про розрахунок електричного кола

Якщо на коло діє зовнішній вплив, наприклад, підключається джерело напруги, то на її елементах з'явиться відгук (реакція) на цей вплив у вигляді струмів і падінь напруги на елементах та ділянках кола.

Задача розрахунку (аналізу) кола полягає у визначенні цих відгуків і, отже, розрахувати коло - значить визначити струми і напруги на кожному його елементі. В окремому випадку можуть визначатися тільки окремі струми і напруги.

Для розрахунку струмів і напруг складають рівняння (системи рівнянь), що зв'язують струми і напруги в елементах і ділянках кола. Число рівнянь у системі визначається числом невідомих струмів (напруг).

Рівняння, що описують процеси в колі, складаються у відповідності з основними законами електротехніки - законом Ома і законами Кірхгофа - першим і другим.

### 1.2.5. Сутність символічного методу (методу комплексних амплітуд) розрахунку електричних кіл синусоїдального струму

Розрахунки електричних кіл синусоїдального струму, коли гармонічні величини представлені в тригонометричній формі або графічно у вигляді часових діаграм, застосовується на практиці тільки у випадку простих схем. З ускладненням схем тригонометричні і графічні розрахунки стають вкрай скрутні. Необхідний метод, що дозволяє розраховувати кола змінного струму алгебраїчно, аналогічно колам постійного струму.

Таким зручним розрахунковим методом є символічний метод (*метод комплексних амплітуд, або комплексний метод*). В основі методу лежить представлення гармонічних коливань їх комплексними зображеннями, комплексними числами. При цьому, в розрахунках громіздкі операції з тригонометричними функціями замінюються більш простими операціями з комплексними числами, зокрема, спрощуються операції диференціювання та інтегрування зображень

$$\frac{d}{dt} e^{j\omega t} = j\omega e^{j\omega t}; \quad \int e^{j\omega t} dt = \frac{1}{j\omega} e^{j\omega t},$$

тобто диференціюванню комплексного зображення в часі відповідає множення його на  $j\omega$ , а інтегруванню - ділення його на  $j\omega$ .

Метод вдало поєднує аналітичні розрахунки з геометричними інтерпретаціями, адже залучення векторних діаграм забезпечує розрахунку та аналізу наочність.

Комплексний метод відноситься до символічних методів розрахунку.

Розв'язання будь-якої задачі комплексним методом складається з трьох етапів:

- пряме перетворення: від вихідних (заданих) тригонометричних функцій (оригіналів) переходять до їх комплексним зображень (символів). Умовно цю дію позначають знаком відповідності

$$\dot{I}_m(t) \doteq i(t); \quad \dot{U}_m(t) \doteq u(t); \quad \dot{E}_m(t) \doteq e(t);$$

- визначення (розрахунок) комплексних зображень шуканих струмів і напруг в колі шляхом розв'язання рівнянь або систем рівнянь, складених відносно комплексних зображень невідомих величин;

- зворотне перетворення, коли від знайдених комплексних зображень шуканих величин переходять до оригіналів, тобто комплексні функції замінюють тригонометричними, використовуючи формулу Ейлера

$$i(t) \doteq \dot{I}_m(t); \quad u(t) \doteq \dot{U}_m(t); \quad e(t) \doteq \dot{E}_m(t).$$

З усіх різновидів комплексних зображень найбільш зручно при розрахунках використовувати комплексні діючі значення гармонічних функцій - це забезпечує найбільш компактний варіант запису.

При переході до оригіналів для відновлення ознак часової залежності розраховані на другому етапі зображення шуканих величин множать на оператор обертання  $e^{j\omega t}$ , а перехід до амплітудних значень забезпечують множенням їх на коефіцієнт  $\sqrt{2}$ .

Комплексний метод є методом, який регламентує способи подання елементів схем і діючих у них електричних величин, в цьому сенсі він об'єднує всі відомі методи розрахунку електричних кіл.

Недоліком методу є можливість його застосування тільки для кіл гармонічного струму.

