

2. Стаціонарні процеси в електричних колах

2.1. Електричне коло з резистором

Розглянемо процеси в електричному колі, яке містить один резистор, представлений у схемі (рис. 2.1) активним опором R , якщо на його вході діє гармонічна напруга

$$u(t) = U_m \sin(\omega t + \psi_u)$$

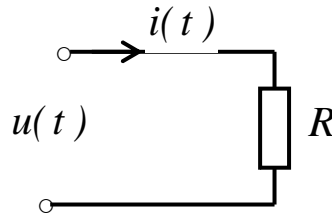


Рис. 2.1.

Відповідно до закону Ома миттєве значення струму

$$i_R(t) = \frac{u(t)}{R} = \frac{U_m}{R} \sin(\omega t + \psi_u) = I_{mR} \sin(\omega t + \psi_{iR}).$$

Зрозуміло, що

$$I_{mR} = \frac{U_m}{R}; \quad \psi_{iR} = \psi_u; \quad \varphi = \psi_u - \psi_{iR} = 0,$$

тобто, струм і напруга в опорі (в резистивному колі) синфазні.

Перенесемо дії на комплексну площину.

Напруги і струму відповідають комплексні зображення

$$u(t) \dot{\equiv} \dot{U}; \quad i(t) \dot{\equiv} \dot{I}.$$

Відповідно до закону Ома в комплексній формі

$$Z_R = \frac{\dot{U}}{\dot{I}} = \frac{U}{I} e^{j(\psi_u - \psi_i)} = \frac{U}{I} = R; \quad Y_R = \frac{I}{Z_R} = \frac{I}{R} = G.$$

Таким чином, комплексний опір і комплексна провідність опору містять тільки дійсну складову, тобто мають активний характер.

Комплексна схема заміщення активного опору має такий вигляд

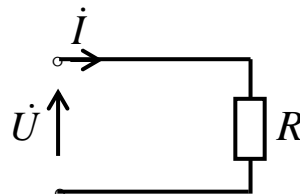


Рис. 2.2.

Часова (рис.2.3) і векторні (рис.2.4) діаграми, що представляють процеси в опорі, мають вигляд

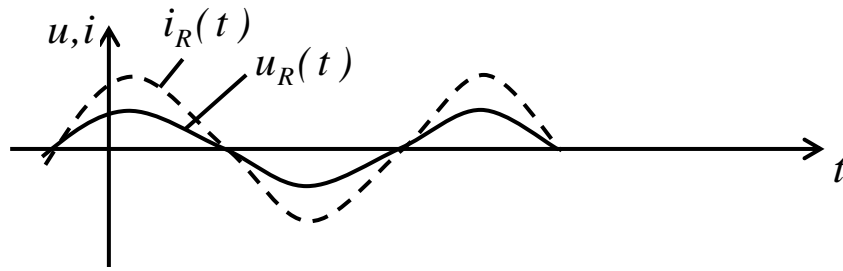


Рис. 2.3.

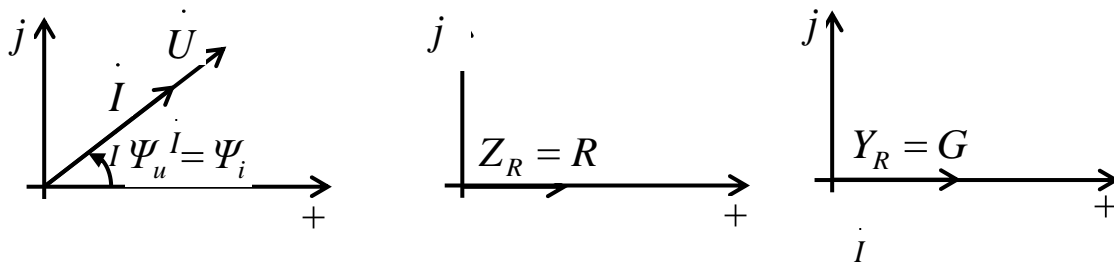


Рис. 2.4.

Процеси в даному колі характеризуються тільки активною потужністю:

$$P = U \cdot I \cos \varphi = UI = RI^2 = GU^2;$$

реактивна потужність дорівнює нулю

$$P_Q = U \cdot I \sin \varphi = 0.$$

2. 2. Електричне коло з котушкою індуктивності

Розглянемо процеси в електричному колі, яке містить котушку індуктивності (схема на рис.2.5), якщо на його вході діє гармонічна напруга

$$u(t) = U_m \sin(\omega t + \psi_u)$$

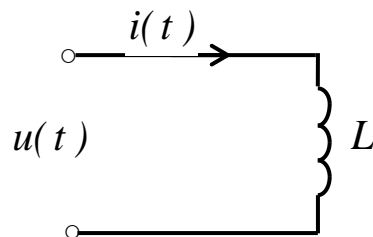


Рис.2.5.

Струм в індуктивності

$$i_L(t) = \frac{1}{L_0} \int u_L(t) dt.$$

Перенесемо дії на комплексну площину

$$\dot{I}_m e^{j\omega t} = \frac{1}{L} \int \dot{U}_m e^{j\omega t} dt = \frac{\dot{U}_m}{j\omega L} e^{j\omega t}$$

або, виключаючи оператор обертання,

$$\dot{I}_m = \frac{\dot{U}_m}{j\omega \cdot L} = \frac{U_m}{\omega \cdot L} e^{j(\psi_u - 90^\circ)},$$

де $I_m = \frac{U_m}{\omega L}$; $\psi_i = \psi_u - 90^\circ$; $\varphi = \psi_u - \psi_i = \psi_u - \psi_u + 90^\circ = 90^\circ$.

Комплексний опір індуктивності

$$Z_L = \frac{\dot{U}_m}{\dot{I}_m} = \frac{\dot{U}_m}{\dot{U}_m} \cdot j\omega L = j\omega L = jx_L = x_L e^{j90^\circ} = \omega L e^{j90^\circ}.$$

Таким чином, комплексний опір індуктивності містить тільки уявну (реактивну) складову; модуль комплексного опору індуктивності називається індуктивним опором.

Комплексна провідність індуктивності

$$Y_L = \frac{1}{Z_L} = \frac{1}{j\omega L} = -j \cdot b_L = b_L \cdot e^{-j90^\circ} = \frac{1}{\omega L} \cdot e^{-j90^\circ}; \quad b_L = \frac{1}{\omega L}.$$

Комплексна еквівалентна схема індуктивності

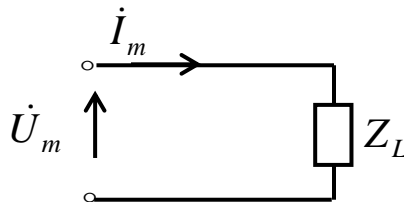


Рис.2.6.

Отримані співвідношення для індуктивного опору і індуктивної провідності вказують на частотну залежність, яку ілюструють графіки, наведені на рис. 2.7.

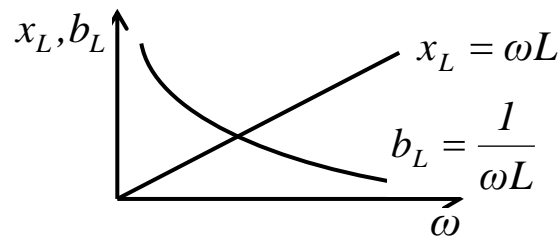
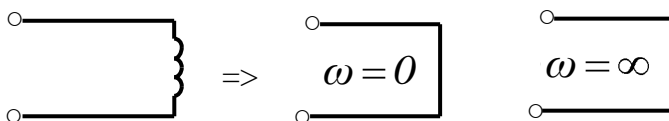


Рис. 2.7.

