Міністерство транспорту та зв’язку України
Державний департамент з питань зв’язку та інформатизації
Одеська національна академія зв’язку ім. О.С. Попова

Кафедра управління проектами та системного аналізу

Математичне програмування

МОДУЛЬ №1 “Математичне моделювання економічних досліджень та методи розв’язування ЗЛП”

Навчальний посібник
частина 1

Спеціальність: 7.050107, 7.050201
(для студентів усіх форм навчання)

Одеса – 2008

Навчальний посібник розроблений: доц. ***Щуровською А. Ю.***

Навчальний посібник розглянуто і схвалено на засіданні кафедри Управління проектами та системного аналізу

Протокол № 2 від „ 28 ” жовтня 2007 р.

Зав. кафедрою доц. ***Бобровнича Н. С.***

Навчальний посібник розглянуто і схвалено на засіданні Ради Інституту економіки і менеджмента

Протокол № 6 від „ 28 ” лютого 2008 р.

Директор ІЕМ доц. ***Захарченко Л. А.***

Редактор ***Кодрул Л. А.***

Комп’ютерне верстання
та макетування ***Корнійчук Є. С.***

ВСТУП

Вироблення й прийняття рішень є важливою складовою процесу управління й особистою функцією керівників і фахівців у галузі економіки. Для підвищення ефективності управлінських рішень потрібне глибоке вивчення економічних (виробничих) процесів різними методами.

Дуже важливо, в умовах розширення прав підприємств в області виробничо-господарської діяльності, їхньої самостійності в прийнятті управлінських рішень, набуття глибоких знань фахівцями новітніх досягнень економічної науки, методів математичного моделювання й прогнозування економічних процесів на основі інформаційних технологій оптимальних рішень.

Ці обставини висувають підвищені вимоги до якості підготовки економістів, які повинні володіти новітніми досягненнями науки і вміти, використовуючи їхній багатий арсенал методів, знаходити найефективніші управлінські рішення, а це, у свою чергу, визначає роль і місце математичних методів оптимізації в навчальному процесі.

Методи математичного програмування, будучи потужним інструментом досліджень економічних процесів, грають досить важливу роль в аналізі й синтезі економічного розвитку, забезпечують багаторівневу оптимізацію, що охоплює взаємозв'язки галузей, регіонів і підприємств.

Місце курсу "Математичне програмування" серед інших дисциплін визначається його важливістю для збагачення економічної науки точними методами кількісного аналізу, що сприяють її переходу на нову, більш високу ступінь, а також необхідністю застосування як потужного інструмента в економіко-математичному моделюванні економічних процесів.

Засвоєння курсу "Математичне програмування" припускає знання основ теорії множин, диференційного й інтегрального обчислення, лінійної алгебри, теорії ймовірностей і математичної статистики, а також основ економічної теорії.

У свою чергу, вивчення студентами названого курсу дає їм можливість успішно опанувати курсом економіко-математичного моделювання оптимізації економічних процесів.

Даний навчально-методичний посібник розроблений для покращення засвоєння навчального матеріалу дисципліни “Математичне програмування”, що викладається в ОНАЗ ім. О.С. Попова у вигляді курсу лекцій та практичних занять.

Пропонований навчально-методичний посібник рекомендується для використання у вивченні курсу "Математичне програмування" для студентів усіх форм навчання економічних спеціальностей.

У цьому навчальному посібнику наведені методичні рекомендації щодо побудови математичних моделей задач лінійного програмування, розглянуті приклади рішення задач, контрольні питання, запропоновані завдання для самостійного рішення.

З метою більш ефективного засвоєння навчального матеріалу кожна тема містить короткий теоретичний вступ, докладні методичні вказівки з описом рішення конкретних задач, варіанти задач для самостійного рішення, включаючи задачі підвищеної складності.

Особливу увагу в навчальному посібнику було приділено питанням побудови математичних моделей як основному й найбільш творчого етапу рішення задач.

Загальна характеристика дисципліни «Математичне програмування»

Навчальна дисципліна викладається для студентів за спеціальностями 7.050.107 – Економіка підприємства та 7.050.201 – Менеджмент організацій.

Для спеціальності 7.050.107 – Економіка підприємства:

Кількість кредитів ECTS – 1,5; модулів – 1; змістовних модулів – 6; загальна кількість годин – 81, у тому числі: лекцій – 32 год., практичних занять – 16 год., самостійна робота – 33 год., вид контролю – залік.

Для спеціальності 7.050.201 – Менеджмент організацій:

Кількість кредитів ECTS – 3; модулів – 2; змістовних модулів – 6; загальна кількість годин – 108, у тому числі: лекцій – 32 год., практичних занять – 32 год., самостійна робота – 44 год., вид контролю – залік.

Мета вивчення дисципліни

Цілий комплекс економічних задач на різних рівнях управління народним господарством має багато варіантів розв'язання, серед яких потрібно знайти найефективніший, тобто оптимальний.

Математичне програмування – курс, що належить до розділу прикладної математики і формально об'єднує методи знаходження екстремуму функцій від багатьох змінних, на які накладаються обмеження.

Математичне програмування часто називають дисципліною, що вивчає методи оптимізаційного планування, тобто саме методи знаходження найефективнішого (оптимального) плану (розв'язання) серед багатьох допустимих планів тієї чи іншої економічної задачі.

Предметом вивчення курсу "Математичне програмування" є способи математичної формалізації економічних систем і методи знаходження оптимальних планів їх діяльності. У даному курсі під математичною формалізацією розуміється: визначення мети, яку переслідують суб'єкти управління; виявлення безлічі керованих параметрів економічної системи; виявлення основних відносин між керованими параметрами; представлення цих відносин у математичній формі; розробка методів одержання оптимальних рішень, що приводять до досягнення поставленої мети.

Ціль вивчення курсу – одержання базових знань і основних навичок: з побудови найбільш розповсюджених математичних моделей економічних систем; з використання методів пошуку оптимальних рішень. Дана ціль досягається шляхом вивчення наступних задач: розпізнання типу математичної моделі, яка щонайкраще відповідає конкретній економічній ситуації; побудова математичної моделі на основі словесного опису економічної ситуації; пошуку оптимального рішення на основі побудованої моделі.

Завдання курсу – навчити студентів моделюванню виробничих систем, засвоїти основні економічні категорії та концепцію оптимізації, опанувати методи і алгоритми розв'язування задач оптимізації, методологію побудови різних типів модулів для різноманітних галузей економіки.

Мета дисципліни – навчити студентів математично формулювати і складати економіко-математичні задачі, розв'язувати їх методами математичного програмування, знаходити найбільш ефективні рішення, готувати вхідну інформацію, аналізувати оптимальні результати і на їх основі формулювати конкретні висновки та пропозиції, давати рекомендації щодо удосконалення виробництва з метою підвищення його ефективності.

Студентам необхідно засвоїти основну методологію і методи математичного програмування та економіко-математичного моделювання виробничих систем у галузях економіки, тенденції розвитку дисципліни з метою впровадження в практику економічного аналізу, прогнозування, обчислення економічного ризику, маркетингу і менеджменту.

Для вивчення дисципліни необхідна підготовка з вищої математики: математичного аналізу, лінійної алгебри, аналітичної геометрії, теорії ймовірностей, математичної статистики, чисельних методів; технологій виробництва та надання послуг; статистики; економіки і аналізу народногосподарської діяльності галузі; організації галузі.

Вивчення дисципліни „Матемематичне програмування”, яка пов'язує дисципліни математичного циклу з економічними науками, передує вивченню курсів „Дослідження операцій", „Економетрія" та „Автоматизоване робоче місце менеджера”.

