

4. Комплексні функції та частотні характеристики лінійних електричних кіл

4.1. Комплексна функція: визначення, класифікація

Комплексною функцією (комплексною частотною характеристикою) лінійного електричного кола, яке не містить незалежних джерел енергії, називається відношення комплексного зображення реакції (вихідної величини) до комплексного зображення зовнішньої дії (вхідної величини) в усталеному режимі.

$$K(j\omega) = \frac{\dot{X}_m(t)}{\dot{F}_m(t)} = \frac{\dot{X}_m}{\dot{F}_m} = \frac{\dot{X}}{\dot{F}} = \frac{X \cdot e^{j\psi_X}}{F \cdot e^{j\psi_F}}, \quad (4.1)$$

де: $\dot{X}_m(t)$, \dot{X}_m , \dot{X} - комплексне миттєве значення, комплексна амплітуда, комплексне діюче значення (відповідно) реакції;

$\dot{F}_m(t)$, \dot{F}_m , \dot{F} - Аналогічні комплексні зображення зовнішньої дії;

ψ_X - початкова фаза реакції;

ψ_F - початкова фаза впливу.

Домовимося надалі в якості комплексних зображень струмів і напруг використовувати їх комплексні діючі значення.

Комплексні функції в теорії електричних кіл, зокрема в частотному аналізі, представляють важливий інструмент. В подальшому ми переконаємося, що комплексна функція, з одного боку, сама по собі містить відомості про частотні властивості кола, з іншого боку, дозволяє визначити реакцію кола на довільну гармонічну дію, тобто

$$\dot{X} = \dot{F} \cdot K(j\omega).$$

Комплексні функції прийнято класифікувати за наступними ознаками.

Залежно від місця визначення реакції комплексні функції поділяють на вхідні та передавальні.

Вхідна комплексна функція - відношення комплексних зображень реакції і дії, якщо реакція розглядається на вході, тобто на ділянці кола, де прикладена зовнішня дія.

Передавальна комплексна функція - відношення комплексних зображень реакції і дії, якщо реакція розглядається на виході кола.

Передавальна функція характеризує "передачу" кола.

Залежно від того, які електричні величини розглядаються в якості вхідних і вихідних, передавальні комплексні функції поділяють на комплексні коефіцієнти передачі, комплексні передавальні опір і провідність.

Представимо лінійне електричне коло, що не містить незалежні джерела, в загальному вигляді і позначимо на виділених вхідних і вихідних затискачах струми і напруги (рис. 4.1). Розглядаючи різні варіанти дії і реакції, перерахуємо різновиди комплексних функцій.

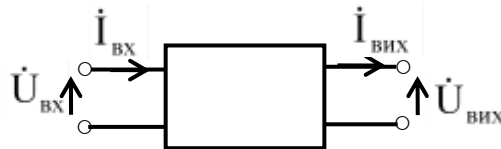


Рис. 4.1.

Комплексна вхідна провідність

$$Y_{вх} = \frac{\dot{I}_{вх}}{\dot{U}_{вх}} = \frac{I_{вх}}{U_{вх}} \cdot e^{j(\psi_i - \psi_u)} \quad (4.2)$$

Комплексний вхідний опір

$$Z_{вх} = \frac{\dot{U}_{вх}}{\dot{I}_{вх}} = \frac{U_{вх}}{I_{вх}} \cdot e^{j(\psi_u - \psi_i)} \quad (4.3)$$

Комплексний коефіцієнт передачі напруги

$$K_U(j\omega) = \frac{\dot{U}_{вых}}{\dot{U}_{вх}} = \frac{U_{вых}}{U_{вх}} \cdot e^{j(\psi_{u_{вых}} - \psi_{u_{вх}})} \quad (4.4)$$

Комплексний коефіцієнт передачі струму

$$K_I(j\omega) = \frac{\dot{I}_{вых}}{\dot{I}_{вх}} = \frac{I_{вых}}{I_{вх}} \cdot e^{j(\psi_{i_{вых}} - \psi_{i_{вх}})} \quad (4.5)$$

Комплексна передавальна провідність

$$Y_{пер}(j\omega) = \frac{\dot{I}_{вых}}{\dot{U}_{вх}} = \frac{I_{вых}}{U_{вх}} \cdot e^{j(\psi_{i_{вых}} - \psi_{u_{вх}})} \quad (4.6)$$

Комплексний передавальний опір

$$Z_{пер}(j\omega) = \frac{\dot{U}_{вых}}{\dot{I}_{вх}} = \frac{U_{вых}}{I_{вх}} \cdot e^{j(\psi_{u_{вых}} - \psi_{i_{вх}})} \quad (4.7)$$

4.2. Частотні характеристики

Відповідно до загальних властивостей комплексних чисел будь-яка з наведених вище комплексних функцій може бути представлена в показниковій і алгебраїчній формах

$$K(j\omega) = K(\omega) \cdot e^{j\Phi(\omega)} = A(\omega) + jB(\omega),$$

де: $K(\omega) = \text{mod}[K(j\omega)] = \sqrt{[A(\omega)]^2 + [B(\omega)]^2}$ - модуль комплексної функції;

$$\Phi(\omega) = \text{arg}[K(j\omega)] = \text{arctg} \frac{B(\omega)}{A(\omega)} \quad \text{- аргумент комплексної функції;}$$

$A(\omega) = \text{Re}[K(j\omega)] = K(\omega) \cdot \cos\Phi(\omega)$ - дійсна частина комплексної функції;

$B(\omega) = \text{Im}[K(j\omega)] = K(\omega) \cdot \sin\Phi(\omega)$ - уявна частина комплексної функції.

Кожен компонент комплексної функції, будучи функцією частоти, характеризує певні частотні властивості кола, тобто визначає певну частотну характеристику.

Введемо поняття частотних характеристик кіл.

Амплітудно-частотна характеристика (АЧХ) - залежність від частоти модуля комплексної функції

$$K(\omega) = \frac{X}{F} \quad (4.8)$$

АЧХ відображає зміну співвідношення між амплітудами (діючими значеннями) вихідного і вхідного коливань при зміні частоти вхідного.

Фазо-частотна характеристика (ФЧХ) - залежність від частоти аргументу комплексної функції:

$$\Phi(\omega) = \psi_X - \psi_F \quad (4.9)$$

ФЧХ показує зміну початкової фази коливання на виході ланцюга щодо початкової фази коливання на вході при зміні частоти вхідного коливання.

Матеріальна частотна характеристика (ВЧХ) - залежність від частоти дійсної частини комплексної функції.

Уявна частотна характеристика (МЧХ) - залежність від частоти уявної частини комплексної функції.

Названі пари частотних характеристик графічно зображують у прямокутній системі координат.

У зв'язку з тим, що комплексна функція об'єднує амплітудно-частотну і фазо-частотну, а також дійсну частотну і уявну частотну характеристики, вона може розглядатися як амплітудно-фазова характеристика. Графік амплітудно-фазової характеристики будується на комплексній площині.