Характерно, що при $X = 0$, тобто індуктивність в колі постійного струму еквівалентна короткому замиканню, на частотах $\omega \rightarrow \infty$ індуктивний опір $X \rightarrow \infty$, тобто індуктивність в таких умовах еквівалентна розриву в колі



Зазначена властивість може бути використана для поділу постійного і змінного струму в колах живлення електронних схем, а також при здійсненні частотної фільтрації в електричних колах.

Потужність в індуктивності має тільки уявну складову - реактивну потужність, активна потужність дорівнює нулю, тобто перетворення енергії в індуктивності не відбувається

$$P = U \cdot I \cos \varphi = U \cdot I \cdot \cos 90^\circ = 0;$$

$$P_Q = U \cdot I \cdot \sin \varphi = U \cdot I \cdot \sin 90^\circ = UI = x_L I^2 = \omega LI^2.$$

Це означає, що в даному елементі робота не відбувається, а в магнітному полі індуктивності запасється енергія

$$W_L = \int_{-\infty}^t p_L dt = \int_{-\infty}^t u \cdot i \cdot dt = \int_{-\infty}^t L \frac{di}{dt} \cdot i \cdot dt = L \int_0^i i \cdot di = \frac{Li^2}{2},$$

тобто, в момент часу t енергія в магнітному полі індуктивності становить

$$W_L = \frac{Li^2(t)}{2}.$$

Миттєве значення струму в індуктивності

$$i(t) = \mathbf{Jm} \dot{I}_m e^{j\omega t} = \frac{U_m}{\omega L} \mathbf{sin}(\omega t + \psi_u - 90^\circ).$$

Часова і векторна діаграми процесів в індуктивності представлені відповідно на рис.2.8, 2.9.

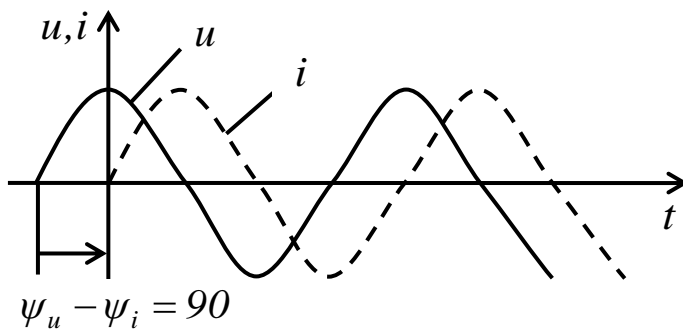


Рис.2.8.

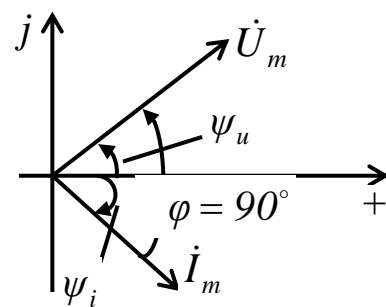


Рис. 2.9.

2. 3. Електричне коло з конденсатором

Розглянемо процеси в електричному колі, яке містить конденсатор, якщо на його вході діє гармонічна напруга $u(t) = U_m \mathbf{sin}(\omega t + \psi_u)$

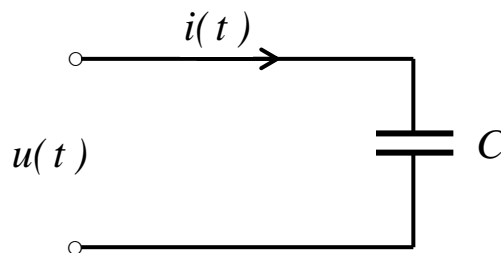


Рис.2.10

Струм в ємності визначається

$$i(t) = C \frac{du_c}{dt}.$$

Перенесемо дії на комплексну площину

$$\dot{I}_m(t) = \dot{I}_m e^{j\omega t} = C \frac{d}{dt} \dot{U}_m e^{j\omega t} = j\omega C \dot{U}_m e^{j\omega t}$$

$$\dot{I}_m = j\omega C \dot{U}_m = \omega C U_m e^{j\psi_u} e^{j90^\circ} = I_m e^{j\psi_i}$$

$$I_m = \omega C U_m; \quad \psi_i = \psi_u + 90^\circ; \quad \varphi = \psi_u - \psi_i - 90^\circ = -90^\circ.$$

Комплексний опір ємності

$$Z_c = \frac{\dot{U}_m}{\dot{I}_m} = \frac{\dot{U}_m}{j\omega C \dot{U}_m} = \frac{1}{j\omega C} = -jx_c = x_c \cdot e^{-j90^\circ} = \frac{1}{\omega C} e^{-j90^\circ}.$$

Таким чином, комплексний опір ємності містить тільки уявну (реактивну) складову; модуль комплексного опору ємності називається ємнісним опором.

Комплексна провідність ємності

$$Y_c = \frac{1}{Z_c} = j\omega C = \omega C e^{j90^\circ} = jb_c; \quad b_c = \omega C.$$

Комплексна еквівалентна схема ємності

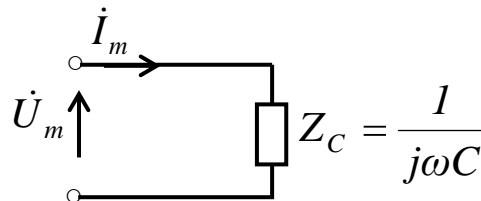


Рис. 2.11

Ємнісний опір (ємнісна провідність) залежать від частоти (рис.2.12)

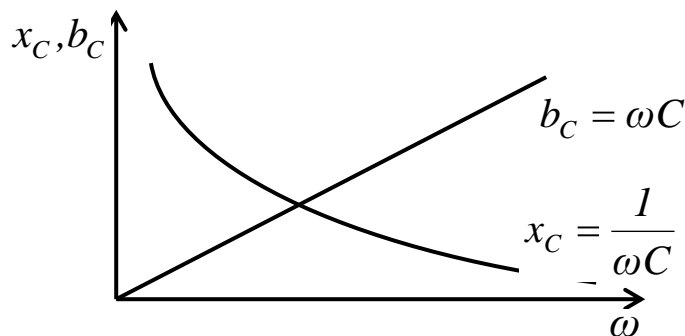
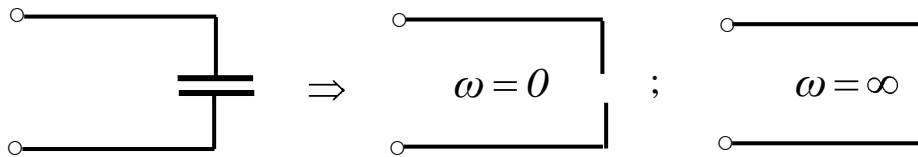


Рис.2.12

Характерно, що при $\omega = 0$ $x_c = \infty$, тобто ємність в колі постійного струму еквівалентна розриву.

На частотах $\omega \rightarrow \infty$ опір ємності $x_C \rightarrow 0$, тобто ємність в таких умовах еквівалентна короткому замиканню.



Зазначена властивість ємності, по аналогії з індуктивністю, може бути використана для поділу постійного і змінного струму в колах живлення електронних схем, а також при здійсненні частотної фільтрації в електричних колах.