Зміст дисципліни

Модуль 1: *Математичне моделювання економічних досліджень та методи розв'язування ЗЛП (1,5 кредити)*

Структура залікового модуля 1

Змістовний модуль	Лекції (години)	Заняття		Самостійна робота (Інд. завдання)	Індивідуальна робота
		практичні	лабораторні		
Модуль 1: *Математичне моделювання економічних досліджень та методи розв'язування ЗЛП* (1,5 кредити; 54 год.)					
1. Математичне моделювання в математичних дослідженнях. Двовимірні задачі лінійного програмування та методи їх розв'язування	8	8		10	
2. Симплексний метод розв'язання ЗЛП та випадки і умови застосування М-Методу	8	8		12	
Разом 1 модуль, год.	**16**	**16**		**22**	

Зміст змістовних модулів (лекційних годин**)**

1. Математичне моделювання в математичних дослідженнях. Двовимірні задачі лінійного програмування та методи їх розв'язування. (8 год.)
   - 1.1. Метод математичного моделювання в економічних дослідженнях. Історичний нарис застосування математики в економічній науці. Моделювання як метод наукового пізнання. Економіко-математичне моделювання. Поняття оптимізаційної задачі. Класифікація оптимізаційних задач. Приклади лінійних оптимізаційних задач.
   - 1.2. Теорія лінійного програмування. Визначення канонічного виду задачі лінійного програмування(ЗЛП). Теорема про заміну нерівностей рівняннями. Форми запису ЗЛП. Основні визначення. Властивості множини планів (з доведенням опуклості і скінченності числа кутових точок). Основна теорема лінійного програмування (з доведенням).
   - 1.3. Методи розв'язування ЗЛП. Графоаналітичний метод. Характеристика та область застосування. Спосіб повного перебору. Спосіб напрямленого перебору.
2. Симплексний метод розв'язання ЗЛП та випадки і умови застосування М-Методу. (8 год.)

2.1. Симплексний метод. Теоретична передмова та етапи розв'язування. Побудова початкового опорного плану. Оцінка оптимальності опорного плану.
2.2. Перехід від одного опорного плану до іншого. Алгоритм симплексного методу (на прикладі задачі раціонального використання ресурсів).
2.3. Метод штучного базису (М-Метод). Побудова початкового опорного плану (складання М-Задачі). Теорема про зв'язок оптимальних планів М-Задачі і вихідної задачі.
2.4. Економічна інтерпретація симплексного методу.

Теми практичних занять модуля 1

№ з/п	Тема	Годин
1	Метод математичного моделювання в економічних дослідженнях. Поняття оптимізаційної задачі	2
2	Побудова оптимізаційних моделей для рішення економічних задач	2
3	Графоаналітичний метод (ГАМ) розв’язування ЗЛП	2
4	Аналіз чутливості оптимального рішення ЗЛП	2
5	Приведення ЗЛП до канонічної форми й одержання вихідного базисного рішення	2
6	Симплексний метод (СМ) розв’язування ЗЛП	4
7	М-Метод (ММ)	2
	Усього	**16**

Вихідні знання та уміння з модуля 1

Для успішного складання контрольних заходів залікового модуля 1, студенти повинні оволодіти наступними знаннями: класифікацією оптимізаційних задач, визначенням видів та форм ЗЛП, основною теоремою лінійного програмування, принципами застосування та алгоритмами графоаналітичного методу розв’язування ЗЛП, алгоритмом симплексного методу та методу штучного базису розв’язування ЗЛП. А також вміти: будувати оптимізаційні моделі для економічних задач та розв’язувати ЗЛП різними методами, відповідно до умов їх застосування.

Модуль 2: *Економіко-математичний аналіз та нелінійне програмування (1,5 кредити)*

Структура залікового модуля 2

Змістовний модуль	Лекції (години)	Заняття		Самостійна робота (Інд. завдання)	Індивідуальна робота
		практичні	лабораторні		
Модуль 2: *Економіко-математичний аналіз та нелінійне програмування* (1,5 кредити; 54 год.)					
1. Двоїстість у лінійному програмуванні. Економіко-математичний аналіз результатів розв'язання ЗЛП	4	4		4	
2. Транспортна задача	4	4		10	
3. Цілочислове лінійне програмування	4	4		4	
4. Теорія ігор	4	4		4	
Разом 2 модуль, год.	**16**	**16**		**22**	

Зміст змістовних модулів (лекційних годин**)**

1. Двоїстість у лінійному програмуванні. Економіко-математичний аналіз результатів розв'язання ЗЛП. (4 год.)
   - 1.1. Двоїстість у лінійному програмуванні. Поняття двоїстості. Види двоїстих пар задач. Перша і друга теореми двоїстості.
   - 1.2. Двоїстий симплексний метод.
   - 1.3. Економіко-математичний аналіз (ЕМА) результатів розв'язування ЗЛП. Зміст ЕМА. Загальна характеристика оцінок оптимального плану.
   - 1.4. Застосування оцінок для ЕМА (на прикладі задачі раціонального використання ресурсів).
2. Транспортна задача. (4 год.)
   - 2.1. Транспортна задача (ТЗ). Постановка й математична модель (закритої і відкритої).
   - 2.2. Властивості планів і метод розв'язування ТЗ. Випадки виродження планів і не єдності розв'язків ТЗ.
3. Цілочислове лінійне програмування. (4 год.)
   - 3.1. Цілочислове лінійне програмування. Постановка задачі цілочислового лінійного програмування.
   - 3.2. Класичні методи розв'язування задач цілочислового лінійного програмування: метод відсікання, комбінаторні та наближені методи.
   - 3.3. Метод Гоморі. Метод гілок та границь.

4. Теорія ігор. (4 год.)

4.1. Основні поняття теорії ігор.

4.2. Гра двох осіб із нульовою сумою та їх рішення. Принцип мінімаксу.

4.3. Зведення гри $m \times n$ до задач лінійного програмування.

Теми практичних занять модуля 2

№ з/п	Тема	Годин
1	Економічна інтерпретація симплексного методу	2
2	Двоїстий метод розв'язування ЗЛП	2
3	Економіко-математичний аналіз (ЕМА) результатів розв’язання ЗЛП	2
4	Транспортна задача (ТЗ): побудова моделей транспортних задач	2
5	Розв’язування транспортних задач	2
6	Метод Гоморі: розв'язування цілочислових задач	2
7	Метод гілок та границь	2
8	Матричні ігри двох осіб. Зведення задачі гри двох осіб до задачі лінійного програмування	2
	Усього	**16**

Вихідні знання та уміння з модуля 2

Для успішного складання контрольних заходів залікового модуля 2, студенти повинні оволодіти наступними знаннями: основами теорії двоїстості, загальною характеристикою та змістом ЕМА результатів розв’язання ЗЛП, постановкою і математичною моделлю транспортної задачі, методом розв’язування ТЗ, поняттям про цілочислове програмування. А також вміти: проводити ЕМА результатів розв’язання ЗЛП, розв’язувати двоїсті задачі та ТЗ методом потенціалів, розв’язувати задачі цілочислового лінійного програмування.

Методи оцінювання

Оцінювання проводиться за національною шкалою ESNS та за шкалою ОНАЗ (100 бал.).

1. ЗАДАЧІ ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ

1.1 Постановка задачі лінійного програмування

Математичне програмування ("планування") – це розділ математики, що займається розробкою методів знаходження екстремальних значень функції, на аргументи якої накладені обмеження. Методи математичного програмування використовуються в економічних, організаційних, військових і ін. системах для рішення так званих **розподільних задач.** Розподільні задачі (РЗ) виникають у випадку, коли ресурсів, що є в наявності, не вистачає для виконання кожної з намічених робіт ефективним чином і необхідно щонайкраще розподілити ресурси по роботах відповідно до обраного критерію оптимальності.

Лінійне програмування (ЛП) є найбільш простим і найкраще вивченим розділом математичного програмування.

Виникнення і розвиток лінійного програмування пов'язують з економікою. В економіці задачі математичного програмування, і зокрема лінійного, виникають у зв'язку з чисельністю варіантів створення або функціонування визначеної економічної системи, із можливістю застосування різноманітної сировини, матеріалів, технології для виробництва однієї і тієї самої продукції. Серед цих варіантів необхідно вибрати за певним критерієм, відбитим у функції цілі, *найкращий (оптимальний) варіант.* Слід також мати на увазі, що велика кількість варіантів функціонування конкретної економічної системи обмежена з точки зору кількості і якості використовуваної сировини, технології і т. ін.