4. 3. Розрахунок комплексних функцій

Розрахунок комплексних функцій простих кіл може бути виконаний безпосередньо за законами Ома і Кірхгофа.

Проілюструємо порядок розрахунку комплексних функцій простих кіл на прикладі дільника напруги.

Еквівалентна комплексна схема кола представлена на рис.4.2

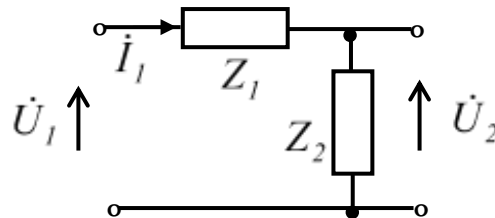


Рис. 4.2

Запишемо вирази, які визначають комплексні функції:
вхідна провідність

$$Y_{ex}(j\omega) = \frac{\dot{I}_1}{\dot{U}_1} = \frac{\dot{U}_1}{(Z_1 + Z_2) \cdot \dot{U}_1} = \frac{1}{Z_1 + Z_2}; \quad (4.10)$$

вхідний опір

$$Z_{ex}(j\omega) = \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_1} = \frac{\dot{U}_1 (Z_1 + Z_2)}{\dot{U}_1} = Z_1 + Z_2; \quad (4.11)$$

коефіцієнт передачі напруги

$$K_U(j\omega) = \frac{\dot{U}_2}{\dot{U}_1} = \frac{\dot{I}_1 \cdot Z_2}{\dot{U}_1} = \frac{\dot{U}_1 \cdot Z_2}{(Z_1 + Z_2) \cdot \dot{U}_1} = \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2} \quad (4.12)$$

та ін.

У разі розгалужених (складних) кіл для розрахунку струмів і напруг, що входять до складу комплексних функцій, використовують відомі універсальні методи розрахунку, зокрема, метод контурних струмів і метод вузлових напруг.

Розрахунок комплексних функцій методом контурних струмів

Представимо електричне коло комплексною еквівалентною схемою в загальному вигляді, виділимо в ній в якості незалежних контурів - вхідний, в якому включене джерело (дія), і вихідний, в якому включене навантаження і реєструється реакція, (рис.4.3).

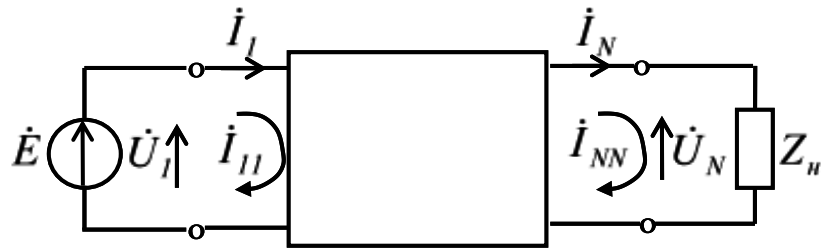


Рис. 4.3

Система контурних рівнянь в загальному випадку має вигляд:

$$\begin{vmatrix} Z_{11} & Z_{12} & \dots & Z_{1N} \\ Z_{21} & Z_{22} & \dots & Z_{2N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ Z_{N1} & Z_{N2} & \dots & Z_{NN} \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{I}_2 \\ \dots \\ \dot{I}_N \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dot{U}_1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{vmatrix} \quad (4.13)$$

Визначаючи через параметри матриць струм в першому (вхідному) контурі

$$\dot{I}_1 = \dot{U}_1 \cdot \frac{\Delta_{11}}{\Delta},$$

струм в N-му (вихідному) контурі

$$\dot{I}_N = \dot{U}_1 \cdot \frac{\Delta_{1N}}{\Delta}$$

і з огляду на опір навантаження Z_n , легко розрахувати усі різновиди комплексних функцій, а саме:

вхідна провідність

$$Y_{ex}(j\omega) = \frac{\dot{I}_1}{\dot{U}_1} = \frac{\Delta_{11}}{\Delta}; \quad (4.14)$$

вхідний опір

$$Z_{ex}(j\omega) = \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_1} = \frac{\Delta}{\Delta_{11}}; \quad (4.15)$$

коефіцієнт передачі напруги

$$K_U(j\omega) = \frac{\dot{U}_N}{\dot{U}_1} = \frac{\dot{I}_N \cdot Z_n}{\dot{U}_1} = Z_n \cdot \frac{\Delta_{1N}}{\Delta}; \quad (4.16)$$

коефіцієнт передачі струму

$$K_I(j\omega) = \frac{\dot{I}_N}{\dot{I}_1} = \frac{\Delta_{1N}}{\Delta_{11}}; \quad (4.17)$$

передавальний опір

$$Z_{nep}(j\omega) = \frac{\dot{U}_N}{\dot{I}_1} = Z_n \cdot \frac{\Delta_{1N}}{\Delta_{11}}; \quad (4.18)$$

передавальну провідність

$$Y_{nep}(j\omega) = \frac{\dot{I}_N}{\dot{U}_1} = \frac{\Delta_{IN}}{\Delta}. \quad (4.19)$$

Розрахунок комплексних функцій методом вузлових напруг

Зобразимо комплексну еквівалентну схему кола, задамо в ній вхідний (1) і вихідний (N) вузли (рис.4.4)

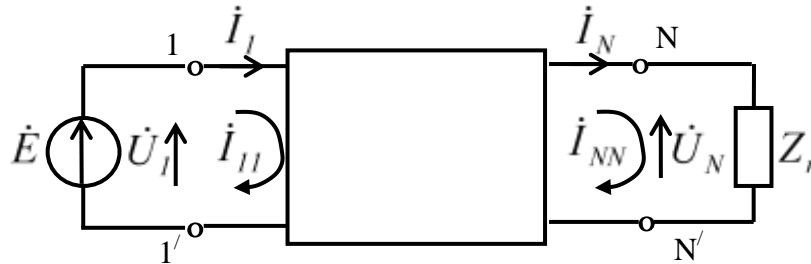


Рис. 4.4

У загальному випадку система вузлових рівнянь має вигляд:

$$\begin{pmatrix} Y_{11} & Y_{12} & \dots & Y_{1N} \\ Y_{21} & Y_{22} & \dots & Y_{2N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ Y_{N1} & Y_{N2} & \dots & Y_{NN} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{U}_2 \\ \dots \\ \dot{U}_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{j}_1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Розв'язуючи систему, знайдемо напругу на вході і на виході кола

$$\dot{U}_1 = \dot{j}_1 \cdot \frac{\Delta_{11}}{\Delta}; \quad \dot{U}_N = \dot{j}_1 \cdot \frac{\Delta_{IN}}{\Delta}.$$