Потужність в колі з ємністю має тільки уявну складову - реактивну потужність

$$P_Q = U \cdot I \sin(-90) = -U \cdot I = -x_C I^2 = -\frac{I^2}{\omega C}.$$

Це означає, що в даному колі робота не відбувається, а в електричному полі ємності запасється енергія

$$W_C = \int_{-\infty}^t p_c dt = \frac{Cu^2(t)}{2}.$$

Миттєве значення струму в ємності

$$i(t) = \text{Im } \dot{I}_m e^{j\omega t} = \omega C U_m \sin(\omega t + \psi_u + 90^\circ).$$

Часова і векторна діаграми процесів в ємності представлені відповідно на рис.2.13, 2.14.

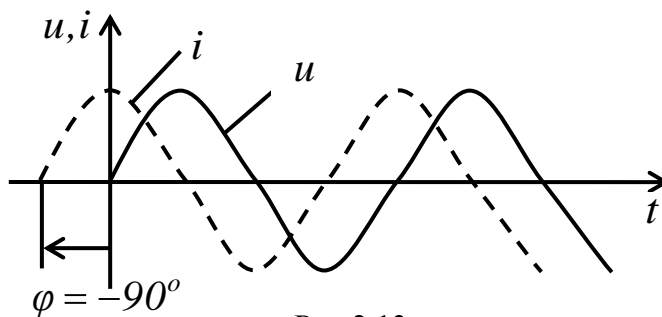


Рис.2.13

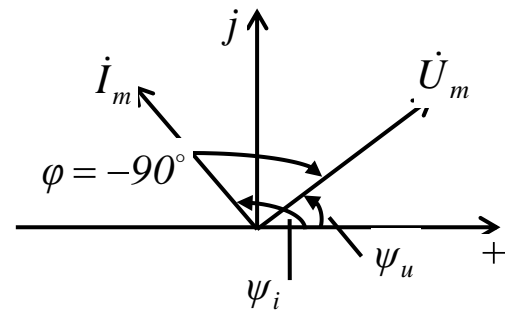


Рис.2.14

2. 4. Процеси в електричних колах з послідовним з'єднанням елементів

2. 4. 1. Еквівалентні перетворення схем з послідовним з'єднанням елементів

Розглянемо електричне коло, утворене послідовним з'єднанням n елементів, опори яких - відповідно: Z_1, Z_2, \dots, Z_n .

Складемо комплексну схему заміщення (рис. 2.15)

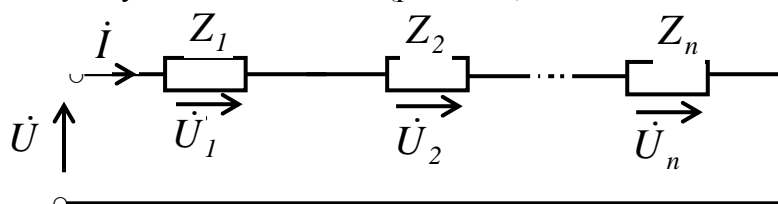


Рис. 2.15.

Рівняння електричного кола відповідно до другого закону Кірхгофа

$$\begin{aligned}\dot{U} &= \dot{U}_1 + \dot{U}_2 + \dots + \dot{U}_n = \dot{I} \cdot Z_1 + \dot{I} \cdot Z_2 + \dots + \dot{I} \cdot Z_n = \\ &= \dot{I} \cdot (Z_1 + Z_2 + \dots + Z_n) = \dot{I} \cdot Z_9,\end{aligned}$$

де $Z_9 = Z_1 + Z_2 + \dots + Z_n = \sum_{k=1}^n Z_k = (r_1 + r_2 + \dots + r_n) + j(x_1 + x_2 + \dots + x_n) =$

$$= \sum_{k=1}^n r_k + j \sum_{k=1}^n x_k = r_9 + jx_9 \quad - \text{еквівалентний опір ділянки схеми електричного}$$

кола з послідовним з'єднанням елементів.

Таким чином, еквівалентний опір схеми кола (ділянки схеми) з послідовним з'єднанням елементів дорівнює сумі опорів цих елементів.

Комплексна провідність перетвореної схеми кола (ділянки схеми)

$$Y_9 = \frac{I}{Z_9} = \frac{I}{Z_1 + Z_2 + \dots + Z_n}.$$

Отже, при розрахунках електричних кіл ділянки схем, утворені послідовним з'єднанням пасивних елементів можна замінити одним елементом, опір якого дорівнює сумі опорів елементів. Цей прийом використовують при дослідженні процесів, з'ясуванні властивостей і параметрів типових з'єднань пасивних елементів, а також з метою спрощення розрахунків електричних кіл.

2. 4. 2. Процеси в послідовному R, L - колі

Розглянемо процеси в електричному колі, утвореному послідовним з'єднанням R і L елементів (схема - рис. 2.16)

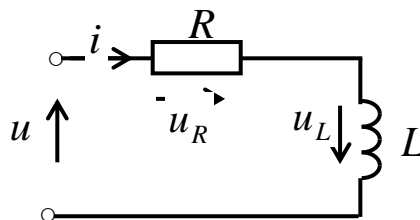


Рис. 2.16

Визначимо струм і напруге на елементах, якщо на вході кола діє напруга

$$u(t) = U_m \sin(\omega t + \psi_u).$$

Побудуємо комплексну еквівалентну схему

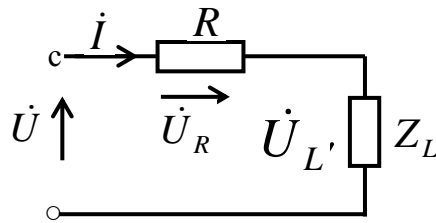


Рис.2.17

Згідно з другим законом Кірхгофа

$$\dot{U} = \dot{U}_R + \dot{U}_L = R \cdot \dot{i} + Z_L \cdot \dot{i} = Z \cdot \dot{i},$$

де $Z = R + Z_L = r + j\omega L = z e^{j\varphi}$ - комплексний еквівалентний опір кола.

Повний опір z і фазовий зсув φ між напругою і струмом

$$z = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2}; \quad \varphi = \text{arctg} \frac{\omega L}{R}$$

залежать від параметрів елементів і частоти зовнішнього впливу.

Комплексний струм в колі

$$\dot{i} = \frac{\dot{U}}{Z} = \frac{U e^{j\psi_u}}{z e^{j\varphi}} = \frac{U}{z} e^{j(\psi_u - \varphi)} = I \cdot e^{j(\psi_u - \varphi)}.$$

Напруга на елементах

$$\dot{U}_R = R \cdot I \cdot e^{j(\psi_u - \varphi)};$$

$$\dot{U}_L = Z_L \cdot \dot{i} = j\omega L \cdot I \cdot e^{j(\psi_u - \varphi)} = \omega L \cdot I \cdot e^{j(\psi_u - \varphi + 90^\circ)}.$$

Перейдемо до миттєвих значень (оригіналам) струму і напруги

$$i(t) = \frac{U_m}{z} \sin(\omega t + \psi_u - \varphi);$$

$$u_R(t) = R \frac{U_m}{z} \sin(\omega t + \psi_u - \varphi);$$

$$u_L(t) = \omega L \frac{U_m}{z} \sin(\omega t + \psi_u - \varphi + 90^\circ).$$

З останніх співвідношень випливає, що:

- струм в колі запізнюється по фазі від прикладеної напруги на кут

$$90^\circ > \varphi > 0;$$

- струм і напруга на активному опорі синфазні;

- напруга на індуктивності випереджає по фазі струм на кут 90° , а прикладену напругу на кут $90^\circ > \alpha > 0$.