Лінійне програмування є найбільш розвиненим і широко використовуваним на практиці розділом математичного програмування. Припущення про лінійність економічних залежностей дещо обмежує можливості лінійного програмування, проте простота й наочність лінійних моделей, які з достатнім ступенем точності описують економічні процеси, дозволяє застосовувати ці моделі в різноманітних видах економічної діяльності.

Основи лінійного програмування були закладені радянським математиком Л. В. Канторовичем наприкінці 30-х років [15]. У США лінійне програмування зародилося під час другої світової війни у зв'язку з необхідністю планування діяльності і постачанням збройних сил, що вели бойові дії в інших частинах світу. Згодом ця галузь науки набула широкого поширення в промисловості.

У 1941 р. у США Ф. Хітчкок здійснив постановку і побудував модель однієї з центральних задач лінійного програмування – *транспортної задачі* [19]. Велику роль у розвитку лінійного програмування відіграло створення в 1947 р. американським ученим Дж. Данцигом універсального методу рішення задач, що дістав назву "*симплекс-метод*".

У 1949 р. Л. В. Канторович і М. К. Гавурін запропонували перший точний метод для вирішення транспортної задачі – *метод потенціалів.* У наступні роки внесок у розвиток теорії лінійного програмування внесли вчені багатьох країн світу.

Характерні риси задач лінійного програмування (ЛП) наступні:

1) показник оптимальності $f(X)$ являє собою ***лінійну*** функцію від елементів рішення $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$;

2) обмежувальні умови, що накладаються на можливі рішення, мають вигляд ***лінійних*** рівностей або нерівностей.

Загальна задача лінійного програмування (ЛП) математично може бути сформульована в такий спосіб:

Цільова функція (ЦФ)

$$f(X) = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n \rightarrow \max\ (\min), \tag{1.1}$$

при обмеженнях

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n\ (\le, =, \ge,)\ b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n\ (\le, =, \ge)\ b_2, \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n\ (\le, =, \ge)\ b_m, \\ x_j \ge 0,\ \left(j = \overline{1, n}\right). \end{cases} \tag{1.2}$$

У компактному виді, використовуючи знак суми $\sum$, задачу (1.1) – (1.2) можна записати так:

$$f = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \rightarrow \max\ (\min), \tag{1.3}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j\ (\le, =, \ge) b_i,\ \left(i = \overline{1, m}\right),$$
$$x_j \ge 0,\ \left(j = \overline{1, n}\right). \tag{1.4}$$

Тут x_j – шукані невідомі, вираз (1.3) задає функцію цілі, а вирази (1.4) – обмеження задачі ЛП.

Уявою потрібно так вибрати значення змінних x_j, щоб:

1) деяка лінійна функція f тих же змінних (1.1, 1.3) оберталася на максимум (мінімум);

2) виконувалися обмеження (1.2, 1.4), що виглядають як лінійні нерівності або рівності відносно змінних x_j $(j = \overline{1, n})$.

Задачі (1.1) – (1.4) можна представити у матричній формі запису. Для цього введемо наступні позначення:

$C = \left(c_1, c_2, \ldots, c_n\right)$ – матриця-рядок коефіцієнтів при невідомих у функції f;

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$ – матриця системи обмежень;

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_m \end{pmatrix}$$ – матриця-стовпець вільних членів обмежень;

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix}$$ – матриця-стовпець невідомих.

Тоді задачі (1.1) – (1.4) у матричній формі запису будуть мати вид:

$$\begin{gathered} f = CX \rightarrow \max(\min), \\ AX\ (\leq, =, \geq)\ B, \\ X \geq 0. \end{gathered} \tag{1.5}$$

Задачі (1.5) являють собою приватні види задач лінійного програмування. Особливість цих задач полягає в тому, що вони містять тільки один вид обмежень. Однак поряд із цими задачами широко поширені задачі лінійного програмування зі змішаними обмеженнями, які містять два або три види розглянутих обмежень (≤, =, ≥).

Математичний апарат лінійного програмування призначений спеціально для вирішення таких задач.

Може виникнути питання: а чи потрібний такий спеціальний апарат? Чи не можна, як це заведено у математиці, просто продиференціювати f по аргументах x_j, прирівняти похідні нулю і вирішити отриману систему рівнянь?

Виявляється, зробити цього не можна! Через те, що функція *f лінійна*, похідні від неї по всіх аргументах постійні і ніде на нуль не обертаються. Максимум (або мінімум) функції f, якщо він існує, досягається завжди десь на межі *області* можливих значень x_j, тобто там, де починають діяти обмеження [6]. Математичний апарат лінійного програмування дозволяє послідовно обстежити межі області можливих рішень і знайти на цих межах рішення, що є оптимальним, тобто таку сукупність значень x_j, за якої лінійна функція f обертається на максимум або мінімум.

Економічна інтерпретація методу ЛП полягає ось у чому [1]. Система, яка моделюється, характеризується наявністю кількох видів "виробничої діяльності" j (j = 1, 2, ... , n), для здійснення яких потрібні наявні в обмеженій кількості різноманітні ресурси b_i (i = 1, 2, ... , m). Витрати i-го ресурсу на одиницю продукту j-го виду виробничої діяльності дорівнює a_{ij}. У свою чергу, при такому споживанні результат j-го виду виробничої діяльності для одиниці відповідного продукту (питома вартість або прибуток) характеризується величиною c_j.

Мета побудови моделі полягає у визначенні рівнів (обсягів виробництва) кожного виду виробничої діяльності x_j, при яких оптимізується (максимізується або мінімізується) загальний результат виробничої діяльності системи в цілому без порушення обмежень, що накладаються на використання ресурсів. Звичайно функцію f називають *цільовою функцією*, а ліміти споживання ресурсів – *обмеженнями.*

Основними допущеннями, прийнятими при побудові лінійних моделей, є: 1) пропорційність, 2) аддитивність і 3) невід'ємність.

Пропорційність означає, що витрати ресурсів на якийсь вид виробничої діяльності, а також внесок цього виду виробничої діяльності в цільову функцію прямо пропорційні його рівню. Наприклад, якщо, продаючи j-ий товар у загальному випадку за ціною 100 грн., фірма буде робити знижку при певному рівні закупки до рівня ціни 95 грн., то буде відсутня пряма пропорційність між доходом фірми й величиною змінної x_j, тобто у різних ситуаціях *одна* одиниця j-го товару буде приносити *різний* доход.

З іншого боку, *аддитивність* вказує на те, що загальний обсяг ресурсів, споживаних у системі всіма видами виробничої діяльності, дорівнює сумі витрат ресурсів на окремі види виробничої діяльності. Прикладом порушення аддитивності служить ситуація, коли збільшення збуту одного з конкуруючих видів продукції, вироблених однією фірмою, впливає на обсяг реалізації іншого. Аналогічно інтерпретується й цільова функція.

Допущення про пропорційність і аддитивність забезпечують сувору лінійність відповідних функцій. У практичних ситуаціях істинний характер залежностей рідко буває лінійним. Проте допущення про лінійність дозволяє розробити винятково ефективні обчислювальні методи.

Невід'ємність означає, що жодному з видів виробничої діяльності не може бути приписаний негативний рівень. Для більшості систем, що зустрічаються на практиці, це допущення є природним логічним наслідком умов їх функціонування.

Будь-яка сукупність $x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1, n})$, що задовольняє обмеженням (1.2, 1.4), називається *припустимим рішенням (припустимим планом)* задачі. Якщо задача лінійного програмування має хоча б одне припустиме рішення, то її обмеження називаються *сумісними,* у противному випадку – *несумісними.* Оскільки аналізовані задачі носять здебільшого економічний характер, поряд з поняттям «рішення» застосовується аналогічне йому в даному випадку поняття «план».

