6. Елементи теорії сигналів.

6.1. Спектральне представлення періодичних сигналів

Будь-який реальний сигнал можна представити сукупністю простих сигналів, які складають (утворюють) певну систему ортогональних функцій.

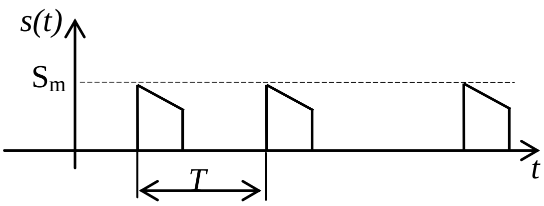
З відомих систем ортогональних функцій найбільш поширені тригонометричні та комплексні експоненціальні. Згадані функції лежать в основі так званого гармонічного (класичного) спектрального представлення сигналів.

Гармонічний аналіз застосовують як для періодичних, так і для неперіодичних сигналів.

Розглянемо періодичний сигнал, що представляє собою послідовність імпульсів довільної форми.

$$s(t) = s(t + nT),$$

де T - період проходження (повторення) імпульсів;



$n = 1,2,...$ - цілі числа.

Якщо функція $s(t)$ задовольняє умовам Дирихле, то вона може бути представлена рядом Фур'є в будь - якій з наступних форм

Ошибка! Ошибка внедренного объекта.

$$s(t) = \frac{C_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos(n\omega_1 t - \psi_n)$$

$$s(t) = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \dot{C}_n \cdot e^{jn\omega_1 t}$$

Усі форми мають між собою зв'язок, їх коефіцієнти визначаються наступними співвідношеннями

$$\frac{a_0}{2}=\frac{C_0}{2}=\frac{1}{T}\int_0^T s(t)dt$$

$$a_n=\frac{2}{T}\int_0^T s(t)\cos n\omega_1 t dt$$

$$b_n=\frac{2}{T}\int_0^T s(t)\sin n\omega_1 t dt$$

$$\dot{C}_n=C_n\cdot e^{-j\psi_n}=a_n-jb_n=\frac{2}{T}\int_0^T s(t)\cdot e^{-jn\omega_1 t}dt$$

$$C_n=\sqrt{a_n^2+b_n^2}$$

$$\psi_n=\mathrm{arktg}\frac{b_n}{a_n}$$

$$a_n=C_n\cos\psi_n$$

$$b_n=C_n\sin\psi_n$$

Фізичний зміст гармонічного спектрального представлення полягає в наступному: періодичний сигнал представляється постійною складовою C_0 та нескінченним числом гармонік, кожна з яких має певні, "свої", частоту $\omega_n=n\omega_1$, амплітуду C_n і початкову фазу ψ_n.

Сукупність усіх гармонік, з яких складається сигнал, називається частотним спектром сигналу. З частотного спектру виділяють амплітудо-частотний (АЧС) та фазо-частотний (ФЧС) спектри.

Амплітудо-частотний спектр - це сукупність постійної складової C_0 та усіх гармонік з амплітудами C_n. Він показує, як залежать від частоти амплітуди спектральних складових.

Постійну складову C_0 спектру умовно називають «нульовою гармонікою».

Гармонічне коливання з частотою ω_1 називається першою, або основною, гармонікою. Далі йдуть друга, третя і т.д. гармоніки з частотами відповідно $\omega_2=2\omega_1,\omega_3=3\omega_1,\dots\omega_n=n\omega_1$. Частота першої гармоніки дорівнює частоті проходження імпульсів

$$\omega_1 = 2\pi f_1 = \frac{2\pi}{T}$$

Аргумент $n\omega_1 t - \psi_n$ є повна фаза n-ої гармоніки, а ψ_n - її початкова фаза.

Часто мають справу с сигналами, затриманими на час t_0 відносно початку спостереження, тобто відносно моменту $t = 0$. Запишемо формулу ряду з врахуванням затримки сигналу.

$$s(t - t_0) = \frac{C_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos[n\omega_1 (t - t_0) - \psi_n]$$

Видно, що затримка сигналу не впливає на амплітуди гармонік, тобто АЧС від початкового зміщення сигналу не залежить. При цьому початкові фази визначаються співвідношенням

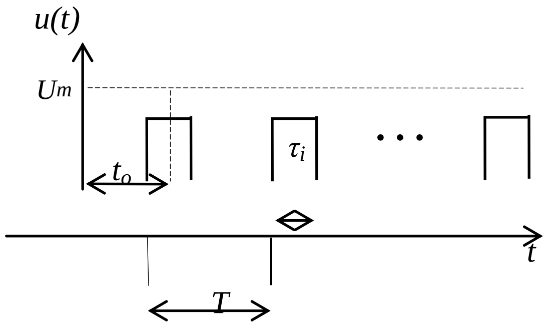
$$\psi_n^{/} = n\omega_1 t_0 - \psi_n$$

яке визначає вплив початкового зміщення сигналу на його ФЧС.