### 1.2.6. Комплексний опір і комплексна провідність

Опір змінному струму чинять всі пасивні елементи, але природа цього ефекту різна. Опір ідеального резистора (опору) називають активним, так як він споживає енергію, перетворюючи її в інші види.

Опори ідеальних котушки індуктивності і конденсатора (індуктивності та ємності відповідно) називають реактивними тому, що ці елементи запасують енергію і за певних умов можуть віддавати її в зовнішнє коло (без перетворення).

Всі реальні пристрої і кола мають і активний, і реактивний опори. Цей факт при розрахунку електричного кола комплексним методом відбивається введенням поняття "комплексний опір".

Розглянемо електричне коло у вигляді пасивного двохполюсника, перейдемо від миттєвих значень напруги і струму, що діють в колі, до комплексних зображень (рис. 1.11)

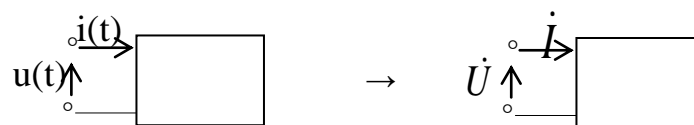


Рис. 1.11

Комплексний опір  $Z$  - це відношення комплексної напруги до комплексного струму, що діють на елементі або ділянці електричного кола

$$Z = \frac{\dot{U}}{\dot{I}} = \frac{U}{I} e^{j(\psi_u - \psi_i)}. \quad (1.15)$$

Використовують три форми подання комплексного опору - показову, тригонометричну, алгебраїчну:

$$Z = z e^{j\varphi} = z \cos \varphi + jz \sin \varphi = r + jx.$$

Тут  $z = \frac{U}{I} = \sqrt{r^2 + x^2}$  - модуль комплексного опору, або повний опір; (1.16)

$$\varphi = \psi_u - \psi_i = \arctg \frac{x}{r} \quad (1.17)$$

- аргумент комплексного опору, або зсув фаз між напругою і струмом;

$$r = z \cos \varphi - \text{активний опір}; \quad (1.18)$$

$$x = z \sin \varphi - \text{реактивний опір}. \quad (1.19)$$

Одиниці вимірювань складових  $Z$ ,  $r$ ,  $x$  - Ом;  $\varphi$  - Радіан (градус).

Комплексна провідність  $Y$  - величина, зворотна комплексному опору, тобто - це відношення комплексного струму до комплексної напруги .

$$Y = \frac{\dot{I}}{\dot{U}} = \frac{I}{U} e^{j(\psi_i - \psi_u)}. \quad (1.20)$$

За аналогією з комплексним опором форми представлення комплексної провідності

$$Y = ye^{-j\varphi} = y\cos\varphi + jy\sin\varphi = g - jb,$$

де  $y = \frac{I}{U} = \sqrt{g^2 + b^2}$  - модуль комплексної провідності, або повна провідність; (1.21)

$$\varphi = \psi_u - \psi_i = \mathbf{arctg} \frac{b}{g} \quad (1.22)$$

- аргумент комплексної провідності, або зсув фаз між напругою і струмом;

$$g = y\cos\varphi \text{ - активна провідність;} \quad (1.23)$$

$$b = y\sin\varphi \text{ - реактивна провідність.} \quad (1.24)$$

Одиниця виміру складових  $y$ ,  $g$ ,  $b$  - Сіменс (См).

Встановимо зв'язок між компонентами комплексного опору  $Z$  і комплексної провідності  $Y$

$$Y = \frac{1}{Z} = \frac{1}{r + jx} \cdot \frac{r - jx}{r - jx} = \frac{r}{r^2 + x^2} - j \frac{x}{r^2 + x^2} = g - jb;$$

отже,

$$g = \frac{r}{r^2 + x^2} = \frac{r}{z^2}; \quad b = \frac{x}{r^2 + x^2} = \frac{x}{z^2}. \quad (1.25)$$

Аналогічно

$$Z = \frac{1}{Y} = \frac{1}{g - jb} \cdot \frac{g + jb}{g + jb} = \frac{g}{g^2 + b^2} + j \frac{b}{g^2 + b^2} = r + jx;$$