Використовуючи вузлові напруги \dot{U}_1, \dot{U}_N , і опір навантаження Z_n , запишемо вирази для комплексних функцій:
вхідна провідність

$$Y_{ex}(j\omega) = \frac{\dot{j}_1}{\dot{U}_1} = \frac{\Delta}{\Delta_{11}}; \quad (4.20)$$

вхідний опір

$$Z_{ex}(j\omega) = \frac{\dot{U}_1}{\dot{j}_1} = \frac{\Delta_{11}}{\Delta}; \quad (4.21)$$

коефіцієнт передачі напруги

$$K_U(j\omega) = \frac{\dot{U}_N}{\dot{U}_1} = \frac{\Delta_{IN}}{\Delta_{11}}; \quad (4.22)$$

коефіцієнт передачі струму

$$K_I(j\omega) = \frac{\dot{I}_N}{\dot{j}_1} = \frac{1}{Z_n} \cdot \frac{\Delta_{IN}}{\Delta}; \quad (4.23)$$

передавальний опір

$$Z_{nep}(j\omega) = \frac{\dot{U}_N}{\dot{J}_1} = \frac{\Delta_{IN}}{\Delta}; \quad (4.24)$$

передавальну провідність

$$Y_{nep}(j\omega) = \frac{\dot{I}_N}{\dot{U}_1} = \frac{I}{Z_n} \cdot \frac{\Delta_{IN}}{\Delta_{II}}. \quad (4.25)$$

Отримані вирази свідчать про те, що комплексні функції кола залежать від схеми, параметрів її елементів і навантаження. Вони можуть бути розраховані через параметри матриці контурних опорів або матриці вузлових провідностей кола і параметри навантаження.

При експериментальному визначенні частотних характеристик на вхід досліджуваного кола подають коливання з незмінними амплітудою і початковою фазою і частотою, що змінюється. Кожному значенню частоти будуть відповідати певні амплітуда і фаза коливань на виході. Співвідношення амплітуд і початкових фаз вихідного і вхідного коливань визначають амплітудно - частотну і фазо - частотну характеристики кола.

4.4. Фільтрація коливань в електричних колах

Одним з найбільш переконливих прикладів практичного використання в радіотехніці частотних властивостей електричних кіл, які містять реактивні елементи, є здійснення з їх допомогою частотної вибіркової, або частотної фільтрації коливань. Під частотною вибірковістю системи, пристрою розуміють їх властивість виділяти з коливань всієї сукупності частот коливання заданої частоти або заданого діапазону частот. При цьому в певному діапазоні частот, який називається смугою пропускання, коливання передаються колом з невеликим загасанням (з великим коефіцієнтом передачі), на інших ділянках частотного діапазону коливання передаються з великим загасанням (з малим коефіцієнтом передачі). Ці ділянки відповідають смузі затримування.

Загальноприйнятим є таке визначення.

Смуга пропускання кола - діапазон частот, на границях якого потужність коливань на виході кола зменшується в два рази, а напруга і струм - в $\sqrt{2}$ раз в порівнянні з максимальними значеннями.

Частоти, які відповідають границям смуги пропускання, називаються граничними частотами, або частотами зрізу.

Отже, будь-яке електричне коло, в складі якого є хоча б один реактивний елемент, - це фільтруюче по частоті коло, або фільтр.

Однак, ефективність фільтрації різних за складом і структурою кіл далеко не однакова і визначається в основному їх амплітудно - частотними характеристиками. Очевидно, що ідеальні вибіркові властивості має коло, амплітудно-частотна характеристика якого має прямокутну форму, причому, в межах смуги пропускання коефіцієнт передачі кола повинен бути максимальним, а в смузі затримання - дорівнювати нулю.

Залежно від взаємного положення смуги пропускання і смуги затримування уздовж частотної вісі (шкали частот) фільтри поділяють на фільтри нижніх частот, фільтри верхніх частот, смугові фільтри і загороджувальні фільтри.

На рис. 4.5 наведені нормовані амплітудно-частотні характеристики (у вигляді залежностей від частоти модуля нормованого комплексного коефіцієнта передачі напруги) ідеальних фільтрів

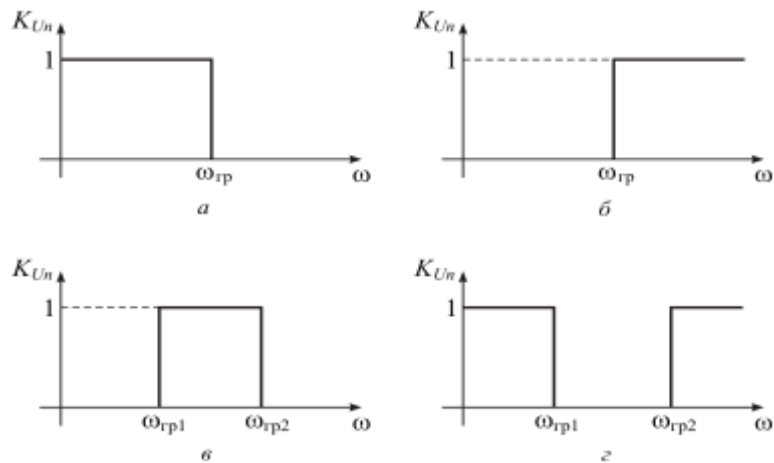


Рис. 4.5

Фільтр нижніх частот (ФНЧ) - електричне коло, смуга пропускання якого лежить в діапазоні $\Delta\omega_n = 0 \dots \omega_{гр}$, а смуга затримування - $\Delta\omega_z = \omega_{гр} \dots \infty$. Ідеальна амплітудно-частотна характеристика ФНЧ зображена на рисунку 4.6.а.

Фільтр верхніх частот (ФВЧ) - електричне коло, смуга пропускання якого лежить в межах $\Delta\omega_n = \omega_{гр} \dots \infty$, а смуга затримування $\Delta\omega_z = 0 \dots \omega_{гр}$. Ідеальна амплітудно-частотна характеристика ФВЧ зображена на рисунку 4.6.б.

Смуговий фільтр (СФ) - електричне коло, смуга пропускання якого лежить в межах $\Delta\omega_n = \omega_{гр1} \dots \omega_{гр2}$, а смуга затримування $\Delta\omega_z = 0 \dots \omega_{гр1}; \omega_{гр2} \dots \infty$. Ідеальна амплітудно-частотна характеристика СФ зображена на рисунку 4.6.в.

Загороджувальний фільтр (ЗФ) - електричне коло, смуга пропускання якого лежить в межах $\Delta\omega_n = 0 \dots \omega_{гр1}; \omega_{гр2} \dots \infty$, а смуга затримування $\Delta\omega_z = \omega_{гр1} \dots \omega_{гр2}$. (рис. 4.6.г).

Задача створення фільтрів з характеристиками, які наближаються до ідеальних, вирішується в рамках теорії фільтрів - спеціальному розділі теорії кіл.

У той же час, ряд простих, так званих типових, кіл мають частотно-вибіркові властивості, які відповідають фільтрам різних типів.