6.2. Частотні спектри періодичної послідовності прямокутних імпульсів

Розглянемо спектральне представлення сигналу у вигляді періодичної послідовності прямокутних імпульсів напруги.

Епюра сигналу приведена на рисунку



U_m- амплітуда, T-період повторення, τ_i-тривалість імпульсів, t_o -початкове зміщення , q -скважність.

$$q = \frac{T}{\tau_i}$$

Представимо сигнал рядом Фур'є. Його коефіцієнти:

$$\frac{a_o}{2} = \frac{1}{T}\int_0^T u(t)dt = \frac{U_m}{T}\int_{-\tau_i/2}^{\tau_i/2} dt = U_m \frac{\tau_i}{T} = \frac{U_m}{q} = U_o;$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{-\tau_i/2}^{\tau_i/2} U_m \cos n\omega_1 t dt = \frac{4U_m}{T}\frac{\sin\frac{n\omega_1\tau_i}{2}}{n\omega_1} = \frac{2U_m}{q}\frac{\sin\frac{n\pi}{q}}{\frac{n\pi}{q}}$$

Інтеграл від непарної функції в симетричних границях дорівнює 0, тому $b_n = 0$.

Знайдені коефіцієнти, підставимо у вихідну формулу:

$$u(t) = \frac{U_m}{q} + \frac{2U_m}{q}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{n\pi}{q}}{\frac{n\pi}{q}}\cdot\cos(n\omega_1 t - n\omega_1 t_o).$$

Отримане співвідношення показує залежність амплітуд і початкових фаз гармонік спектру від частоти і параметрів сигналу.

Розглянемо частотні спектри окремо.

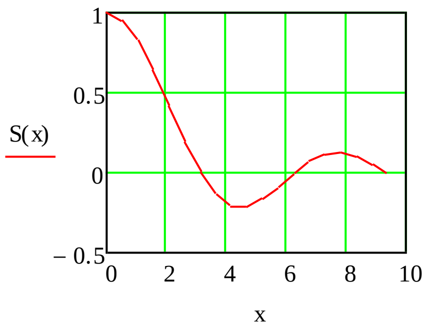
Амплітудо - частотний спектр

$$U_{mn}(n) = U_o + \sum_{n=1}^{\infty} U_{mn} = \frac{U_m}{q} + \frac{2U_m}{q}\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{\sin\frac{n\pi}{q}}{\frac{n\pi}{q}}\right|,$$

де: $U_o = \frac{U_m}{q}$ - значення постійної складової, або „нульової“ гармоніки;

$U_{mn} = \frac{2U_m}{q}\left|\frac{\sin\frac{n\pi}{q}}{\frac{n\pi}{q}}\right|$ - значення амплітуди *n*-ої гармоніки.

Огинаюча АЧС визначається функцією $\left|\frac{\sin x}{x}\right|$. Ця функція має назву "арочний синус" і позначається $S_a(x)$. Графік "арочного синусу" представлений на рисунку.



Основні властивості:

- функція має періодичну (арочну) форму і знакозмінний характер;

- при $x = 0$ функція має максимальне значення, тобто $S_a(0) = 1$;

- функція $S_a(x) = 0$, якщо $x = k\pi$ ($k = 1, 2, \ldots$); k визначає номер арки;

- максимальне значення функції в кожній наступній арці зменшується.

Представимо аргумент "арочного синуса" в формулі амплітуд спектральних складових наступним чином

$$\frac{n\pi}{q} = \frac{n\pi\tau_i}{T} = \frac{n\omega_1\tau_i}{2} = k\pi.$$

З отриманого співвідношення знайдемо частоти $\omega_k = n\omega_1$, на яких $S_a(x) = 0$ і, як наслідок, амплітуди відповідних спектральних складових дорівнюють нулю, тобто частоти складових, відсутніх в спектрі

$$\omega_k = \frac{2k\pi}{\tau_i} = kq\omega_1.$$

Якщо скважність сигналу q - ціле число, частоти ω_k співпадають з частотами певних гармонік, а саме тими, номери яких кратні скважності

$$\omega_k = kq\omega_1 = n\omega_1; \; n = kq.$$

Амплітуди цих гармонік дорівнюють нулю, тобто ці складові в спектрі сигналу відсутні. При цьому в кожній арці спектру розміщені $q - 1$ гармонік.

В загальному випадку скважність може бути дробовим числом.

В формулі для амплітуд спектральних складових для зручності враховане модульне значення «арочного синусу»

Наочне уявлення про структуру спектру, його ширину і відносну величину його складових дає графічне зображення спектру, або спектрограма АЧС в координатах "частота-амплітуда".