Всі припустимі рішення утворюють *область визначення* задачі лінійного програмування, або, інакше, *область припустимих рішень.* Припустиме рішення, що максимізує або мінімізує цільову функцію f, називається *оптимальним рішенням (оптимальним планом)* задачі. Якщо через $X^* = (x^*_1, x^*_2, ..., x^*_n)$ позначити оптимальне рішення задачі лінійного програмування, а через $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ – будь-яке припустиме рішення, то справедливі такі співвідношення:

$$f(X^*) \geq f(X) \text{ – для задачі на max;}$$

$$f(X^*) \leq f(X) \text{ – для задачі на min.}$$

Задача ЛП необов'язково повинна мати рішення. Може статися, що рівняння (1.2, 1.4) суперечать одне одному; може виявитися, що вони мають рішення, але в області від'ємних значень $x_1, x_2, \dots, x_n$. Тоді задача ЛП не має припустимих рішень. Нарешті, може виявитися, що припустимі рішення задачі ЛП існують, але серед них немає оптимального: функція f області припустимих рішень необмежена знизу.

Інтерес, насамперед, представляє питання про існування припустимих рішень загальної задачі ЛП. Наявність припустимих рішень визначається тільки рівняннями (1.2, 1.4).

Отже, нехай є система рівнянь (1.2, 1.4). Чи існують невід'ємні *значення* x_j, які задовольняють цій системі? Це питання розглядається в спеціальному розділі математики – лінійній алгебрі.

У лінійній алгебрі доводиться, що *для сумісності системи лінійних рівнянь* (1.2, 1.4) *необхідно і достатньо, щоб ранг матриці системи дорівнював рангу її розширеної матриці* [6].

Нагадаємо, що матрицею системи рівнянь (1.2, 1.4) називається таблиця, складена з коефіцієнтів при $x_1, x_2, \dots, x_n$:

$$\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{Vmatrix}.$$

Розширеною матрицею системи лінійних рівнянь називається та сама матриця, доповнена стовпчиком вільних членів:

$$\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{Vmatrix}.$$

Рангом r матриці називається найбільший порядок відмінного від нуля визначника, що його можна одержати, викреслюючи з матриці якісь рядки і якісь стовпці.

Очевидно, що $r \le m$ і $r \ge n$.

У випадку, коли $r = n$, система рівнянь-обмежень (1.2, 1.4) має єдине рішення. Якщо в цьому рішенні хоча б одна з величин x_j негативна, це означає, що отримане рішення неприпустиме і задача ЛП не має рішення. Якщо ж усі $x_j \ge 0$, рішення є припустимим. Воно ж є й оптимальним. Випадок єдиного рішення (при $r = n$) є тривіальним. У загальному випадку $r < n$, тобто, коли число незалежних рівнянь, яким повинні задовольняти змінні, менші від числа самих змінних. Тоді, якщо система сумісна, у неї існує незлічення множина рішень. При цьому $n - r$ змінним можна надавати довільне значення (так звані *вільні змінні)*, а інші r змінних виразяться через них (ці r змінних ми називатимемо *базисними*).

Взагалі, якщо ранг системи рівнянь задачі ЛП (тобто число лінійно незалежних рівнянь, що входять до системи обмежень) дорівнює r, то завжди можна виразити якісь r базисних змінних через $n - r$ інших (вільних) і, надаючи вільним змінним будь-які значення, одержати незліченну кількість рішень системи.

Надалі для простоти, записуючи рівняння задачі ЛП, ми будемо вважати їх лінійно незалежними, при цьому ранг системи r дорівнюватиме числу рівнянь m.

Отже, якщо число рівнянь задачі ЛП $r = m$ менше, ніж число змінних n, то система лінійних рівнянь має незліченну множину рішень, тобто сукупностей значень x_1, x_2, ..., x_n, що задовольняють рівнянням-обмеженням (1.2, 1.4).

Дана множина містить усі сполучення змінних x_j, що задовольняють системі обмежень. Потім із цієї множини необхідно вибрати одне (або декілька) рішення, що оптимізує функцію цілі.

Для визначення множини припустимих рішень і вибору оптимального рішення розроблені спеціальні методи – графічний і чисельні.

1.2 Побудова оптимізаційних моделей для рішення економічних задач

Процес побудови оптимізаційних економіко-математичних моделей умовно можна розділити на наступні основні етапи.

Перший етап — вибір об'єкта дослідження. Об'єктом дослідження можуть бути різні виробничо-економічні процеси: перевезення вантажів, розміщення виробництва, завантаження виробничих потужностей, розкрій промислових матеріалів і т.д.

Другий етап — визначення мети дослідження. Мета дослідження формулюється на основі задач, поставлених при вивченні даного об'єкта. Наприклад, при плануванні перевезень вантажів можна поставити наступну мету: скласти план перевезень вантажів, що забезпечує мінімальні транспортні витрати.

Третій етап — вибір критерію оптимальності. Відмінною рисою оптимізаційних моделей є наявність умови знаходження оптимального рішення (критерію оптимальності), що записується у вигляді функціонала. Критеріями оптимальності звичайно служать: мінімальна вартість перевозки вантажів, максимальний доход, мінімальна вартість вихідних матеріалів, мінімальні витрати виробництва й ін. До вибору критерію варто підходити дуже обережно, тому що неправильно обраний критерій може привести до рішення, що не відповідає меті поставленої задачі.

Четвертий етап — виявлення основних обмежень. При побудові моделей необхідно виявити основні обмеження задачі й включити їх у модель. Реальні задачі звичайно містять велику кількість обмежень. Частина з них випливає з умови задачі, інші можна виявити лише після рішення, що за якимись причинами не влаштовує.

Зміст введених обмежень може бути різним. Практично кожна економічна задача містить обмеження за ресурсами, тому що вибір варіантів рішення виробляється в умовах обмежених ресурсів (сировина, матеріали, машини, устаткування, робоча сила й ін.). Крім обмежень за ресурсами у модель включаються додаткові умови, обумовлені постановкою задачі. До них відносяться, наприклад, обов'язкове дотримання строків випуску продукції, її асортименту і якості, задоволення попиту на певну продукцію й ін. Для одержання правильного рішення система обмежень повинна бути досить повною. У той же час не слід завантажувати модель великою кількістю несуттєвих обмежень. Обмеження в моделі відображаються у вигляді системи рівнянь і нерівностей.

Сформулюємо прості економічні задачі, побудуємо математичні моделі для рішення цих задач і покажемо, що дані задачі відносяться до задач лінійного програмування.

Приклад №1.1. *Визначення оптимального асортименту продукції.*

Підприємство виготовляє два види продукції – $П_1$ і $П_2$, яка поступає до оптового продажу. Для виробництва продукції використовуються два види сировини – *A* і *B*. Максимально можливі добові запаси сировини становлять 9 і 13 одиниць відповідно. Витрати сировини на одиницю продукції виду $П_1$ і виду $П_2$ приведені в табл. 1.1.

Таблиця 1.1 – Витрати сировини

Сировина	Витрати сировини на 1 од. продукції		Запас сировини, од.
	$П_1$	$П_2$	
A	2	3	9
B	3	2	13

Вивчення ринку збуту показало, що добовий попит на продукцію $П_1$ ніколи не перевищує попиту на продукцію $П_2$ більш, ніж на 1 од. Крім того, установлено, що попит на продукцію $П_2$ ніколи не перевищує 2 од. за добу.

Оптові ціни одиниці продукції рівні: 3 гр.од. – для $П_1$ і 4 гр.од. – для $П_2$.

Необхідно побудувати математичну модель, що дозволяє встановити, яку кількість продукції кожного виду треба виготовити, щоб доход від реалізації продукції був максимальним.