Векторна діаграма струму і напруги для даного випадку має вигляд

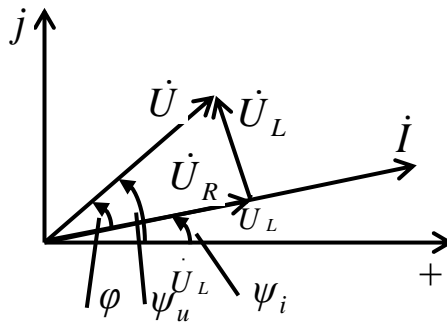


Рис.2.18

Векторна діаграма опорів ("трикутник опорів") має вигляд

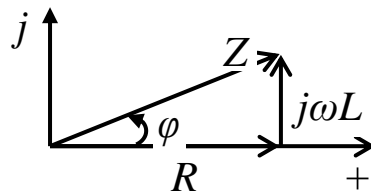


Рис.2.19

В даному колі діють як активна так і реактивна складові потужності

$$P = U \cdot I \cos \varphi = RI^2 ; \quad P_Q = U \cdot I \sin \varphi = \omega LI^2 .$$

2. 4. 3. Процеси в послідовному R, C - колі

Розглянемо процеси в електричному колі, утвореному послідовним з'єднанням R і C елементів (схема - рис. 2.20)

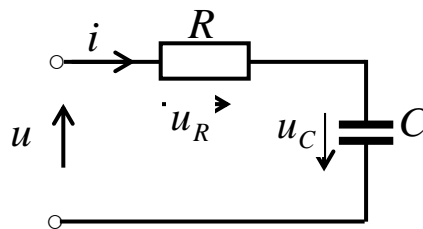


Рис. 2.20

Визначимо струм і напругу на елементах, якщо на вході кола діє напруга $u(t) = U_m \sin(\omega t + \psi_u)$.

Побудуємо комплексну еквівалентну схему

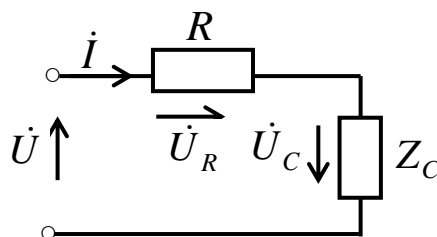


Рис.2.21

Згідно з другим законом Кірхгофа

$$\dot{U} = \dot{U}_R + \dot{U}_C = R \cdot \dot{I} + Z_C \cdot \dot{I} = Z \cdot \dot{I},$$

де $Z = R + Z_C = R - j \frac{1}{\omega C} = z e^{j\varphi}$ - комплексний еквівалентний опір кола.

Повний опір z і фазовий зсув φ між напругою і струмом

$$z = \sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2}; \quad \varphi = -\arctg \frac{1}{R\omega C}$$

залежать від параметрів елементів і частоти зовнішнього впливу.

Комплексний струм в колі

$$\dot{I} = \frac{\dot{U}}{Z} = \frac{U e^{j\psi_u}}{z e^{j\varphi}} = \frac{U}{z} e^{j(\psi_u - \varphi)}.$$

Напруга на елементах

$$\begin{aligned} \dot{U}_R &= R \cdot \dot{I} \cdot e^{j(\psi_u - \varphi)}; \\ \dot{U}_C &= Z_C \cdot \dot{I} = -j \frac{1}{\omega C} \cdot \dot{I} \cdot e^{j(\psi_u - \varphi)} = \frac{1}{\omega C} \cdot \dot{I} \cdot e^{j(\psi_u - \varphi - 90^\circ)}. \end{aligned}$$

Перейдемо до миттєвих значень (оригіналів) струму і напруги

$$\begin{aligned} i(t) &= \frac{U_m}{z} \sin(\omega t + \psi_u - \varphi); \\ u_R(t) &= R \frac{U_m}{z} \sin(\omega t + \psi_u - \varphi); \\ u_C(t) &= \frac{U_m}{z} \cdot \frac{1}{\omega C} \sin(\omega t + \psi_u - \varphi - 90^\circ). \end{aligned}$$

З останніх співвідношень випливає, що:

- струм в колі випереджає по фазі прикладену напругу на кут $90^\circ > \varphi > 0$;
- струм і напруга на активному опорі синфазні;
- напруга на ємності запізнюється по фазі від струму на кут 90° , а від прикладеної напруги на кут $90^\circ > \alpha > 0$.

Векторна діаграма струму і напруги для даного випадку має вигляд

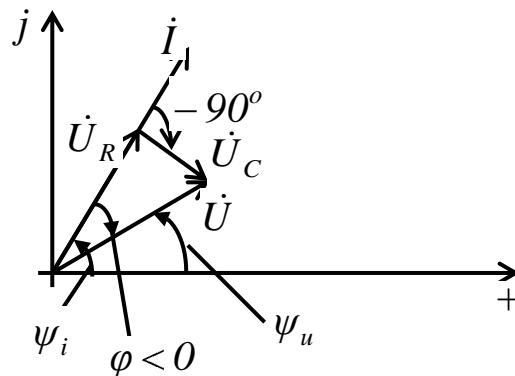


Рис.2.22

Векторна діаграма опорів ("трикутник опорів") має вигляд

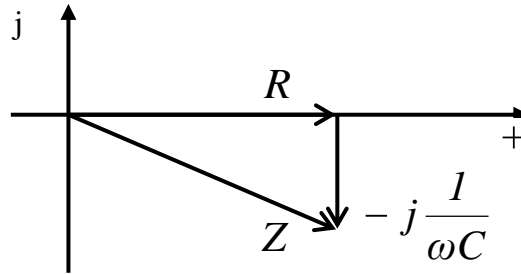


Рис.2.23

В даному колі діють як активна, так і реактивна складові потужності

$$P = U \cdot I \cos \varphi = RI^2; \quad P_Q = -x_C \cdot I^2 = -\frac{1}{\omega C} \cdot I^2.$$

2. 4. 4. Процеси в послідовному R, L, C - колі

Розглянемо електричне коло, утворене послідовним з'єднанням елементів R, L, C (схема представлена на рис. 2.24)

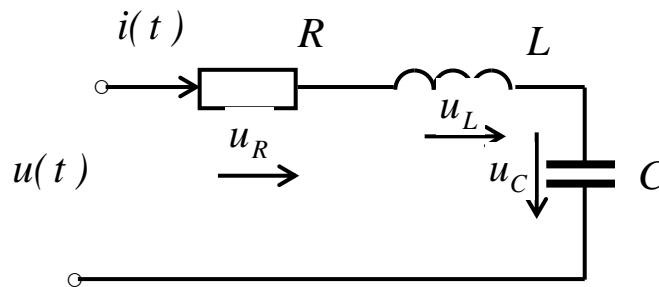


Рис. 2.24

Комплексні схеми заміщення - вихідна і після еквівалентних перетворень

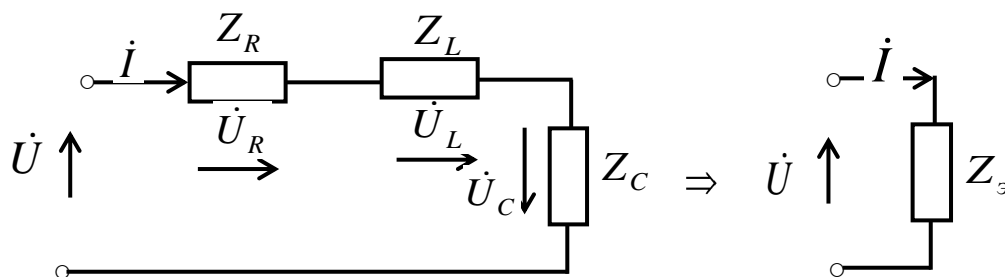


Рис.2.25

Визначимо струм і падіння напруги на елементах.
Еквівалентний опір

$$Z_9 = Z_R + Z_L + Z_C = R + j\omega L - j\frac{1}{\omega C} = R + jx = z \cdot e^{j\varphi},$$

де: $x = x_L + x_C = \omega L - \frac{1}{\omega C}$ - еквівалентний реактивний опір кола;

$z = \sqrt{R^2 + x^2}$ - модуль комплексного опору, або повний опір кола;

$\varphi = \arctg \frac{x}{R}$ - аргумент комплексного опору.