отже,

$$r = \frac{g}{g^2 + b^2} = \frac{g}{y^2}; \quad x = \frac{b}{g^2 + b^2} = \frac{b}{y^2}. \quad (1.26)$$

Комплексні опір і провідність, а також їх компоненти можуть бути представлені векторними діаграмами на комплексній площині (рис. 1.12)

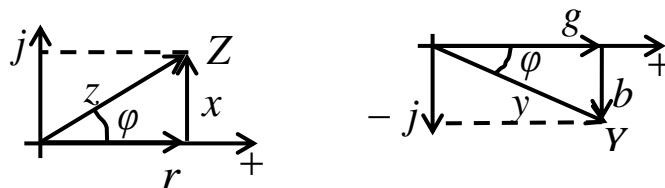


Рис. 1.12

Отримані в результаті побудови діаграми носять назви відповідно "трикутник опорів" і "трикутник провідностей".

### 1.2.7. Закон Ома і закони Кірхгофа в комплексній формі

Раніше ми зауважили, що закон Ома в дійсній формі - найпростіший варіант, справедливий тільки для активного опору. Представимо ще два різновиди формули

$$i = \frac{u}{R} = g \cdot u \quad \text{або} \quad u = i \cdot R = \frac{i}{g}.$$

Замінюючи в попередніх формулах оригінали електричних величин комплексними зображеннями, а активний опір комплексним, отримаємо варіанти запису закону Ома в комплексній формі

$$\dot{I}_m(t) = \frac{\dot{U}_m(t)}{Z(j\omega)} = \dot{U}_m(t) \cdot Y(j\omega); \quad \dot{U}_m(t) = \dot{I}_m(t) \cdot Z(j\omega) = \frac{\dot{I}_m(t)}{Y(j\omega)}; \quad (1.27)$$

$$\dot{I}_m = \frac{\dot{U}_m}{Z(j\omega)} = \dot{U}_m \cdot Y(j\omega); \quad \dot{U}_m = \dot{I}_m \cdot Z(j\omega) = \frac{\dot{I}_m}{Y(j\omega)}; \quad (1.28)$$

$$\dot{I} = \frac{\dot{U}}{Z(j\omega)} = \dot{U} \cdot Y(j\omega); \quad \dot{U} = \dot{I} \cdot Z(j\omega) = \frac{\dot{I}}{Y(j\omega)}. \quad (1.29)$$

Наведені співвідношення справедливі для будь-якого лінійного пасивного елемента, а також для електричного кола (ділянки кола) з довільним з'єднанням таких елементів.

Перший закон Кірхгофа - закон балансу струмів - стверджує: алгебраїчна сума миттєвих значень струмів у вузлі електричного кола дорівнює нулю

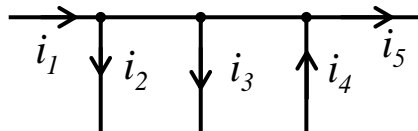
$$\sum_{k=1}^n \dot{i}_k = 0,$$

де  $n = 3, 4, \dots$  - число гілок, які утворюють вузол.

Струми, спрямовані до вузла, враховують зі знаком "плюс", струми, спрямовані від вузла, - зі знаком "мінус". Отже, сума струмів, спрямованих до вузла, дорівнює сумі струмів, які спрямовані від вузла.

Приклад.

Визначити баланс струмів для наведеного на схемі вузла електричного кола



Відповідно до першого закону Кірхгофа

$$\dot{i}_1 + \dot{i}_4 = \dot{i}_2 + \dot{i}_3 + \dot{i}_5.$$

Рівняння, складені за першим законом Кірхгофа, називаються вузловими рівняннями.

Відомо, що додаванню гармонічних функцій відповідає додавання їх комплексних зображень. На цій підставі від дійсної форми першого закону Кірхгофа перейдемо до комплексної форми, зокрема, для комплексних амплітуд струмів

$$\sum_{k=1}^n \dot{I}_{mk} = 0. \quad (1.30)$$

Отже, алгебраїчна сума комплексних струмів у вузлі електричного кола дорівнює нулю.