Рішення

Перш ніж побудувати математичну модель задачі, тобто записати її за допомогою математичних символів, необхідно чітко розібратися з економічною ситуацією, описаною в умові. Для цього необхідно з погляду ***економіки,*** а не математики, відповісти на наступні питання:

1) Що є ***шуканими величинами*** задачі?

2) Яка ***мета*** рішення? Який ***параметр*** задачі служить критерієм ефективності (оптимальності) рішення, наприклад, прибуток, собівартість, час і т.д. У якому ***напрямку*** повинно змінюватися значення цього параметра (до max або до min) для досягнення найкращих результатів?

3) Які ***умови*** відносно шуканих величин і ресурсів задачі повинні бути виконані?

Ці умови встановлюють, як повинні співвідноситися один з одним різні параметри задачі, наприклад, кількість ресурсу, витраченого при виробництві, і його запас на складі; кількість продукції що виготовляється і ємність складу, де вона буде зберігатися; кількість продукції, що виготовляється і ринковий попит на цю продукцію й т.д.

Тільки після економічної відповіді на всі ці питання можна приступати до запису цих відповідей у ***математичному*** виді, тобто до запису математичної моделі.

1) Шукані величини є ***змінними*** задачі, які, як правило, позначаються малими латинськими буквами з індексами, наприклад, однотипні змінні зручно представляти у вигляді $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$.

2) Ціль рішення записується у вигляді ***цільової функції,*** позначуваної, наприклад, $f(X)$. Математична формула ЦФ $f(X)$ відображає спосіб розрахунку значень параметра – критерію ефективності задачі.

3) Умови, що накладаються на змінні й ресурси задачі, записуються у вигляді системи рівностей або нерівностей, тобто ***обмежень.*** Ліві й праві частини обмежень відображають спосіб одержання (розрахунок або чисельні значення з умови задачі) значень тих параметрів задачі, на які були накладені відповідні умови.

У процесі запису математичної моделі необхідно вказувати одиниці виміру змінних задачі, цільової функції й всіх обмежень. Побудуємо модель задачі №1.1, використовуючи описану методику.

Змінні задачі

У задачі потрібно встановити, скільки продукції кожного виду треба виготовити. Тому шуканими величинами, а виходить, і змінними задачі є *добові обсяги виробництва* кожного виду продукції:

x_1 – добовий обсяг виробництва продукції $П_1$, [од./добу];

x_2 – добовий обсяг виробництва продукції $П_2$, [од./добу].

Цільова функція

В умові задачі сформульована мета – досягти максимального доходу від реалізації продукції. Тобто критерієм ефективності служить параметр *добового доходу,* який повинен прагнути до *максимуму.* Щоб розрахувати величину добового доходу від продажу продукції обох видів, необхідно знати обсяги виробництва продукції, тобто x_1 і x_2 одиниць за добу, а також оптові ціни на продукцію $П_1$ й продукцію $П_2$. Таким чином, доход від продажу добового обсягу виробництва продукції $П_1$ дорівнює $3x_1$ гр. од. за добу, а від продажу продукції $П_2$ – $4x_2$ гр. од. за добу. Тому запишемо ЦФ у вигляді суми доходу від продажу продукції $П_1$ й $П_2$ (при допущенні незалежності обсягів збуту кожної з продукції)

$$f(X) = 3x_1 + 4x_2 \rightarrow \max \text{ [гр.од./добу]}.$$

Обмеження

Можливі обсяги виробництва продукції x_1 і x_2 обмежуються наступними умовами:

- кількість сировини *A* і *B*, витрачена протягом доби на виробництво продукції обох видів, не може перевищувати добового запасу цієї сировини на складі;
- відповідно до результатів вивчення ринкового попиту добовий обсяг виробництва продукції $П_1$ може перевищувати обсяг виробництва продукції $П_2$, але не більш, ніж на 1 од. продукції;
- обсяг виробництва продукції $П_2$ не повинен перевищувати 2 од. за добу, що також виходить з результатів вивчення ринків збуту;
- обсяги виробництва продукції не можуть бути від'ємними.

Таким чином, всі обмеження задачі діляться на 3 групи, обумовлені:

1) витратами сировини;
2) ринковим попитом на продукцію;
3) невід'ємністю обсягів виробництва.

Обмеження **на витрати** кожного з видів сировини мають наступну *змістовну* форму запису

$$\begin{pmatrix} \text{Витрати конкретної сировини} \\ \text{на виробництво обох видів продукції} \end{pmatrix} \le \begin{pmatrix} \text{Максимально можливий} \\ \text{запас даної сировини} \end{pmatrix}.$$

Запишемо ці обмеження в *математичній* формі.

Ліва частина обмеження – це формула розрахунку добових витрат конкретної сировини на виробництво продукції. Так, з умови відомі витрати сировини *A* на виробництво 1 од. продукції $П_1$ і 1 од. продукції $П_2$ (див. табл. 1.1). Тоді на виробництво x_1 од. продукції $П_1$ й x_2 од. продукції $П_2$ потрібно $2x_1 + 3x_2$ од. сировини *A*.

Права частина обмеження – це величина добового запасу сировини на складі, наприклад, 9 од. сировини *A* на добу (див. табл. 1.1). Таким чином, обмеження на витрати *A* має вигляд

$$2x_1 + 3x_2 \le 9.$$

Аналогічний математичний запис обмеження на витрати *B*

$$3x_1 + 2x_2 \le 13.$$

Примітка №1.1. Варто завжди перевіряти розмірність лівої й правої частини кожного з обмежень, оскільки їхня розбіжність свідчить про принципову помилку при складанні обмежень.

Обмеження щодо добового **обсягу виробництва** продукції $П_1$ в порівнянні з обсягом виробництва продукції $П_2$ має ***змістовну*** форму

$$\begin{pmatrix} \text{Перевищення обсягу виробництва продукції } П_1 \\ \text{над обсягом виробництва продукції } П_2 \end{pmatrix} \le \left(1\,\frac{\text{од. продукції}}{\text{добу}} \right)$$

і ***математичну*** форму

$$x_1 - x_2 \le 1.$$

Обмеження щодо добового **обсягу виробництва** продукції $П_2$ має ***змістовну*** форму

$$\left(\text{Попит на продукцію } П_2\right) \le \left(2 \frac{\text{од.продукції}}{\text{добу}}\right)$$

і ***математичну*** форму

$$x_2 \le 2.$$

Невід'ємність обсягів виробництва задається як

$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0.$$

Таким чином, ***математична модель*** цієї задачі має вигляд

$$f(X) = 3x_1 + 4x_2 \to \max,$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \le 9, \\ 3x_1 + 2x_2 \le 13, \\ x_1 - x_2 \le 1, \\ x_2 \le 2, \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0.$$

Приклад №1.2. *Задача використання фонду робочого часу.*

Виконати замовлення на виробництво 32 виробів $В_1$ і 4 виробів $В_2$ узялися бригади $Б_1$ і $Б_2$. Продуктивність бригади $Б_1$ на виробництво виробів $В_1$ і $В_2$ становить відповідно 4 і 2 виробів за годину, фонд робочого часу цієї бригади 9,5 год. Продуктивність бригади $Б_2$ – відповідно 1 і 3 виробів за годину, а її фонд робочого часу – 4 год. Витрати, пов'язані з виробництвом одиниці виробу, для бригади $Б_1$ рівні відповідно 9 і 20 гр.од., для бригади $Б_2$ – 15 і 30 гр.од.

Складіть математичну модель задачі, яка дозволяє знайти оптимальний обсяг випуску виробів, що забезпечує мінімальні витрати на виконання замовлення.