Відповідно до закону Ома визначимо комплексні зображення струму і падінь напруги на елементах кола

$$\dot{I} = \frac{\dot{U}}{Z} = \frac{U \cdot e^{j\psi_u}}{z \cdot e^{j\varphi}} = \frac{U}{z} \cdot e^{j(\psi_u - \varphi)} = I \cdot e^{j\psi_i}; \quad I = \frac{U}{z}; \quad \psi_i = \psi_u - \varphi ;$$

$$\dot{U}_R = \dot{I} \cdot R = \frac{U}{z} \cdot R \cdot e^{j\psi_i} = U_R \cdot e^{j\psi_{uR}}; \quad U_R = U \cdot \frac{R}{z}; \quad \psi_{uR} = \psi_i = \psi_u - \varphi ;$$

$$\dot{U}_L = \dot{I} \cdot Z_L = \dot{I} \cdot j\omega L = \frac{U}{z} \omega L e^{j(\psi_i + 90^\circ)} = U_L e^{j\psi_{uL}} ;$$

$$U_L = U \frac{\omega L}{z}; \quad \psi_{uL} = \psi_u - \varphi + 90^\circ ;$$

$$\dot{U}_C = \dot{I} \cdot Z_C = \dot{I} \frac{1}{j\omega C} = \frac{U}{z} \frac{1}{\omega C} e^{j(\psi_i - 90^\circ)} = U_C e^{j\psi_{uC}} ;$$

$$U_C = U \frac{1}{z\omega C}; \quad \psi_{uC} = \psi_u - \varphi - 90^\circ .$$

Перейдемо до оригіналів струму і напруги

$$i(t) = \frac{U}{z} \sqrt{2} \cos(\omega t + \psi_u - \varphi) = I_m \cos(\omega t + \psi_i) ;$$

$$u_R(t) = \frac{U}{z} R \sqrt{2} \cos(\omega t + \psi_u - \varphi) = U_{mR} \cos(\omega t + \psi_{uR}) ;$$

$$u_L(t) = \frac{U}{z} \omega L \sqrt{2} \cos(\omega t + \psi_u - \varphi + 90^\circ) = U_{mL} \cos(\omega t + \psi_{uL}) ;$$

$$u_C(t) = \frac{U}{z\omega C} \sqrt{2} \cos(\omega t + \psi_u - \varphi - 90^\circ) = U_{mC} \cos(\omega t + \psi_{uC}) .$$

Отримані результати показують, що параметри процесів в колі залежать як від співвідношення між параметрами елементів кола, так і від частоти прикладеного впливу.

Побудуємо графіки залежності від частоти компонентів комплексного опору кола

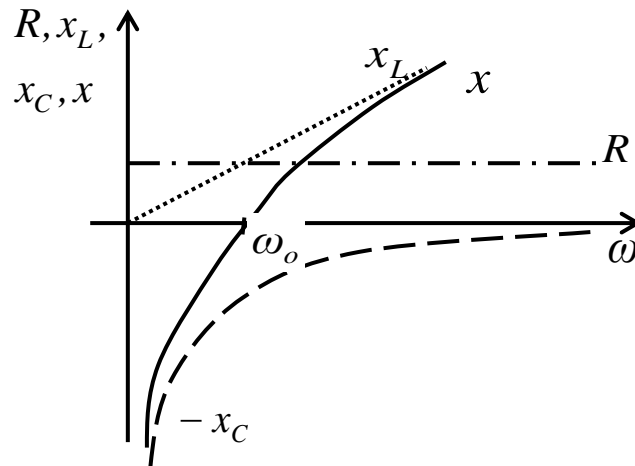


Рис.2.26.

На частоті $\omega = \omega_0$ реактивні опори індуктивності і ємності мають одне і те ж значення, тобто $x_L = x_C$, еквівалентний реактивний опір кола $x = 0$, тобто опір - чисто активний, а повне опір кола має мінімальне значення $Z = Z_{\min} = R$. Амплітуда струму в колі при цьому - максимальна.

Режим в електричному колі, який встановлюється на частоті ω_0 , називається резонансом, а частота ω_0 - резонансною частотою.

Залежність реактивних опорів від частоти обумовлює не тільки частотну залежність амплітуд струму і напруги, а й характеру кола.

В діапазоні частот від 0 до ω_0 $x_L < x_C$, еквівалентний реактивний опір $x < 0$, тобто має ємнісний характер, а досліджуване коло еквівалентне послідовному R, C - колу, струм випереджає по фазі прикладена до входу кола напругу, тобто $\varphi = \psi_u - \psi_i < 0$.

На резонансній частоті ω_0 еквівалентний реактивний опір $x = 0$, еквівалентний опір кола чисто активний, коло еквівалентна колу з активним опором, струм і прикладена напруга синфазні.

В діапазоні частот від ω_0 до ∞ $x_L > x_C$, еквівалентний реактивний опір $x > 0$, тобто має індуктивний характер, а досліджуване коло еквівалентне послідовному R, L - колу, струм відстає по фазі від прикладеної до входу кола напруги, тобто $\varphi = \psi_u - \psi_i > 0$.

Зазначені особливості наочно можна проілюструвати за допомогою векторних діаграм.

Якщо задана початкова фаза напруги на вході кола, то побудову діаграми можна починати з вектора, який зображує цю напругу.

Раніше ми відзначали, що побудову векторної діаграми в загальному випадку доцільно починати з вектора, що зображує електричну величину, яка є загальною для більшості елементів. В даному випадку - з вектора, який зображує струм \dot{I} в колі. Положення вектора на комплексній площині можна вибрати довільно, так як принципово важливо встановити фазові співвідношення для певних величин, а не власне їх початкові фази. Далі будуюмо вектор напруги \dot{U}_R на активному опорі, який збігається з вектором струму - ці величини синфазні. З кінця вектора \dot{U}_R під кутом 90° до нього будуюмо вектор напруги на

індуктивності \dot{U}_L (напруга на індуктивності випереджає струм в ній на 90°). З кінця вектора \dot{U}_L під кутом -90° до вектора \dot{U}_R будемо вектор напруги на ємності \dot{U}_C (напруга на ємності відстає від струму в ній на 90°).

Будемо результуючий вектор, або вектор, що зображає сумарну (вхідну) напругу \dot{U} .

Кожному значенню частоти відповідає певне співвідношення між реактивними опорами, а також між напругою на індуктивності і на ємності і, як наслідок, вид векторної діаграми.

Як приклад, наведемо векторну діаграму для частоти $\omega > \omega_0$

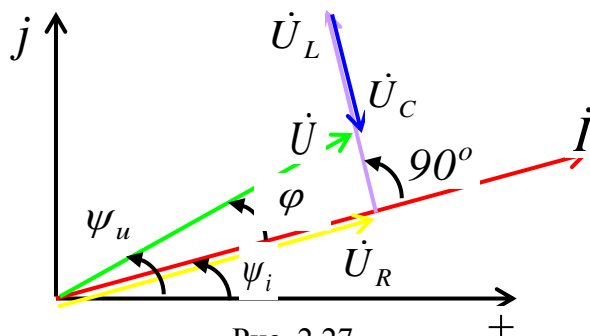


Рис. 2.27

2. 4. 5. Дільники напруги

При конструюванні електро- і радіоапаратури іноді вдаються до забезпечення живлення декількох окремих елементів або частин електричних кіл (пристроїв) різними напругами від одного джерела. Цей прийом здійснюють за допомогою дільників напруги.