Далі розглянемо частотні властивості і основні характеристики найбільш поширених в радіотехнічній практиці типових кіл.

4.5. Частотні характеристики RC - кіл

Розглянемо коло, яке містить послідовно з'єднані елементи R і C (рис.4.6).

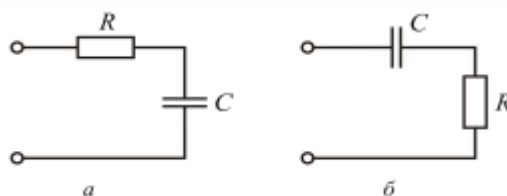


Рис. 4.6

Частотні властивості цього кола найбільш зручно досліджувати через комплексний коефіцієнт передачі напруги

$$K_U(j\omega) = K_U(\omega) e^{j\Phi(\omega)} = \frac{\dot{U}_{вих}}{\dot{U}_{вх}} = \frac{U_{вих}}{U_{вх}} \cdot e^{j(\psi_{U_{вих}} - \psi_{U_{вх}})} \quad (4.26)$$

Можливі два варіанти ввімкнення даної схеми:

по-перше, вихідна напруга знімається з ємності (рис.4.7а), тобто

$$Z_1 = R, \quad Z_2 = \frac{1}{j\omega C};$$

по-друге, вихідна напруга знімається з опору (рис.4.7б), тобто

$$Z_1 = \frac{1}{j\omega C}, \quad Z_2 = R.$$

Для першого варіанту схеми (рис. 4.7а) комплексний коефіцієнт передачі напруги

$$K_{UC}(j\omega) = \frac{\dot{U}_C}{\dot{U}_{вх}} = \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2} = \frac{1}{1 + j\omega\tau} = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega\tau)^2}} \cdot e^{-j \arctg \omega\tau} \quad (4.27)$$

де: $\tau = R \cdot C$ - стала часу кола. (4.28)

Фізичний зміст цього параметра розглянемо в подальшому, зараз же вкажемо, що його розмірність дійсно відповідає часу

$$[\tau] = [R] \cdot [C] = [\text{Ом}] [\text{Фарада}] = [\text{Ом}] \left[\frac{\text{с}}{\text{Ом}} \right] = [\text{с}].$$

Виділимо в отриманому виразі модуль, який визначає амплітудно-частотну характеристику

$$K_{UC}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega\tau)^2}} \quad (4.29)$$

і аргумент, який визначає фазо-частотну характеристику

$$\Phi_U(\omega) = -\arctg \omega\tau. \quad (4.30)$$

Графік АЧХ наведено на рис.4.7 а, ФЧХ - на рис. 4.7 б

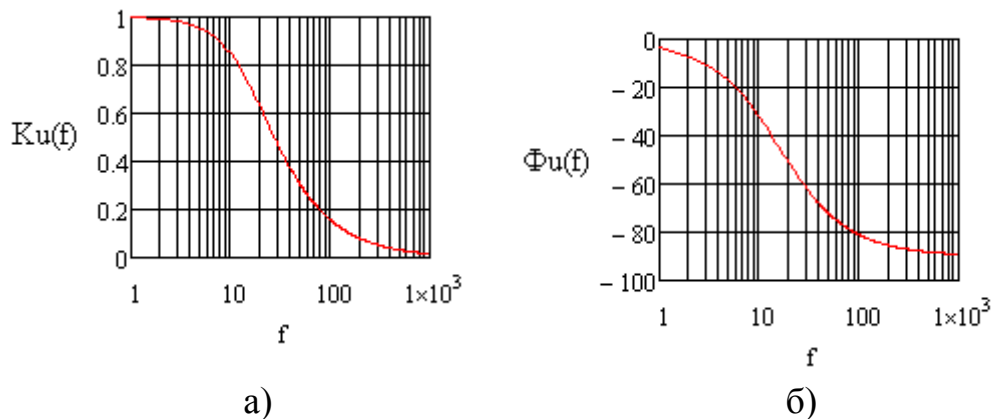


Рис.4.7

Відповідно до амплітудно-частотної характеристики низькочастотні коливання проходять через дане коло з великим коефіцієнтом передачі (малим загасанням). З зростанням частоти амплітуда коливань на виході зменшується.

Отже, RC - коло, у разі, коли вихідна напруга знімається з ємності, являє собою фільтр нижніх частот.

До цього висновку можна прийти, аналізуючи якісно проходження через розглянуте коло коливань різних частот, а саме:

очевидно, що постійна напруга ($\omega = 0$) передається з входу на вихід без змін - опір поперечного плеча (ємності) нескінченно великий, струм в колі не протікає, падіння напруги на опорі відсутнє. У міру зростання частоти вхідної гармонічної напруги опір ємності зменшується, все збільшується струм, який виділяє на опорі все більше падіння напруги; при

цьому напруга на виході кола зменшується. При необмеженому зростанні частоти значення вихідної напруги прагне до нуля.

Для визначення смуги пропускання фільтра прирівняємо вираз $K_U(\omega)$ значенню

$$\frac{1}{\sqrt{2}}$$

, яке відповідає граничній частоті ω_{gp}

$$K_U(\omega_{gp}) = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega_{gp} \tau)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (4.31)$$

і, розв'язуючи отримане рівняння щодо ω_{gp} , знайдемо

$$\omega_{gp} = \frac{1}{\tau} = \frac{1}{RC}. \quad (4.32)$$

Таким чином, смуга пропускання RC -фільтра нижніх частот лежить в межах від нуля до ω_{gp} , тобто

$$\Delta\omega_n = 0 \dots \omega_{gp}.$$

Фаза - частотна характеристика свідчить про те, що дане коло обумовлює відставання по фазі вихідного сигналу по відношенню до вхідного. При зміні частоти від нуля до нескінченності різниця фаз вихідного і вхідного сигналів змінюється від нуля до $-\frac{\pi}{2}$,

приймаючи на граничній частоті значення $-\frac{\pi}{4}$.