Рішення

Змінні задачі

Шуканими величинами в задачі є обсяги випуску виробів. Вироби $В_1$ будуть виготовлятися двома бригадами $Б_1$ і $Б_2$. Тому необхідно *розрізняти* кількість виробів $В_1$, виготовлених бригадою $Б_1$, і кількість виробів $В_1$ виготовлених бригадою $Б_2$. Аналогічно, обсяги випуску виробів $В_2$ бригадою $Б_1$ і бригадою $Б_2$ також є різними величинами. Внаслідок цього в даній задачі 4 змінні. Для зручності сприйняття будемо використовувати двоіндексну форму запису x_{ij} – кількість виробів $В_j$ (j=l, 2), що виготовляються бригадою $Б_i$ (i=l, 2), а саме:

x_{11} – кількість виробів $В_1$, що виготовляються бригадою $Б_1$, [од.];
x_{12} – кількість виробів $В_2$, що виготовляються бригадою $Б_1$, [од.];
x_{21} – кількість виробів $В_1$, що виготовляються бригадою $Б_2$, [од.];
x_{22} – кількість виробів $В_2$, що виготовляються бригадою $Б_2$, [од.].

Примітка №1.2. У даній задачі немає необхідності прив’язуватися до якого-небудь тимчасового інтервалу (у задачі №1.1 була прив'язка до доби), оскільки тут потрібно знайти не обсяг випуску за певний час, а спосіб розподілу відомої планової величини замовлення між бригадами.

Цільова функція

Метою рішення задачі є виконання плану з *мінімальними* витратами, тобто критерієм ефективності рішення служить показник *витрат на виконання всього замовлення.* Тому ЦФ повинна бути представлена формулою розрахунку цих витрат. Витрати кожної бригади на виробництво одного виробу $В_1$ і $В_2$ відомі з умови. Таким чином, ЦФ має вигляд

$$f(X) = 9x_{11} + 20x_{12} + 15x_{21} + 30x_{22} \rightarrow \min, \left[\frac{\text{гр.од.}}{\text{од.}} \cdot \text{од.} = \text{гр.од.} \right].$$

Обмеження

Можливі обсяги виробництва виробів бригадами обмежуються наступними умовами:

- загальна кількість виробів $В_1$, випущена обома бригадами, повинна дорівнювати 32 од., а загальна кількість виробів $В_2$ – 4 од.;
- час, відпущений на роботу над даним замовленням, становить для бригади $Б_1$ – 9,5 год., а для бригади $Б_2$ – 4 год.;
- обсяги виробництва виробів не можуть бути від’ємними.

Таким чином, всі обмеження задачі №1.2 діляться на 3 групи, обумовлені:

1) величиною замовлення на виробництво виробів;
2) фондом часу, виділеним бригадам;
3) невід’ємністю обсягів виробництва.

Для зручності складання обмежень запишемо вихідні дані у вигляді табл. 1.2.

Таблиця 1.2 – Вихідні дані задачі №1.2

Бригада	Продуктивність бригад, од./год.		Фонд робочого часу, год.
	$В_1$	$В_2$	
$Б_1$	4	2	9,5
$Б_2$	1	3	4
Замовлення, од.	32	4	–

Обмеження на виробництво виробів мають наступну ***змістовну*** форму запису

$$\left(\begin{array}{c} \text{Кількість виробів } В_1, \\ \text{виготовлених бригадами } Б_1 \text{ і } Б_2 \end{array} \right) = (32 \text{ од.}),$$

$$\begin{pmatrix} \text{Кількість виробів } В_2, \\ \text{виготовлених бригадами } Б_1 \text{ і } Б_2 \end{pmatrix} = (4 \text{ од.}).$$

Математична форма запису має вигляд

$$x_{11} + x_{12} = 32, \quad x_{21} + x_{22} = 4.$$

Обмеження щодо **фонду часу** має змістовну форму

$$\begin{pmatrix} \text{Загальний час, затрачений бригадою } Б_1 \\ \text{на виготовлення виробів } В_1 \text{ і } В_2 \end{pmatrix} \le (9{,}5 \text{ год.}),$$

$$\begin{pmatrix} \text{Загальний час, затрачений бригадою } Б_2 \\ \text{на виготовлення виробів } В_1 \text{ і } В_2 \end{pmatrix} \le (4 \text{ год.}).$$

Проблема полягає у тому, що в умові задачі прямо не заданий час, що витрачають бригади на випуск одного виробу $В_1$ або $В_2$, тобто не задана трудомісткість виробництва. Але є інформація про продуктивність кожної бригади, тобто про кількість виготовлених виробів за 1 годину. Трудомісткість Тр і продуктивність Пр є зворотними величинами, тобто

$$\text{Тр} = \frac{1}{\text{Пр}}.$$

Тому, використовуючи табл. 1.2, одержуємо наступну інформацію:

→ $\frac{1}{4}$ год. витрачає бригада $Б_1$ на виробництво одного виробу $В_1$;

→ $\frac{1}{2}$ год. витрачає бригада $Б_1$ на виробництво одного виробу $В_2$;

→ $\frac{1}{1}$ год. витрачає бригада $Б_2$ на виробництво одного виробу $В_1$;

→ $\frac{1}{3}$ год. витрачає бригада $Б_2$ на виробництво одного виробу $В_2$;

Запишемо обмеження щодо фонду часу в ***математичному*** вигляді:

$$\frac{x_{11}}{4} + \frac{x_{12}}{2} \le 9{,}5;$$

$$\frac{x_{21}}{1} + \frac{x_{22}}{3} \le 4.$$

Невід'ємність обсягів виробництва задається як

$$x_{ij} \ge 0 \quad (i = 1,2;\ j = 1,2).$$

Таким чином, ***математична модель*** цієї задачі має вигляд:

$$f(X) = 9x_{11} + 20x_{12} + 15x_{21} + 30x_{22} \to \min,$$

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} = 32, \\ x_{21} + x_{22} = 4, \\ \dfrac{x_{11}}{4} + \dfrac{x_{12}}{2} \le 9{,}5, \\ \dfrac{x_{21}}{1} + \dfrac{x_{22}}{3} \le 4, \end{cases}$$

$$x_{ij} \ge 0 \ (i = 1,2;\ j = 1,2).$$

Приклад №1.3*. *Задача про розкрій або про мінімізацію обрізків.*

Для пошиття одного виробу потрібно викроїти із тканини 6 деталей. На швейній фабриці були розроблені два варіанти розкрою тканини. У табл. 1.3 наведені характеристики варіантів розкрою 10 м^2 тканини й комплектність, тобто кількість деталей певного виду, які необхідні для пошиття одного виробу. Щомісячний запас тканини для пошиття виробів даного типу становить 405 м^2. У найближчий місяць планується зшити 90 виробів.

Побудуйте математичну модель задачі, що дозволяє в найближчий місяць виконати план по пошиттю з мінімальною кількістю відходів.

Таблиця 1.3 – Характеристики варіантів розкрою відрізів тканини по 10 м^2

Варіант розкрою	Кількість деталей, шт./відріз						Відходи, м^2/відріз
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	
1	60	0	90	40	70	90	0,5
2	80	35	20	78	15	0	0,35
Комплектність, шт./виріб	1	2	2	2	2	2	

Рішення

Змінні задачі

У даній задачі шукані величини явно не зазначені, але сказано, що повинен бути виконаний щомісячний план по пошиттю 90 виробів. Для пошиття 90 виробів на місяць потрібно розкроїти строго певну кількість деталей. Крій проводиться з відрізів тканини по 10 м^2 двома різними способами, які дозволяють одержати різне число деталей. Оскільки заздалегідь невідомо, скільки тканини буде розкроєно першим способом і скільки – другим, то шукані величини можна задати як *кількість відрізів тканини по* 10 м^2, розкроєних кожним із способів:

x_1 – кількість відрізів тканини по 10 м^2, розкроєних першим способом протягом місяця, [відріз/міс.];

x_2 – кількість відрізів тканини по 10 м^2, розкроєних другим способом протягом місяця, [відріз/міс.].

Цільова функція

Метою рішення задачі є виконання плану при мінімальній кількості відходів. Оскільки кількість виробів строго запланована (90 шт./міс.), то цей параметр не описує ЦФ, а відноситься до обмеження, невиконання якого означає, що задача не розв'язана. А критерієм ефективності виконання плану служить параметр "кількість відходів", який необхідно звести до мінімуму. Оскільки при розкрої одного відрізу (10 м^2) тканини за 1-им варіантом виходить 0,5 м^2 відходів, а за 2-им варіантом – 0,35 м^2 (див. табл. 1.3).