Для поділу напруги використовують електричне коло у вигляді послідовного з'єднання двох або більше пасивних елементів. Струм в такому колі - загальний для всіх елементів, а падіння напруги на кожному елементі визначається величиною його опору.

У загальному випадку схема дільника напруги має такий вигляд

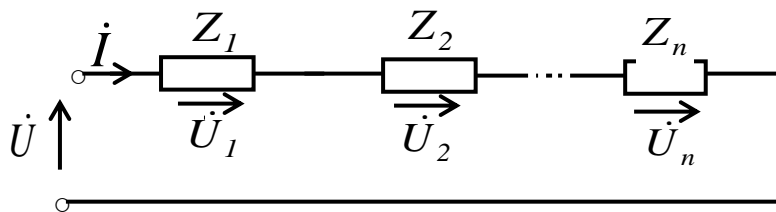


Рис. 2.28

Розрахунок дільника напруги здійснюють згідно з другим законом Кірхгофа і законом Ома.

З огляду на властивості послідовного з'єднання пасивних елементів, запишемо

$$\dot{U}_{zk} = \dot{I} \cdot Z_k = \dot{U} \cdot \frac{Z_k}{Z_{\Sigma}},$$

де $Z_{\Sigma} = \sum_{k=1}^n Z_k$ - еквівалентний опір.

Таким чином, напруга на елементах дільника знаходиться в тому ж співвідношенні, що і їх опори.

У дільниках напруги, складених з резисторів, частина енергії перетворюється в тепло, тому такі дільники використовують для живлення малопотужних споживачів.

У дільниках напруги змінного струму з метою зменшення енергії, яка витрачається власне в дільнику, можна використовувати дільник, складений з ємностей.

Формула дільника напруги в окремих випадках при розрахунках електричних кіл дозволяє досягти певних спрощень.

2.5. Процеси в електричних колах з паралельним з'єднанням елементів

2.5.1. Еквівалентні перетворення схем з паралельним з'єднанням елементів

Розглянемо електричне коло, утворене паралельним з'єднанням n елементів, опір яких відповідно Z_1, Z_2, \dots, Z_n . Складемо комплексну схему заміщення (рис.2.29)

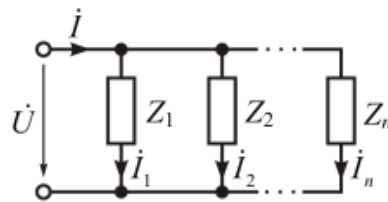


Рис. 2.29

Рівняння, що представляє процеси в розглянутому електричному колі, відповідно до першого закону Кірхгофа:

$$\dot{i} = \dot{i}_1 + \dot{i}_2 + \dots + \dot{i}_n = \frac{\dot{U}}{Z_1} + \frac{\dot{U}}{Z_2} + \dots + \frac{\dot{U}}{Z_n} = \frac{\dot{U}}{Z_e} = Y_3 \dot{U},$$

$$Y_3 = Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n = (G_1 + G_2 + \dots + G_n) +$$

$$\text{де} \quad + j(B_1 + B_2 + \dots + B_n) = \sum_{k=1}^n G_k + j \sum_{k=1}^n B_k = G_3 + jB_3$$

- еквівалентна провідність ділянки кола (схеми) з паралельним з'єднанням елементів.

Таким чином, еквівалентна провідність схеми (ділянки схеми) з паралельним з'єднанням елементів дорівнює сумі провідностей цих елементів.

При розрахунках схему (ділянку схеми) з паралельним з'єднанням n елементів можна замінити одним елементом з еквівалентною провідністю (опором).

Комплексний опір перетвореної схеми в загальному випадку визначається наступним співвідношенням:

$$Z_3 = \frac{1}{Y_3} = \frac{1}{Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n}.$$

Поширенням в практиці розрахунків і перетворень є випадок, коли коло (ділянка кола) складається з двох паралельно з'єднаних елементів. Тоді еквівалентна провідність цієї ділянки

$$Y_3 = \frac{1}{Z_3} = \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} = \frac{Z_1 + Z_2}{Z_1 Z_2},$$

а її опір

$$Z_3 = \frac{Z_1 Z_2}{Z_1 + Z_2}.$$

Звернемо увагу на те, що еквівалентний опір кола з паралельним з'єднанням елементів менше найменшого з опорів елементів.

2.5.2. Процеси в паралельному RL - колі

Розглянемо процеси в електричному колі, утвореному паралельним з'єднанням R і L елементів. Визначимо струми в гілках, якщо на вході кола діє напруга $u(t) = U_m \sin(\omega t + \psi_u)$. Побудуємо комплексну еквівалентну схему рис. 2.31.

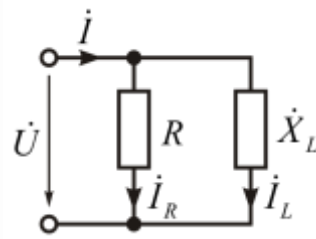


Рис. 2.31

Відповідно до першого закону Кірхгофа

$$\dot{i} = \dot{i}_R + \dot{i}_L = \frac{\dot{U}}{R} + \frac{\dot{U}}{\dot{X}_L} = Y_3 \dot{U},$$

де $Y_3 = G - jB = \frac{1}{R} - j\frac{1}{\omega L} = ye^{-j\varphi}$ - комплексна еквівалентна провідність кола.

Повна провідність та фазовий зсув між напругою і струмом

$$y = \sqrt{G^2 + B_L^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{R}\right)^2 + \left(\frac{1}{\omega L}\right)^2}, \quad \varphi = \arctg \frac{R}{\omega L}$$

залежать від параметрів елементів і частоти зовнішнього впливу.

Комплексні струми в гілках:

$$\dot{I} = I e^{j\psi_i} = Y_3 \dot{U} = y U e^{j(\psi_u - \varphi)}; \quad \dot{I}_R = I_R e^{j\psi_{iR}} = \frac{\dot{U}}{R} = \frac{U}{R} e^{j\psi_u};$$

$$\dot{I}_L = I_L e^{j\psi_{iL}} = \frac{\dot{U}}{\dot{X}_L} = \frac{U}{\omega L} e^{j(\psi_u - 90^\circ)}.$$

Перейдемо до миттєвих значень (оригіналів) струмів:

$$i(t) = \frac{U_m}{z} \sin(\omega t + \psi_u - \varphi);$$

$$i_R(t) = \frac{U_m}{R} \sin(\omega t + \psi_u);$$

$$i_L(t) = \frac{U_m}{\omega L} \sin(\omega t + \psi_u - 90^\circ).$$

З останніх співвідношень випливає:

- струм в нерозгалуженій частині схеми відстає по фазі від прикладеної напруги на кут $90^\circ > \varphi > 0$;

- струм і напруга на активному опорі синфазні;

- струм в індуктивності відстає по фазі від напруги на кут 90° .

Векторна діаграма напруги і струмів для даного випадку представлена на рис. 2.32; векторна діаграма провідностей («трикутник провідностей») - на рис. 2.33.