Для другого варіанту схеми (рис.4.6 б)

Підставимо в формулу (4.6) значення опорів

$$Z_1 = \frac{1}{j\omega C}, \quad Z_2 = R :$$

$$K_{UR}(j\omega) = \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2} = \frac{j\omega\tau}{1 + j\omega\tau} = \frac{\omega\tau}{\sqrt{1 + (\omega\tau)^2}} \cdot e^{j(\frac{\pi}{2} - \arctg\omega\tau)} \quad (4.33)$$

Амплітудно-частотна характеристика

$$K_{UR}(\omega) = \frac{\omega\tau}{\sqrt{1 + (\omega\tau)^2}}; \quad (4.34)$$

фаза-частотна характеристика

$$\Phi(\omega) = \frac{\pi}{2} - \arctg\omega\tau. \quad (4.35)$$

Графіки АЧХ і ФЧХ наведені на рисунках 4.8 а), б)

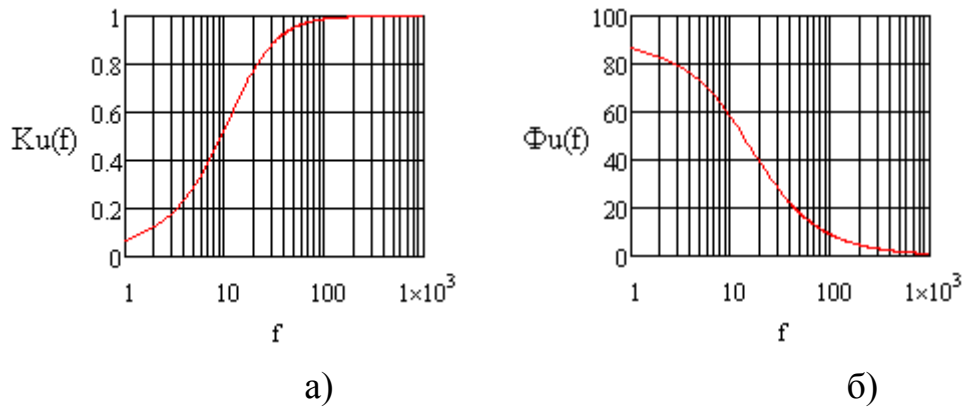


Рис.4.8

Таким чином, RC - коло, у разі, коли вихідна напруга знімається з опору, являє собою фільтр верхніх частот.

Постійна напруга на вихід кола не передається внаслідок нескінченно великого опору ємності в поздовжньому плечі. Збільшення частоти вхідного сигналу призводить до зменшення цього опору, зростаючий за величиною струм виділяє на елементі R все більшу напругу; при $\omega = \infty$ напруга на виході кола максимальна і дорівнює вхідній напрузі.

Гранична частота визначається з рівняння

$$\frac{\omega_{zp} \tau}{\sqrt{1 + (\omega_{zp} \tau)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (4.36)$$

і дорівнює

$$\omega_{zp} = \frac{1}{\tau} = \frac{1}{R \cdot C}. \quad (4.37)$$

Смуга пропускання RC - фільтра верхніх частот лежить в межах

$$\Delta\omega_n = \omega_{zp} \dots \infty.$$

З фазо-частотної характеристики видно, що данне коло обумовлює випередження по фазі вихідної напруги по відношенню до вхідної на кут від $\frac{\pi}{2}$ на частоті $\omega \approx 0$ до нуля на частоті $\omega = \infty$.

4.6. Частотні характеристики RL - кіл

Розглянемо кола, які містять послідовно з'єднані елементи R і L (рис. 4.9).

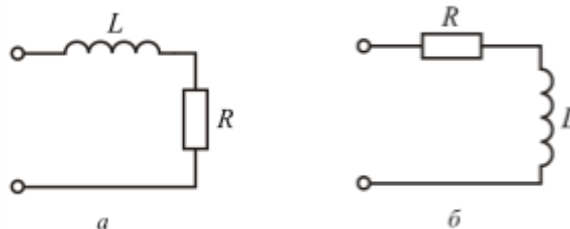


Рис. 4.9

Для схеми, коли вихідна напруга знімається з опору (рис.4.9 а), комплексний коефіцієнт передачі напруги

$$K_{UR}(j\omega) = \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2} = \frac{R}{j\omega L + R} = \frac{1}{1 + j\omega\tau} = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega\tau)^2}} \cdot e^{-j \arctg \omega\tau}, \quad (4.38)$$

де $\tau = \frac{L}{R}$ - стала часу RL -кола. (4.39)

$$\tau = \frac{[L]}{[R]} = \frac{[\text{Гн}]}{[\text{Ом}]} = \frac{[\text{Ом} \cdot \text{с}]}{[\text{Ом}]} = [\text{с}].$$

Вираз для амплітудно-частотної характеристики

$$K_{UR}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega\tau)^2}}, \quad (4.40)$$

фазо-частотної характеристики

$$\Phi(\omega) = -\arctg \omega\tau ; \quad (4.41)$$

Порівнюючи отримані вирази з відповідними виразами для схеми (рис.4.6 а), відзначаємо, що частотні властивості кіл однакові, тобто RL - коло, коли вихідна напруга знімається з опору, являє собою фільтр нижніх частот з граничною частотою

$$\omega_{zp} = \frac{1}{\tau} = \frac{R}{L} \quad (4.42)$$

і смугою пропускання

$$\Delta\omega = 0 \dots \omega_{zp} .$$

Для схеми, коли вихідна напруга знімається з індуктивності (рис.4.9.б)

$$K_{UL}(j\omega) = \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2} = \frac{j\omega L}{R + j\omega L} = \frac{j\omega\tau}{1 + j\omega\tau} = \frac{\omega\tau}{\sqrt{1 + (\omega\tau)^2}} \cdot e^{j\left(\frac{\pi}{2} - \arctg \omega\tau\right)} \quad (4.43)$$

З виразів для $K_{UL}(j\omega)$ знайдемо:

амплітудно-частотну характеристику

$$K_{UL}(\omega) = \frac{\omega\tau}{\sqrt{1 + (\omega\tau)^2}} ; \quad (4.44)$$

фазо-частотну характеристику

$$\Phi(\omega) = \frac{\pi}{2} - \arctg \omega\tau ; \quad (4.45)$$

Отримані вирази збігаються з аналогічними для схеми (рис.4.6 б), а це означає, що RL - коло, у разі, коли вихідна напруга знімається з індуктивності, являє собою фільтр верхніх частот з граничною частотою

$$\omega_{zp} = \frac{1}{\tau} = \frac{R}{L} \quad (4.46)$$

і смугою пропускання

$$\Delta\omega_n = \omega_{zp} \dots \infty .$$

Аналізуючи частотно-вибіркові властивості RC - і RL - кіл, як найпростіших фільтрів нижніх і верхніх частот, слід зазначити низьку ефективність фільтрації коливань. Це пов'язано з малою крутизною амплітудно-частотних характеристик в області граничної частоти, що вказує на істотне ослаблення коливань в смузі пропускання фільтра поряд із задовільним проходженням коливань в смузі затримання.

4.7. Частотні характеристики RLC - кіл

4.7.1. Умови резонансу

Послідовним коливальним контуром називається електричне коло, яке представляє собою послідовне по відношенню до зовнішніх затискачів з'єднання конденсатора і котушки індуктивності. Схема послідовного коливального контуру в загальному випадку містить ємність, індуктивність і активний опір, який враховує втрати енергії (рис.4.10).

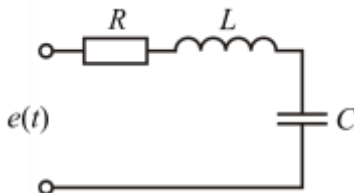


Рис. 4. 10

Аналіз властивостей послідовного контуру доцільно почати з аналізу властивостей елементів, які входять до складу його схеми.