Загальна кількість відходів при розкрої (ЦФ) має вигляд

$$f(X)= 0{,}5x_1 + 0{,}35x_2 \to \min, \ \left[\frac{\text{м}^2\text{відріз}}{\text{відріз}} \cdot \frac{\text{відріз}}{\text{міс.}} = \frac{\text{м}^2\text{відріз}}{\text{міс.}}\right].$$

Обмеження

Кількість розкроїв тканини різними способами обмежується наступними умовами:

• повинен виконуватися план з пошиття виробів, інакше кажучи, загальна кількість викроєних деталей повинна бути такою, щоб з неї можна було пошити 90 виробів на місяць, а саме: деталей 1-го виду повинно бути як мінімум 90 і деталей інших видів – як мінімум по 180 (див. комплектність у табл. 1.3).

• витрати тканини не повинні перевищувати місячного запасу його на складі;

• кількість відрізів розкроєних тканин не може бути від'ємним.

Обмеження за **планом пошиття** виробів мають наступну *змістовну* форму запису:

$$\begin{pmatrix}\text{Загальна кількість деталей №1,}\\ \text{викроєних за всіма варіантами}\end{pmatrix} \ge (90\text{ штук});$$

$$\begin{pmatrix}\text{Загальна кількість деталей №2,}\\ \text{викроєних за всіма варіантами}\end{pmatrix} \ge (180\text{ штук});$$

$$\dots$$

$$\begin{pmatrix}\text{Загальна кількість деталей №6,}\\ \text{викроєних за всіма варіантами}\end{pmatrix} \ge (180\text{ штук}).$$

Математично ці обмеження записуються у вигляді

$$\begin{gathered}60x_1 + 80x_2 \ge 90,\\ 35x_2 \ge 180,\\ 90x_1 + 20x_2 \ge 180,\\ 40x_1 + 78x_2 \ge 180,\\ 70x_1 + 15x_2 \ge 180,\\ 90x_1 \ge 180,\\ \left[\frac{\text{шт.}}{\text{відріз}} \cdot \frac{\text{відріз}}{\text{міс.}}\right] \ge \left[\frac{\text{шт.}}{\text{міс.}}\right].\end{gathered}$$

Обмеження щодо **витрат тканини** мають наступні форми запису:

змістовну

$$\begin{pmatrix} \text{Загальна кількість тканини,} \\ \text{розкроєної за місяць} \end{pmatrix} \le \left(405 \text{ м}^2\right)$$

і математичну

$$x_1 + x_2 \le \frac{405}{10},$$

$$\left[\frac{\text{відріз}}{\text{міс.}}\right] \le \left[\frac{\text{м}^2 \cdot \text{відріз}}{\text{міс.} \cdot \text{м}^2}\right].$$

Невід'ємність кількості розкроєних відрізів задається у вигляді

$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0.$$

Таким чином, ***математична модель*** задачі №1.3 має вигляд:

$$f(X) = 0{,}5x_1 + 0{,}35x_2 \rightarrow \min,$$

$$\begin{cases} 60x_1 + 80x_2 \ge 90, \\ 35x_2 \ge 180, \\ 90x_1 + 20x_2 \ge 180, \\ 40x_1 + 78x_2 \ge 180, \\ 70x_1 + 15x_2 \ge 180, \\ 90x_1 \ge 180, \\ x_1 + x_2 \le 40{,}5, \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0.$$

Контрольні питання

1. Що таке математичне програмування?
2. Сформулюйте задачу лінійного програмування.
3. Які характерні риси задач математичного програмування?
4. Опишіть структуру загальної задачі лінійного програмування.
5. Дайте визначення для наступних понять: план, припустимий план, оптимальний план, рішення задачі.
6. Які обмеження називаються сумісними, а які несумісними?
7. Яке рішення задачі називається допустимим, а яке оптимальним?
8. Назвіть основні етапи процесу побудови моделей математичного програмування і дайте характеристику кожному етапу.

Варіанти задач для самостійного розв’язання

Задача №1.1

Інвестор ухвалює рішення щодо вкладення наявного в нього капіталу. Набір характеристик потенційних об'єктів для інвестування, що мають назви від A до F, задається таблицею 1.4.

Таблиця 1.4 – Характеристики потенційних об'єктів для інвестування

Назва	Прибутковість, (в %)	Термін викупу, (рік)	Надійність, (у балах)
A	5,5	2009	5
B	6,0	2013	4
C	8,0	2018	2
D	7,5	2010	3
E	5,5	2008	5
F	7,0	2011	4

Припустімо, що при ухваленні рішення про придбання активів повинні бути дотримані умови:

а) сумарний обсяг капіталу, який повинен бути вкладений, становить 100 000 гр.од.;

б) частка коштів, вкладена в один об'єкт, не може перевищувати чверті від усього обсягу;

в) більше половини всіх коштів повинні бути вкладені в довгострокові активи (припустімо, на розглянутий момент до таких відносяться активи із терміном погашення після 2012 р.);

г) частка активів, які мають надійність менш ніж 4 бали, не може перевищувати третини від сумарного обсягу.

Побудуйте математичну модель, що дозволяє одержати максимальний сумарний прибуток від розміщення активів, який одержить інвестор.

Задача №1.2

В інституті проводиться конкурс на кращу стінгазету.

Одному студентові дано наступне доручення:

1) купити акварельні фарби за ціною 30 гр.од. за коробку, кольорові олівці за ціною 20 гр.од. за коробку, лінійки за ціною 12 гр.од., блокноти за ціною 10 гр.од.;

2) фарб потрібно купити не менше трьох коробок, блокнотів – стільки, скільки коробок олівців і фарб разом, лінійок не більше п'яти. На покупки виділяється не менше 300 гр.од.

У якій кількості студент повинен купити зазначені предмети, щоб загальне число предметів було найбільшим?

Задача №1.3

Фірма випускає три види виробів. У процесі виробництва використовуються три технологічні операції. На рис. 1.1 показана технологічна схема виробництва виробів

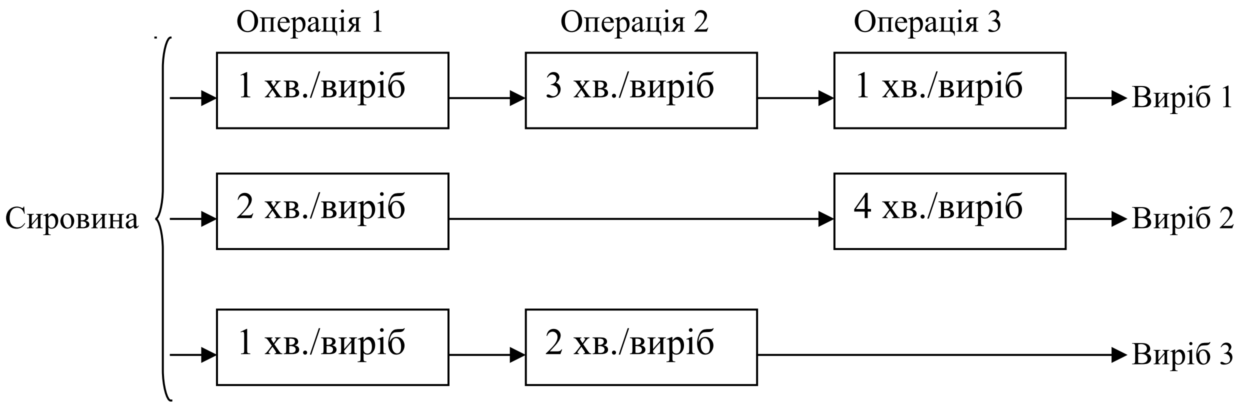

Рисунок 1.1 – Технологічна схема виробництва

Фонд робочого часу обмежений наступними граничними значеннями: для першої операції – 430 хв.; для другої операції – 460 хв.; для третьої операції – 420 хв. Вивчення ринку збуту показало, що очікуваний прибуток від продажу одного виробу видів 1, 2 і 3 становить 3, 2 і 5 гр.од. відповідно.