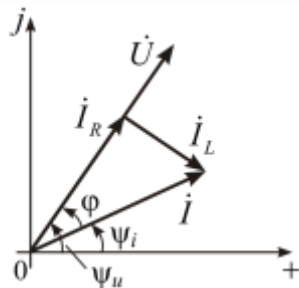


Рис. 2.32

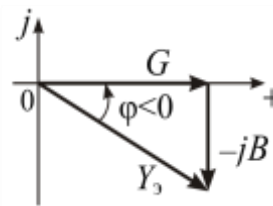


Рис. 2.33

В даному колі діють як активна, так і реактивна складові потужності

$$P = UI \cos \varphi ; \quad P_Q = UI \sin \varphi .$$

2.5.3. Процеси в паралельному RC- колі

Розглянемо процеси в електричному колі, утвореному паралельним з'єднанням R і C елементів (рис. 2.34). Визначимо струми в гілках, якщо на вході кола діє напруга $u(t) = U_m \sin(\omega t + \psi_u)$.

Побудуємо комплексну еквівалентну схему (рис. 2.35).

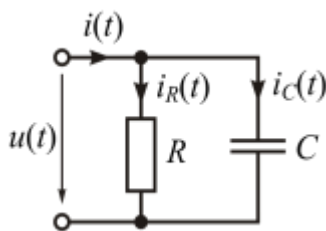


Рис. 2.34

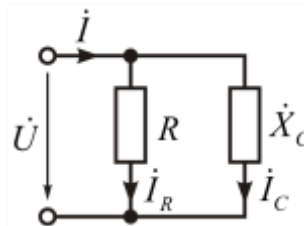


Рис. 2.35

Відповідно до першого закону Кірхгофа

$$i = i_R + i_C = \frac{\dot{U}}{R} + \frac{\dot{U}}{\dot{X}_C} = Y_3 \dot{U},$$

де $Y_3 = G + jB = \frac{1}{R} + j\omega C = ye^{j\varphi}$ - комплексна еквівалентна провідність схеми.

Повна провідність та фазовий зсув між напругою і струмом

$$y = \sqrt{(1/R)^2 + (\omega C)^2}; \quad \varphi = \arctg R\omega C$$

залежать від параметрів елементів та частоти зовнішнього впливу.

Комплексні струми в гілках:

$$\dot{i} = I e^{j\psi_i} = Y_3 \dot{U} = y U e^{j(\psi_u + \varphi)};$$

$$\dot{i}_R = I_R e^{j\psi_{iR}} = \frac{\dot{U}}{R} = \frac{U}{R} e^{j\psi_u};$$

$$\dot{i}_C = I_C e^{j\psi_{iC}} = \frac{\dot{U}}{X_C} = \omega C U e^{j(\psi_u + 90^\circ)}.$$

Перейдемо до миттєвих значень (оригіналів) струмів:

$$i(t) = \frac{U_m}{z} \sin(\omega t + \psi_u + \varphi);$$

$$i_R(t) = \frac{U_m}{R} \sin(\omega t + \psi_u);$$

$$i_C(t) = \omega C U_m \sin(\omega t + \psi_u + 90^\circ).$$

З останніх співвідношень випливає:

- струм в нерозгалуженій частині кола випереджає по фазі прикладену напругу на кут $90^\circ > \varphi > 0$;

- струм і напруга на активному опорі синфазні;

- струм в ємності випереджає по фазі прикладену напругу на кут 90° .

Векторна діаграма напруги і струмів для даного кола представлена на рис. 2.36;

векторна діаграма провідностей («трикутник провідностей») - на рис. 2.37

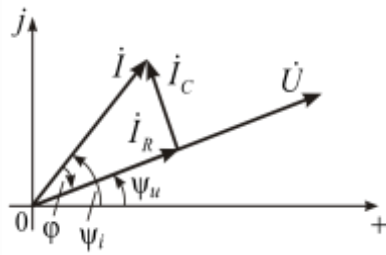


Рис. 2.36

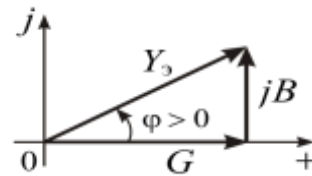


Рис. 2.37

В даному колі діють як активна, так і реактивна складові потужності

$$P = UI \cos \varphi, \quad P_Q = UI \sin \varphi.$$

2.5.4. Процеси в паралельному RLC-колі

Розглянемо процеси в електричному колі, утвореному паралельним з'єднанням R, L, C елементів (рис. 2.38), на вході якої діє гармонічна напруга $u(t) = U_m \sin(\omega t + \psi_u)$.

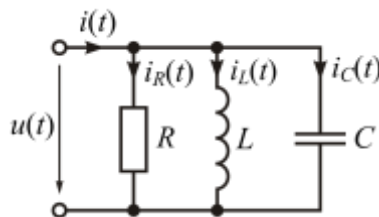


Рис. 2.38

Побудуємо комплексні схеми заміщення - вихідну і після еквівалентних перетворень (рис. 2.39).

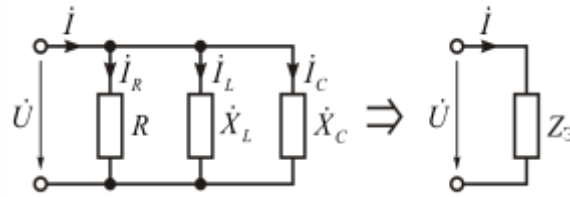


Рис. 2.39

Для визначення струмів в гілках знайдемо еквівалентну провідність

$$Y_3 = G_R + \dot{B}_L + \dot{B}_C = \frac{1}{R} + \frac{1}{j\omega L} + j\omega C = \frac{1}{R} + j\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right) = G_R + jB = ye^{j\varphi},$$

де $B = B_L - B_C = \frac{1}{\omega L} - \omega C$ – еквівалентна реактивна провідність кола;

$y = \sqrt{G_R^2 + B^2}$ – модуль комплексної провідності, або повна провідність, кола;

$\varphi = \text{artg} \frac{B}{G_R}$ – аргумент комплексної провідності.

Відповідно до закону Ома визначимо комплексні зображення струмів в нерозгалуженій частини схеми і в гілках:

$$\dot{I} = Y_3 \dot{U} = ye^{j(\psi_u + \varphi)} = Ie^{j\psi_i},$$

де $I = Uy$; $\psi_i = \psi_u + \varphi$;

$$\dot{I}_R = \frac{\dot{U}}{R} = \frac{U}{R} e^{j\psi_u} = I_R e^{j\psi_{iR}},$$

де $I_R = \frac{U}{R}$; $\psi_{iR} = \psi_u$;

$$\dot{I}_L = \dot{B}_L \dot{U} = \frac{\dot{U}}{j\omega L} = \frac{U}{\omega L} e^{j(\psi_u - 90^\circ)} = I_L e^{j\psi_{iL}},$$

де $I_L = \frac{U}{\omega L}$; $\psi_{iL} = \psi_u - 90^\circ$;

$$\dot{I}_C = \dot{B}_C \dot{U} = j\omega C \dot{U} = \omega C U e^{j(\psi_u + 90^\circ)} = I_C e^{j\psi_{iC}},$$

де $I_C = U\omega C$; $\psi_{iC} = \psi_u + 90^\circ$.