Побудуємо графіки залежності від частоти опорів елементів контуру і сумарного реактивного опору (рис.4.1.). При цьому врахуємо такі відомі співвідношення

$$r(\omega) = \text{const}; \quad x_L(\omega) = \omega L; \quad x_C(\omega) = \frac{1}{\omega C}; \quad x = x_L - x_C.$$

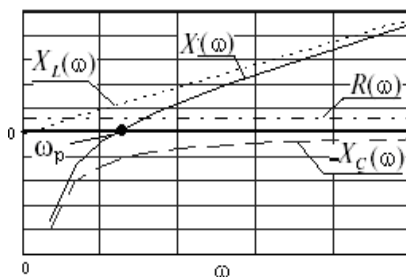


Рис. 4. 11

В області нижніх частот ($\omega < \omega_0$) $x_L < x_C$, контур в цілому веде себе подібно ємності, тобто його еквівалентна реактивність відповідає ємності.

В області верхніх частот ($\omega > \omega_0$) $x_L > x_C$ і контур еквівалентний індуктивності.

На частоті $\omega = \omega_0$ реактивні опори рівні і контур еквівалентний активному опору.

Характер еквівалентного опору в діапазоні частот наочно ілюструє графік $x(\omega)$.

Таким чином, характер і величина опору послідовного коливального контуру залежать від параметрів його елементів і частоти коливань, які діють в контурі (які включені до контуру ззовні).

Особливу цікавість представляє випадок, коли сумарний реактивний опір контуру дорівнює нулю.

Режим в послідовному коливальному контурі, при якому його результуючий реактивний опір дорівнює нулю і при цьому напруга і струм на зовнішніх затискачах синфазні, називається резонансом.

Таким чином, умова резонансу в послідовному контурі:

$$x = \omega_0 L - \frac{1}{\omega_0 C} = 0. \quad (4.47)$$

З умови резонансу випливає, що при заданих параметрах L і C він виникає на одній, строго певній частоті.

Частота, на якій в контурі виникає резонанс, називається резонансною. З умови (4.47) резонансна частота визначається наступним співвідношенням

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (4.48)$$

4.7.2. Первинні і вторинні параметри

Послідовний коливальний контур характеризують рядом первинних та вторинних параметрів.

Первинні параметри - це значення активного опору R , індуктивності L і ємності C .

Вторинні параметри: резонансна частота $\omega_0(f_0)$, характеристичний (хвильовий) опір ρ , добротність Q , загасання d , смуга пропускання Π , коефіцієнт прямокутності частотної характеристики K_{Π} .

Визначення резонансної частоти і розрахункова формула наведені вище.

З круговою резонансною частотою ω_0 відомими співвідношеннями пов'язані: резонансна лінійна частота

$$f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}, \quad \text{Гц}; \quad (4.49)$$

період власних коливань в контурі

$$T_0 = \frac{1}{f_0} = 2\pi\sqrt{LC}, \quad \text{с}; \quad (4.50)$$

довжина хвилі власних коливань

$$\lambda_0 = \frac{c}{f_0} = 2\pi \cdot c \cdot \sqrt{LC}, \quad \text{м}; \quad (4.51)$$

де $c = 3 \cdot 10^8$ м/с - швидкість світла.

При резонансі опір послідовного контуру активний, мінімальний за величиною і дорівнює R , тобто

$$Z(j\omega_0) = R.$$

Струм в контурі при резонансі

$$\dot{I}_0 = \frac{\dot{U}}{r},$$

де \dot{I}_0 - комплексне діюче значення струму при резонансі;

\dot{U} - комплексне діюче значення напруги, прикладеної до контуру.

Напруга на елементах контуру при резонансі:

на активному опорі

$$\dot{U}_{r0} = \dot{I}_0 \cdot r = \dot{U}; \quad (4.52)$$

на індуктивності

$$\dot{U}_{L0} = \dot{I}_0 \cdot j\omega_0 L = j \frac{\omega_0 L}{r} \dot{U} = \frac{\rho}{r} \dot{U} \cdot e^{j\frac{\pi}{2}} = Q \cdot \dot{U} \cdot e^{j\frac{\pi}{2}}; \quad (4.53)$$

на ємності

$$\dot{U}_{C0} = \dot{I}_0 \cdot \frac{1}{j\omega_0 C} = -j \frac{1}{\omega_0 rC} \dot{U} = \frac{\rho}{r} \dot{U} \cdot e^{-j\frac{\pi}{2}} = Q \cdot \dot{U} \cdot e^{-j\frac{\pi}{2}}. \quad (4.54)$$

Тут ρ - характеристичний (хвильовий) опір контуру;

Q - добротність (якість) контуру.

Характеристичний (хвильовий) опір контуру - відношення напруги на одному з реактивних елементів контуру до струму в контурі при резонансі

$$\rho = \frac{U_{L0}}{I_0} = \frac{I_0 \omega_0 L}{I_0} = \omega_0 L; \quad \rho = \frac{U_{C0}}{I_0} = \frac{I_0}{\omega_0 C I_0} = \frac{1}{\omega_0 C}. \quad (4.55)$$

Таким чином, хвильовий опір контуру чисельно дорівнює опору реактивного елемента контуру (індуктивності або ємності) на резонансній частоті.

Зв'язок хвильового опору з первинними параметрами контуру встановлюється співвідношенням, яке випливає з (4.55):

$$\rho = \sqrt{\frac{L}{C}}. \quad (4.56)$$

Добротність контуру - відношення напруги на будь-якому з реактивних елементів контуру при резонансі до напруги, яка прикладена до контуру. Добротність характеризує ефективність, або якість контуру. З огляду на формули (4.53) і (4.54), отримаємо

$$Q = \frac{U_{L0}}{U} = \frac{U \omega_0 L}{rU} = \frac{U_{C0}}{U} = \frac{U}{r \omega_0 C U} = \frac{\omega_0 L}{r} = \frac{1}{r \omega_0 C} = \frac{\rho}{r}. \quad (4.57)$$

Таким чином, якість контуру, або його добротність, тим вища, чим більше його характеристичний опір і менший активний опір, тобто втрати.

Традиційними значеннями добротності радіотехнічних контурів є $Q = 50 \dots 150$. Зі збільшенням резонансної частоти (десятки МГц і вище) забезпечити високі значення добротності контурів складно.

Аналіз виразів (4.52), (4.53) і (4.54) вказує на наступне:

при резонансі напруга на активному опорі контура дорівнює напрузі, яке прикладена до контуру;

напруги на реактивних елементах протифазні, рівні по амплітуді і в Q разів перевищують напругу, прикладену до контуру.

У зв'язку з цим, резонанс в послідовному коливальному контурі називають резонансом напруги.