Аналогічно можна записати вираз для комплексних миттєвих значень і комплексних діючих значень струмів.

Другий закон Кірхгофа - закон балансу напруг - стверджує: алгебраїчна сума миттєвих значень напруги на пасивних елементах контуру електричного кола дорівнює алгебраїчній сумі миттєвих значень ЕРС джерел, які містить цей контур

$$\sum_{k=1}^n e_k = \sum_{j=1}^m u_j ,$$

де  $n = 0, 1, 2, \dots$  - число джерел ЕРС, включених в контур;

$m = 1, 2, \dots$  - число пасивних елементів в контурі.

Рівняння, складені за другим законом Кірхгофа, називаються контурними рівняннями.

Для складання контурних рівнянь вибирають довільно напрямок обходу контуру. ЕРС джерел, а також падіння напруги на елементах враховують в рівнянні зі знаком "плюс", якщо їх напрям (полярність) збігається з напрямом обходу контуру, і зі знаком мінус, якщо ці напрямки не збігаються.

Перехід від оригіналів ЕРС і падінь напруги до їх комплексних зображень призводить до другого закону Кірхгофа в комплексній формі, зокрема, для комплексних амплітуд

$$\sum_{k=1}^n \dot{E}_{mk} = \sum_{j=1}^m \dot{U}_{mj} . \tag{1.31}$$

Отже, в будь-якому контурі електричного кола алгебраїчна сума комплексних зображень ЕРС джерел дорівнює алгебраїчній сумі комплексних зображень падінь напруги на пасивних елементах.

Формулу другого закону Кірхгофа Аналогічно можна записати для комплексних миттєвих значень і комплексних діючих значень ЕРС і падінь напруги.

### 1.2.7. Комплексна схема заміщення електричного кола

Розрахунок електричного кола символічним методом передбачає складання комплексної схеми заміщення.

Комплексна схема заміщення електричного кола - це схема, в якій всі пасивні елементи кола представлені комплексними опорами або комплексними провідностями, а всі струми і напруги, включаючи джерела енергії, представлені відповідними комплексними зображеннями.

На рис. 1.13 наведено приклад переходу від вихідної схеми кола до комплексної схеми заміщення

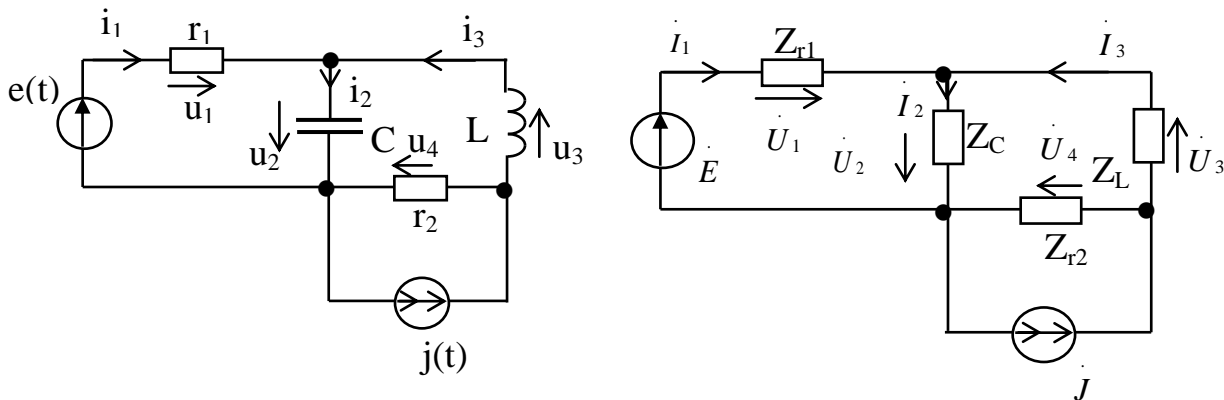


Рис. 1.13



### 1.2.9. Потужність в колі синусоїдального струму

Для визначення та оцінки енергетичних характеристик електричних кіл гармонічного струму використовується ряд понять.