Від комплексних зображень перейдемо до оригіналів шуканих величин:

$$i(t) = \text{Im } \dot{I} \sqrt{2} e^{j\omega t} = U_m y \sin(\omega t + \psi_u + \varphi) = I_m \sin(\omega t + \psi_i);$$

$$i_R(t) = \text{Im } \dot{I}_R \sqrt{2} e^{j\omega t} = \frac{U_m}{R} \sin(\omega t + \psi_u) = I_{mR} \sin(\omega t + \psi_{iR});$$

$$i_L(t) = \text{Im } \dot{I}_L \sqrt{2} e^{j\omega t} = \frac{U_m}{\omega L} \sin(\omega t + \psi_u - 90^\circ) = I_{mL} \sin(\omega t + \psi_{iL});$$

$$i_C(t) = \text{Im } \dot{I}_C \sqrt{2} e^{j\omega t} = \omega C U_m \sin(\omega t + \psi_u + 90^\circ) = I_{mC} \sin(\omega t + \psi_{iC}).$$

Отримані результати показують, що процеси в розглянутому колі залежать як від співвідношення між параметрами його елементів, так і від частоти зовнішнього впливу.

Побудуємо графіки залежності від частоти компонентів комплексної провідності (рис. 2.40)

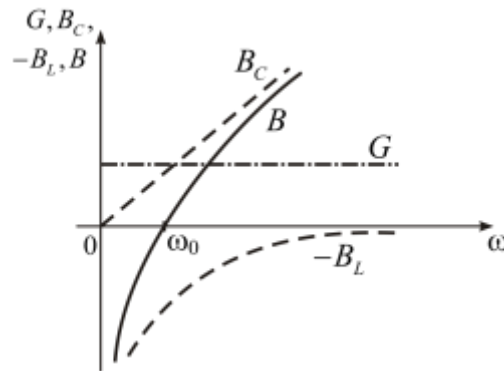


Рис. 2.40

На частоті ω_0 реактивні провідності індуктивності і ємності мають одне і те ж значення (по модулю), тобто $|-B_L| = |B_C|$. В цьому випадку еквівалентна реактивна провідність кола $B = 0$, комплексна провідність - чисто активна, а повна провідність має мінімальне значення $y = y_{\min} = G_R$. Амплітуда струму I_m в нерозгалуженій частині кола при цьому мінімальна.

Режим в електричному колі, який встановлюється на частоті ω_0 , називається резонансом, а частота $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ - резонансною частотою. Залежність реактивних провідностей від частоти обумовлює частотну залежність не тільки амплітуд струмів в гілках, але і загального характеру кола.

В діапазоні частот від 0 до ω_0 еквівалентна реактивна провідність $B < 0$, так як $|B_L| > B_C$, комплексна провідність при цьому має індуктивний характер, а

досліджуване коло еквівалентне паралельному RL-колу, струм в нерозгалуженій частині відстає по фазі від прикладеної до входу кола напруги, тобто, $\varphi = \psi_u - \psi_i > 0$.

На резонансній частоті ω_0 еквівалентна реактивна провідність $B = 0$, так як $|B_L| = B_C$, комплексна провідність чисто активна, коло еквівалентне колу з активною провідністю, струм в нерозгалуженій частині з прикладеною напругою синфазні, тобто, $\varphi = \psi_u - \psi_i = 0$.

В діапазоні частот від ω_0 до ∞ еквівалентна реактивна провідність $B > 0$, так як $|B_L| < B_C$, комплексна провідність при цьому має ємнісний характер, а досліджуване коло еквівалентне паралельному RC- колу, струм в нерозгалуженій частині випереджає по фазі прикладену до входу напругу, тобто $\varphi = \psi_u - \psi_i < 0$.

Зазначені особливості розглянутого кола наочно подамо за допомогою векторної діаграми. Проілюструємо основні прийоми її побудови. Як приклад на рис. 2.41 зображена векторна діаграма, що представляє процеси в колі з паралельним включенням R, L, C елементів для частоти $\omega > \omega_0$.

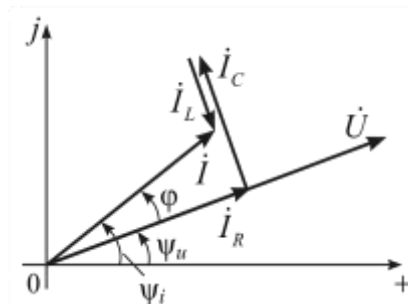


Рис. 2.41

Побудову векторної діаграми в загальному випадку доцільно починати з вектора, який зображує електричну величину, загальну для більшості елементів кола, в даному випадку з вектора, який зображує напруга \dot{U} на вході кола. Положення цього вектора на комплексній площині вибираємо довільно, так як принципово важливо встановити фазові співвідношення для певних електричних величин, а не власне їх початкові фази. Далі будуємо вектор струму \dot{I}_R в активному опорі, який збігається за напрямком з вектором напруги

\dot{U} . З огляду на наступне додавання зображуючих векторів, з кінця вектора \dot{I}_R під кутом $+90^\circ$ до нього і до вектора \dot{U} (струм в ємності випереджає напругу на ній на 90°) будуюмо вектор, що зображує струм в ємності \dot{I}_C . З кінця вектора \dot{I}_C під кутом -90° до вектора \dot{I}_R і до вектора \dot{U} (струм в індуктивності відстає від напруги на ній на 90°) будуюмо вектор, що зображує струм в індуктивності \dot{I}_L . Довжина вектора \dot{I}_L менше довжини вектора \dot{I}_C , так як характер реактивності на частоті $\omega > \omega_0$ - ємнісний.

Будуємо результуючий вектор \dot{I} , який зображує сумарний струм в нерозгалуженій частині кола. Цей струм випереджає напругу на вході кола на кут φ в зв'язку з ємнісним характером кола. Кожному значенню частоти відповідає певне співвідношення між реактивними провідностями, а також між струмами в індуктивності і ємності і, як наслідок, вид векторної діаграми.

4.5.5. Дільники струму

Електричне коло (ділянка електричного кола), утворена паралельним з'єднанням пасивних елементів, являє собою дільник струму (рис. 2.42).

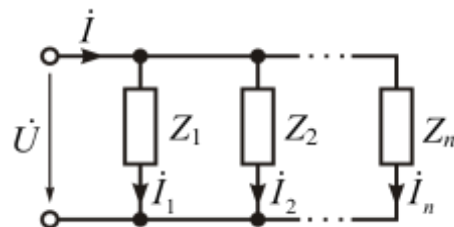


Рис. 2.42

Якщо на вході розглянутого кола діє напруга, струми в її гілках обернено пропорційні опорам гілок.

Насправді
$$\dot{i}_1 = \frac{\dot{U}}{Z_1}; \dot{i}_2 = \frac{\dot{U}}{Z_2}; \dot{i}_n = \frac{\dot{U}}{Z_n}.$$

Представляючи напругу на вході кола через еквівалентний опір (провідність)

$$\dot{U} = Z\dot{i}_3 = \frac{\dot{i}}{Y_3},$$

отримуємо в загальному вигляді формулу для розрахунку струму в будь-якій гілці, або формулу дільника струму

$$i_k = \frac{Y_k}{Y_3} i, \text{ або } i_k = \frac{Z_3}{Z_k} i,$$

де i - струм в нерозгалуженій частині, або струм, що віддається джерелом.

Використовуючи загальну формулу, запишемо формули для розрахунку струмів в гілках поширеного на практиці випадку двоелементного дільника:

$$i_{z_1} = \frac{Z_1 Z_2}{(Z_1 + Z_2) Z_1} i = \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2} i;$$

$$i_{z_2} = \frac{Z_1 Z_2}{(Z_1 + Z_2) Z_2} i = \frac{Z_1}{Z_1 + Z_2} i.$$

Крім розрахунку параметрів дільників струму, використання наведених співвідношень в ряді випадків дозволяє в певній мірі спростити розрахунки розгалужених електричних кіл.