Загасання послідовного коливального контуру - величина, зворотна добротності

$$d = \frac{1}{Q}. \quad (4.58)$$

Смуга пропускання - діапазон частот, на межах якого потужність коливань становить 0.5 максимального значення, а їх амплітуда $\frac{1}{\sqrt{2}}$ від максимального значення. Смуга пропускання лежить між граничними частотами ω_{sp1} та ω_{sp2} .

При кількісній оцінці розрізняють абсолютну Π і відносну Π_0 смуги пропускання.

Абсолютна смуга пропускання - різниця граничних частот

$$\Pi = \omega_{zp2} - \omega_{zp1}. \quad (4.59)$$

Відносна смуга пропускання - відношення абсолютної смуги пропускання до резонансної частоти контуру

$$\Pi_0 = \frac{\Pi}{\omega_0}. \quad (4.60)$$

Співвідношення, які встановлюють зв'язок між смугою пропускання і іншими параметрами контуру, отримуємо в подальшому, при аналізі його частотних характеристик.

Таким чином, послідовний коливальний контур має властивість певної частотної вибіркової, тобто здатність з безлічі коливань різних частот виділяти коливання, частоти яких лежать в межах його смуги пропускання.

Вибірковість реальних частотно-вибіркових систем, в тому числі і послідовного коливального контуру, оцінюється ступенем прямокутності їх частотних або резонансних характеристик, який кількісно визначається коефіцієнтом прямокутності характеристики.

Коефіцієнт прямокутності частотної характеристики - це відношення смуги пропускання на рівні ≈ 0.707 до смуги пропускання на рівні 0.1 , тобто

$$K_{\Pi} = \frac{\Pi_{0,7}}{\Pi_{0,1}}. \quad (4.61)$$

4.7.3. Частотні та резонансні характеристики

Для аналізу частотно-вибіркових властивостей послідовного коливального контуру використовують комплексні вхідні та передавальні функції, причому, найбільш зручними є комплексна вхідна провідність $Y_{ex}(j\omega)$ і комплексні коефіцієнти передачі напруги $K_U(j\omega)$ на елементах контуру. Компоненти цих функцій, як відомо, визначають частотні характеристики. Поряд з частотними характеристиками на практиці використовують резонансні характеристики.

Резонансні характеристики - це залежності від частоти струму в контурі або напруги на його затискачах.

Частотні характеристики і резонансні характеристики - поняття взаємопов'язані.

При побудові та дослідженні частотних і резонансних характеристик частотно - вибіркових систем в якості незалежної змінної використовують не тільки частоту ω , але і величини, які характеризують розстроювання контуру відносно частоти діючого на нього сигналу. Розстроювання показує ступінь відхилення частоти сигналу ω від резонансної частоти контуру ω_0 . Використання відносних одиниць надає розрахунковим співвідношенням більш загальний вигляд, а також дозволяє проводити порівняльний аналіз частотних властивостей кола в різних ділянках частотного діапазону.

Розрізняють декілька видів розстроювання.

Абсолютне розстроювання - різниця між частотою сигналу і резонансною частотою контуру

$$\Delta\omega = \omega - \omega_0. \quad (4.62)$$

Знак абсолютного розстроювання залежить від співвідношення частот ω і ω_0 .

Відносне розстроювання - відношення абсолютного розстроювання до резонансної частоти контуру

$$\delta = \frac{\Delta\omega}{\omega_0}. \quad (4.63)$$

Узагальнене розстроювання - відношення реактивного опору X до активного R

$$\xi = \frac{x}{r} = \frac{\omega L \omega_0}{r \omega_0} - \frac{\omega_0}{r \omega C \omega_0} = Q \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) = Q \cdot v, \quad (4.64)$$

де $v = \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}$ - фактор розстроювання. (4.65)

Аналіз виразів (4.62), (4.63), (4.64), (4.65) показує, що при резонансі, тобто при $\omega = \omega_0$, всі види розстроювання дорівнюють нулю.

В області частот, близьких до резонансної частоти, тобто при $\omega \approx \omega_0$, величини розстроювання малі і пов'язані між собою наступними співвідношеннями:

$$v = \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \approx \frac{2\omega(\omega - \omega_0)}{\omega\omega_0} \approx \frac{2\Delta\omega}{\omega_0} \approx 2\delta; \quad (4.66)$$

$$\xi = Q \cdot v \approx 2 \cdot \delta \cdot Q. \quad (4.67)$$

Розглянемо згадані вище комплексні функції послідовного коливального контуру.

4.7.3.1. Комплексна вхідна провідність

Відповідно до визначення

$$Y(j\omega) = Y(\omega) \cdot e^{j\Phi(\omega)} = \frac{I}{Z(j\omega)} = \frac{I}{r + jx} = \frac{I}{r(1 + j\xi)}. \quad (4.68)$$

Більш зручно використовувати провідність, нормовану відносно провідності на резонансній частоті, а саме

$$Y_n(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{Y(j\omega_0)} = \frac{I}{1 + j\xi}. \quad (4.69)$$

Виділяючи з останнього виразу модуль і аргумент, отримуємо формули, які визначають відповідно амплітудно-частотну характеристику

$$Y_n(\omega) = \frac{I}{\sqrt{1 + \xi^2}} = \frac{I}{\sqrt{1 + Q^2 v^2}} = \frac{I}{\sqrt{1 + Q^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2}} \quad (4.70)$$

та фазо-частотну характеристику

$$\Phi(\omega) = \psi_i - \psi_u = -\phi(\omega) = -\arctg \xi, \quad (4.71)$$

або

$$\phi(\omega) = \arctg \xi. \quad (4.72)$$

З (4.70) і (4.71) випливає, що частотні характеристики послідовного коливального контуру залежать від добротності контуру. Нижче наводяться сімейства амплітудно-частотних (рис.4.12) і фазо-частотних (рис.4.13) характеристик для трьох значень добротності $Q_1 > Q_2 > Q_3$.

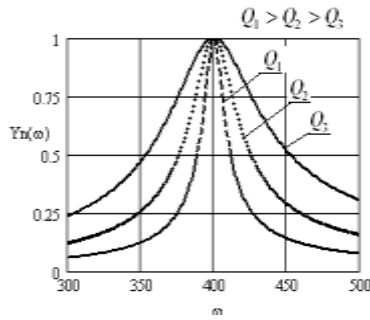


рис.4.12

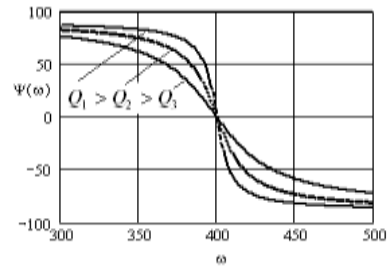


рис.4.13

Від модуля нормованої вхідної провідності контура, який визначає його амплітудно-частотну характеристику, легко перейти до нормованої резонансної характеристики струму, вважаючи, що параметри напруги, яка діє на контур, не залежать від частоти:

$$I_n(\omega) = \frac{I(\omega)}{I(\omega_0)} = \frac{U \cdot Y(\omega)}{U \cdot Y(\omega_0)} = Y_n(\omega) \quad (4.73)$$

Таким чином, резонансні нормовані характеристики струму послідовного коливального контуру збігаються з його амплітудно-частотними характеристиками $Y_n(\omega)$

$$I_n(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + \xi^2}} \quad (4.74)$$

Частотні та резонансні характеристики, як функції узагальненого розстроювання особливо зручні для порівняння частотних властивостей різних частотно-вибіркових пристроїв.