Миттєва потужність - добуток миттєвих значень напруги та струму:

$$p(t) = u(t)i(t). \quad (1.32)$$

Для кіл синусоїдального струму

$$p(t) = U_m \sin \omega t \cdot I_m \sin (\omega t - \varphi) = UI \cos \varphi - UI \cos (2\omega t - \varphi). \quad (1.33)$$

Таким чином, миттєва потужність містить постійну складову і складову, яка змінюється з подвоєною частотою джерела.

Поняття потужності в колах змінного струму неоднозначне. У зв'язку з тим, що напруга і струм в навантаженні в загальному випадку зміщені по фазі, частина потужності, що віддається джерелом в навантаження, повертається в джерело назад. Цей факт при розрахунках кіл формально враховується шляхом використання поняття „комплексна потужність“.

Комплексною потужністю називається добуток комплексного діючого значення напруги і супряженого комплексного діючого значення струму:

$$\dot{P}_S = \dot{U}\dot{I} = Ue^{j\psi_u} Ie^{-j\psi_i} = P_S e^{j\varphi} = P_S \cos \varphi + jP_S \sin \varphi = P + jP_Q. \quad (1.34)$$

Повна потужність - це модуль комплексної потужності

$$P_S = \sqrt{P^2 + P_Q^2} = UI. \quad (1.35)$$

Повна потужність показує, яку потужність може віддати джерело в навантаження з чисто активним опором, тобто при синфазних в навантаженні напрузі і струмі. Вимірюється повна потужність в вольт-амперах (ВА). Це значення потужності вказується на щитках джерел електричної енергії в системах змінного струму.

Активна потужність - це дійсна частина комплексної потужності

$$P = P_S \cos \varphi = UI \cos \varphi. \quad (1.36)$$

Активна потужність характеризує роботу, яка відбувається в електричному колі. Для її розрахунку можна скористатися наступними співвідношеннями:

$$P = \frac{U^2}{Z} \cos \varphi = I^2 z \cos \varphi = RI^2; \quad (1.37)$$

$$P = \frac{I^2}{y} \cos \varphi = U^2 y \cos \varphi = GU^2, \quad (1.38)$$

де  $Z$  - повний опір навантаження;

$R$  - активний опір навантаження;

$y$  - повна провідність навантаження;

$G$  - активна провідність навантаження.

Активна потужність вимірюється у ватах (Вт).

Активна потужність - це середня за період коливань миттєва потужність. Насправді,

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T p(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T [UI \cos \varphi - UI \cos (2\omega t - \varphi)] dt = UI \cos \varphi. \quad (1.39)$$

Реактивна потужність - це уявна частина комплексної потужності

$$P_Q = UI \sin \varphi = P_S \sin \varphi. \quad (1.40)$$

Реактивна потужність характеризує потужність, яка запасується в реактивних елементах електричного кола і може повертатися в джерело. При цьому робота в колі не відбувається.

Для розрахунку реактивної потужності можна скористатися наступними співвідношеннями:

$$P_Q = \frac{U^2}{z} \sin \varphi = I^2 z \sin \varphi = XI^2; \quad (1.41)$$

$$P_Q = \frac{I^2}{y} \sin \varphi = U^2 y \sin \varphi = BU^2, \quad (1.42)$$

де  $z$  - повний опір навантаження;

$X$  - реактивний опір навантаження;

$y$  - повна провідність навантаження;

$B$  - реактивна провідність навантаження.

Реактивна потужність вимірюється в вольт - амперах реактивних (вар).

У багатьох випадках реактивна потужність, яка присутня в колі, небажана, її прагнуть зменшити.

У промислових мережах ступінь використання повної потужності оцінюють коефіцієнтом потужності, рівним відношенню активної потужності до повної:

$$\cos \varphi = \frac{P}{P_S}. \quad (1.43)$$

Як правило, намагаються забезпечити коефіцієнт потужності, близький до одиниці, при цьому реактивна потужність в колі прагне до нуля.