Можна скористатися наступним порядком побудови спектрограми:

- розраховують частоти гармонік ω_n або f_n

$$\omega_1 = \frac{2\pi}{T},\ \omega_2 = \frac{4\pi}{T},\ \omega_n = n\frac{2\pi}{T},...(f_1 = \frac{1}{T},\ f_2 = \frac{2}{T},\ f_n = n\frac{1}{T},...);$$

- розраховують частоти ω_k (f_k) , на яких функція $S_a(x)$ =0

$$\omega_k = kq\omega_1 = kq\frac{2\pi}{T} = k\frac{2\pi}{\tau_i},\quad (f_k = kqf_1 = kq\frac{1}{T} = k\frac{1}{\tau_i});$$

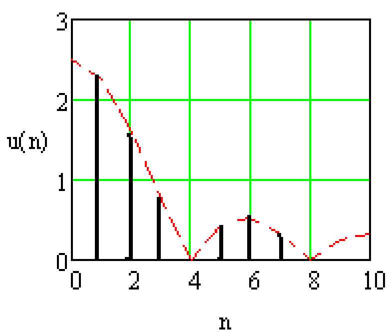
- розраховані частоти позначають на частотній вісі, дотримуючись вибраного масштабу;

- розраховують постійну складову, амплітуди гармонік, починаючи з першої і наносять їх на спектрограму у вигляді відрізків прямих відповідної довжини, перпендикулярних вісі частот з точок, які відповідають частотам гармонік.

Спектрограма АЧС може бути побудована наближено, без деяких розрахунків. Для цього, визначивши і позначивши на частотній вісі характерні частоти ω_n або f_n , а також

ω_k або f_k , будують огинаючу АЧС відповідно з графіком модуля функції $S_a(x)$. Далі, з точок, що відповідають частотам гармонік, будують перпендикуляри до перетину з огинаючою.

Як приклад, побудуємо наближено АЧС сигналу зі скважністю $q = 4$



Відзначимо основні властивості АЧС ПППІ.

1. Частотний спектр дискретний та еквідистантний. Дискретний характер спектру свідчить про те, що енергія сигналу зосереджена в окремих гармоніках.

2. Частоти сусідніх гармонік відрізняються на величину ω_1 , яка визначається частотою повторення імпульсів, або їх періодом T.

3. Амплітуди гармонік прямо пропорційні амплітуді імпульсів та обернено пропорційні скважності. Їх величина змінюється відповідно до функції $S_a(x)$, тому найбільші амплітуди мають гармоніки, розташовані в перших арках спектру, з зростанням номера гармонік, їх амплітуди зменшуються.

4. Ширина спектральних арок (діапазон частот арки) однакова і залежить тільки від тривалості імпульсів

$$\Delta\omega_a = \frac{2\pi}{\tau_i}, \quad (\Delta f_a = \frac{1}{\tau_i}).$$

5. Зміна тривалості імпульсів при $T=const$ супроводжується зміною ширини арок, а також числа гармонік в них. Частоти гармонік при цьому не змінюються.

6. Зміна частоти повторення імпульсів при $\tau_i=const$ не викликає зміни ширини арок. При цьому частоти гармонік змінюються , змінюється і їх число в кожній арці.

7. АЧС не залежить від часового зміщення t_o імпульсів.

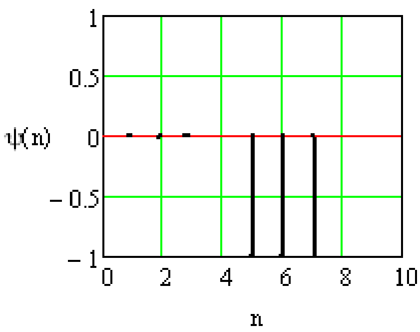
Фазочастотний спектр (ФЧС)

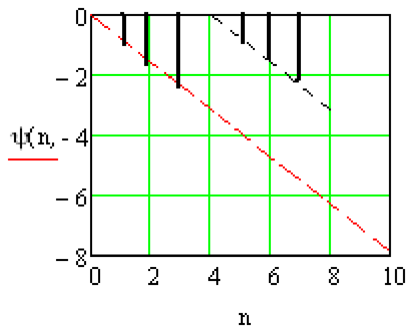
З співвідношення, що визначає фазочастотний спектр витікає, що початкові фази гармонік визначаються зміщенням імпульсів. Крім того, функція $S_a(x)$ обумовлює зміну початкових фаз гармонік на π при переході через нуль (з однієї арки в наступну). Отже, вираз для ФЧС запишемо у вигляді

$$\psi_n = n\omega_1 t_o \pm (k-1)\pi.$$

Спектрограма ФЧС будується аналогічно АЧС. Початкові фази, розраховані за попереднім співвідношенням, зображують у вигляді перпендикулярів до частотної вісі, їх довжина відповідає значенням початкових фаз з врахуванням масштабу. Знак перед другим доданком, вибирається, виходячи з зручності побудови. Для ілюстрації побудуємо ФЧС ПППІ, скважність якого $q = 4$, для двох випадків:

$t_o=0$ $t_o=0.5\tau_i$





Основні властивості ФЧС

1.Початкові фази гармонік залежать від їх номера, номера арки, в якій вони знаходяться, а також від t_o. Якщо $t_o=0$, то в межах кожної арки всі гармоніки мають однакові початкові фази. Перехід в сусідню арку супроводжується зміною початкової фази на $\pm\pi$. Якщо $t_o > 0$, то в межах арки початкові фази змінюються лінійно зі зміною частоти. При цьому здвиг початкової фази в межах кожної арки дорівнює

$$\Delta\psi_a = q\omega_1 t_o = \frac{2\pi}{\tau_i} t_o.$$

2.Огинаюча ФЧС- це відрізки прямих ліній в межах кожної арки. Вони проходять паралельно вісі частот або під певним кутом, в залежності від величини початкового зміщення сигналу.

Спектрограма ФЧС також може бути побудована наближено.

Розподіл потужності та енергії в спектрі ППІ

Потужність та енергія періодичного сигналу визначається постійною складовою та амплітудами гармонік. Ширина спектру теоретично нескінчена, але з зростанням номера гармонік їх амплітуди і потужність стрімко зменшуються.

На практиці під шириною спектра сигналу розуміють діапазон частот, в межах якого зосереджена переважна частина (≈ 95%)енергії. Її називають "ефективна ширина спектра" або «ефективний спектр» і позначають $\Delta\omega_e$.

Легко довести, що гармоніки сигналу у вигляді ППІ, розміщені в першій та другій арках спектру, містять не менше 95% енергії. Тому, як правило, під ефективною шириною спектру такого сигналу розуміють діапазон частот в межах двох перших арок, тобто

$$\Delta\omega_e \approx 4\pi/\tau_i \quad \text{або} \quad \Delta f_e \approx 1/\tau_i \,.$$

Отже, ширина спектра ППІІ визначається тільки тривалістю імпульсів. Чим коротший імпульс, тим більшу смугу частот займає його спектр і навпаки.

6.3 Проходження сигналів через лінійні електричні кола

6.3.1. Сутність спектрального методу аналізу проходження сигналів

Сутність спектрального методу аналізу процесів в електричному колі полягає в наступному: дія, або сигнал, на вході кола представляють в частотній області у вигляді сукупності гармонічних складових, які діють на інтервалі, тобто задовго до початку спостереження; сигнал на виході кола (реакція) у відповідності із принципом накладання визначається як сума гармонічних реакцій на кожну складову вхідного сигналу окремо.

Таким чином, задача зводиться до аналізу сталого режиму в колі гармонічного струму.

Нагадаємо, що відповідно до спектрального представлення, на вході одночасно діє сукупність гармонічних коливань з певною амплітудою, частотою й початковою фазою.

6.3..2. Проходження сигналів з дискретним спектром

Нехай на вході кола діє будь-який періодичний сигнал. Його представлення в частотній області, як відомо, здійснюють за допомогою ряду Фур'є, зокрема в комплексній формі

$$s_{вх}(t) = \frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\dot{C}_{n\,вх}\cdot e^{jn\omega_1 t} = \frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}C_{n\,вх}\cdot e^{-j\psi_{n\,вх}}\cdot e^{jn\omega_1 t}$$

Згадаємо, що зв'язок між комплексними зображеннями гармонічної дії на вході кола і його реакції визначається комплексною функцією кола.

$$K(j\omega_n) = \frac{\dot{C}_{n\,вих}}{\dot{C}_{n\,вх}}.$$

Отже, для визначення складових реакцій необхідно комплексні амплітуди складових вхідної величини помножити на значення комплексної функції на відповідних частотах.

$$\dot{C}_{n\,вих} = \dot{C}_{n\,вх} \cdot K(j\omega_n)$$

Таким чином, амплітудно-частотний спектр сигналу на виході кола одержують шляхом перемноження амплітудно-частотного спектру сигналу на вході кола на модуль комплексної функції кола, а його фазо - частотний спектр - додаванням фазо - частотного спектру вхідного сигналу і значення аргументу комплексної функції кола на відповідних частотах.

Порядок розрахунку спектра вихідного сигналу:

1. Представити вхідний сигнал у вигляді ряду Фур'є.

2. Визначити, відповідно з умовою задачі, комплексну функцію кола.

3. Обчислити комплексні амплітуди складових вихідного сигналу як добуток комплексних амплітуд складових вхідного сигналу на комплексну функцію кола на відповідних частотах.