3.7.3.2. Комплексні коефіцієнти передачі напруги

Відповідно до схеми послідовного коливального контуру (рис.4.10) він може характеризуватися трьома коефіцієнтами передачі напруги, в залежності від того, який з елементів контуру відповідає виходу схеми.

Коефіцієнт передачі напруги на активному опорі

$$K_{Ur}(j\omega) = \frac{\dot{U}_r}{\dot{U}} = r \cdot Y(j\omega) = \frac{1}{1 + jQv} = \frac{1}{1 + j\xi} \quad (4.75)$$

Амплітудно-частотна і фазо-частотна характеристики визначаються відповідно

$$K_{Ur}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + Q^2 v^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \xi^2}}; \quad (4.76)$$

$$\Phi_{Ur}(\omega) = -\arctg Q \cdot v = -\arctg \xi. \quad (4.77)$$

Коефіцієнт передачі напруги на індуктивності

$$K_{UL}(j\omega) = \frac{\dot{U}_L}{\dot{U}} = j\omega L \cdot Y(j\omega) = \frac{j\omega L}{r(1 + jQv)} \quad (4.78)$$

Виконавши ряд перетворень, отримаємо

$$K_{UL}(j\omega) = \frac{\omega L}{r(\sqrt{1 + Q^2 v^2})} \cdot \frac{\omega_0}{\omega_0} \cdot e^{j(\frac{\pi}{2} - \arctg Qv)} = \frac{Q}{\sqrt{1 + \xi^2}} \cdot \frac{\omega}{\omega_0} \cdot e^{j(\frac{\pi}{2} - \arctg \xi)} \quad (4.79)$$

Амплітудно-частотна характеристика

$$K_{UL}(\omega) = \frac{Q}{\sqrt{1+\xi^2}} \cdot \frac{\omega}{\omega_o}, \quad (4.80)$$

фазо-частотна характеристика

$$\Phi_{UL}(\omega) = \frac{\pi}{2} - \text{arctg} \xi. \quad (4.81)$$

Коефіцієнт передачі напруги на ємності

Діючи аналогічно попередньому випадку, отримаємо вираз для комплексного коефіцієнта передачі напруги на ємності

$$\begin{aligned} K_{UC}(j\omega) &= \frac{1}{\omega Cr \sqrt{1+Q^2 v^2}} \frac{\omega_o}{\omega} e^{-j(\frac{\pi}{2} + \text{arctg} Qv)} = \\ &= \frac{Q}{\sqrt{1+\xi^2}} \cdot \frac{\omega_o}{\omega} \cdot e^{-j(\frac{\pi}{2} + \text{arctg} \xi)}, \end{aligned} \quad (4.82)$$

амплітудно-частотної характеристики

$$K_{UC}(\omega) = \frac{Q}{\sqrt{1+\xi^2}} \cdot \frac{\omega_o}{\omega}, \quad (4.83)$$

фазо-частотної характеристики

$$\Phi_{UC}(\omega) = -\frac{\pi}{2} - \text{arctg} \xi. \quad (4.84)$$

Від амплітудно - частотних характеристик (4.76), (4.80), (4.83), припускаючи напругу, що діє на контурі $U = const$, перейдемо до нормованих резонансних характеристик напруги: на активному опорі

$$U_{m}(\omega) = \frac{U_r(\omega)}{U_r(\omega_o)} = K_{Um}(\omega); \quad (4.85)$$

на індуктивності

$$U_{Ln}(\omega) = \frac{U_L(\omega)}{U_L(\omega_o)} = K_{ULn}(\omega); \quad (4.86)$$

на ємності

$$U_{Cn}(\omega) = \frac{U_C(\omega)}{U_C(\omega_o)} = K_{UCn}(\omega). \quad (4.87)$$

Таким чином, нормовані резонансні характеристики напруги на елементах контуру збігаються з відповідними нормованими коефіцієнтами передачі напруги.

Графіки амплітудно-частотних характеристик, які відповідають виразами (4.85), (4.86), (4.87), наведені на рисунку 4.14.

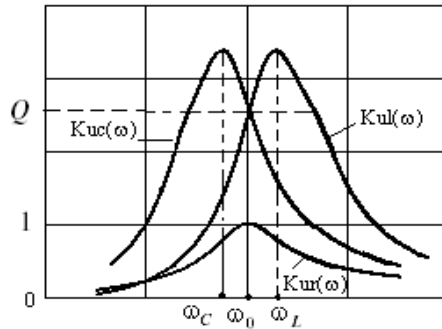


Рис. 4.14

Аналізуючи характеристики, відзначимо такі особливості:

при резонансі, тобто при $\omega = \omega_0$, напруга на активному опорі дорівнює напрузі, яка діє на контурі; коефіцієнт передачі $K_{Ur}(\omega_0) = 1$;

при резонансі напруга на індуктивності і на ємності в Q разів перевищує напругу, яка діє на контурі; коефіцієнт передачі напруги $K_{UL}(\omega_0) = K_{UC}(\omega_0) = Q$;

максимальні значення напруга на реактивних елементах набуває на частотах ω_L, ω_C , тобто осторонь від резонансної частоти.

Дослідження на екстремум функцій $K_{UL}(\omega)$ і $K_{UC}(\omega)$ дають значення частот ω_L і ω_C

$$\omega_L = \omega_0 \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot Q^2}{2 \cdot Q^2 - 1}}; \quad (4.88)$$

$$\omega_C = \omega_0 \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot Q^2 - 1}{2 \cdot Q^2}} \quad (4.89)$$

і максимальні значення коефіцієнтів передачі

$$K_{UL \max} = K_{UC \max} = \frac{2 \cdot Q^2}{\sqrt{4 \cdot Q^2 - 1}}. \quad (4.90)$$

У загальному випадку про настроювання контуру в резонанс можливо свідчити по максимуму напруги на активному опорі. У той же час, в реальних контурах активний опір обумовлений опором проводу котушки індуктивності, який не може бути виділено. Це означає, що строго факт резонансу в реальному контурі по максимуму напруги на його елементах встановити неможливо.

Проте, як свідчить аналіз виразів для ω_L і ω_C , для контурів з високою добротністю $\omega_L \approx \omega_C \approx \omega_0$, і це означає, що про резонанс в контурі можна судити по максимуму напруги на будь-якому з реактивних елементів.

Як правило, при практичному використанні послідовних коливальних контурів вихідну напругу „знімають“ з конденсатора.