Побудуйте математичну модель, що дозволяє знайти найбільш вигідний добовий обсяг виробництва кожного виду продукції.

Задача №1.4

При виготовленні виробів B_1 і B_2 використовуються сталь і кольорові метали, а також токарські й фрезерні верстати. За технологічними нормами на виробництво одиниці виробу B_1 потрібно 300 і 200 станко-годин відповідно токарського й фрезерного устаткування, а також 10 і 20 кг відповідно сталі й кольорових металів. Для виробництва одиниці виробу B_2 потрібно 400, 100, 70 і 50 відповідних одиниць тих же ресурсів.

Цех має в своєму розпорядженні 12400 і 6800 станко-годин відповідно токарського й фрезерного устаткування та 640 і 840 кг відповідно сталі й кольорових металів. Прибуток від реалізації одиниці виробу B_1 становить 6 гр.од. і від одиниці виробу B_2 – 16 гр.од.

Побудуйте математичну модель задачі, використовуючи як показник ефективності прибуток і враховуючи те, що час роботи фрезерних верстатів повинен використовуватися повністю.

Задача №1.5

З вокзалу можна відправляти щодня кур'єрські й швидкі поїзди. Місткість вагонів і наявний парк вагонів на станції зазначені в табл. 1.5.

Таблиця 1.5 – Місткість вагонів і наявний парк вагонів на станції

Характеристики парку вагонів	Тип вагона				
	Багажний	Поштовий	Плацкартний	Купейний	М'який
Число вагонів у поїзді, шт.:					
кур'єрському	1	–	5	6	3
швидкому	1	1	8	4	1
Місткість вагонів, чол.	–	–	58	40	32
Наявний парк вагонів, шт.	12	8	81	70	27

Побудуйте математичну модель задачі, на підставі якої можна знайти таке співвідношення між числом кур'єрських і швидких поїздів, щоб число пасажирів, що відправляються щодня, досягло максимуму.

Задача №1.6

Три типи автомобілів необхідно розподілити між чотирма маршрутами перевезення поштових відправлень. Дані про організацію процесу перевезень наведені в табл. 1.6.

Таблиця 1.6 – Дані про організацію процесу перевезень

Тип автомобіля	Кількість автомобілів, од.	Місячний обсяг перевезень одним автомобілем по одному маршруту, од.				Експлуатаційні витрати на один автомобіль по маршрутах, гр.од.			
		I	II	III	IV	I	II	III	IV
1	50	15	10	20	50	15	20	25	40
2	20	20	25	10	10	70	28	15	45
3	30	35	50	30	45	40	70	50	65

Розподілити автомобілі за маршрутами перевезення поштових відправлень так, щоб при мінімальних сумарних експлуатаційних витратах перевезти по кожному із чотирьох маршрутів відповідно не менше 300, 200, 1000, 500 од. поштових відправлень.

2. ГРАФІЧНИЙ МЕТОД РІШЕННЯ ЗАДАЧ ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ

2.1 Геометрична інтерпретація задач лінійного програмування

Графічним методом можна вирішувати, в основному, задачі лінійного програмування, які мають дві змінні. У випадку трьох змінних графічний метод стає менш наочним, а при більшому числі змінних – неможливим. Він заснований на *геометричному* поданні припустимих рішень і ЦФ задачі.

Запишемо задачу лінійного програмування з двома змінними:

- цільова функція:

$$f(X) = c_1x_1 + c_2x_2 \to \max; \tag{2.1}$$

- обмеження:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \le b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \le b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 \le b_m, \end{cases} \tag{2.2}$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0. \tag{2.3}$$

Кожне з нерівностей (2.2) – (2.3) системи обмежень задачі геометрично на координатній площині (x_1, x_2) визначає деяку напівплощину відповідно з граничними прямими $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 = b_i$ $\left(i = \overline{1, m}\right)$; $x_1 = 0$; $x_2 = 0$ (рис. 2.1), а система нерівностей у цілому – перетинання відповідних площин. Безліч точок перетинання даних напівплощин називається **областю допустимих рішень** (ОДР). ОДР завжди являє собою **опуклу** фігуру, що володіє наступною властивістю: якщо дві точки A і B належать цій фігурі, то й весь відрізок AB належить їй. У випадку несумісності системи обмежень задачі (2.2) – (2.3) ОДР є порожньою безліччю.

Областю допустимих рішень системи нерівностей (2.2) – (2.3) *може бути:*

– опуклий багатокутник;
– опукла багатокутна необмежена область;
– порожня область;
– промінь;
– відрізок;
– єдина точка.

Примітка №2.1. Все вищесказане відноситься й до випадку, коли система обмежень (2.2) включає рівності, оскільки будь-яку рівність

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 = b_i$$

можна представити у вигляді системи двох нерівностей (див. рис. 2.1)

$$\begin{cases} a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 \le b_i, \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 \ge b_i. \end{cases}$$

ЦФ $f(X) = c_1x_1 + c_2x_2$ при фіксованому значенні $f(X) = f$ визначає на площині пряму лінію $c_1x_1 + c_2x_2 = f$. Змінюючи значення f, ми одержимо сімейство паралельних прямих, які називають **лініями рівня.**

Це пов'язано з тим, що зміна значення f спричинить зміну лише довжини відрізка, що відтинається лінією рівня на осі $0x_2$ (початкова ордината), а кутовий коефіцієнт прямої $\mathrm{tg}\alpha = \frac{-c_1}{c_2}$ залишиться постійним (див. рис. 2.1).

Тому для рішення буде досить побудувати одну з ліній рівня, довільно вибравши значення f.

Вектор $\vec{C} = (c_1, c_2)$ з координатами коефіцієнтів ЦФ при x_1 і x_2 перпендикулярний до кожної з ліній рівня (див. рис. 2.1). ***Напрямок вектора*** $\vec{C}$ ***збігається*** з напрямком ***зростання*** ЦФ, що є важливим моментом для рішення задач. Напрямок ***убування*** ЦФ ***протилежний*** *напрямку вектора* $\vec{C}$.

Якщо в одній і тій же системі координат зобразити область допустимих рішень системи нерівностей (2.2) – (2.3) і сімейство паралельних прямих (2.1), то задача визначення максимуму функції f зведеться до знаходження в допустимій області точки, через яку проходить пряма із сімейства $f = \mathrm{const}$, і яка відповідає найбільшому значенню параметра f.

Ця точка існує тоді, коли багатокутник рішень не порожній і на ньому цільова функція обмежена зверху. При зазначених умовах в одній з вершин багатокутника рішень цільова функція приймає максимальне значення.

Для визначення даної вершини необхідно побудувати лінію рівня

$$c_1x_1 + c_2x_2 = 0, \tag{2.4}$$

що проходить через початок координат і перпендикулярну вектору $\vec{C} = (c_1, c_2)$. Ця лінія рівня будується наступним чином. В лівій частині рівняння (2.4) стоїть скалярний добуток двох векторів $\vec{C} = (c_1, c_2)$ і $\vec{X} = (x_1, x_2)$. Якщо скалярний добуток векторів дорівнює нулю, то вектори перпендикулярні.

Побудуємо вектор $\vec{C}$ [він проходить через початок координат і точку (c_1, c_2)] і перпендикулярно йому через початок координат проведемо пряму – це і буде пряма (2.4).

Суть графічного методу полягає в наступному. За напрямом (проти напряму) вектора $\vec{C}$ в ОДР проводиться пошук оптимальної точки $X^* = (x_1^*, x_2^*)$. Оптимальною вважається точка, через яку проходить лінія рівня $f_{\max}$ ($f_{\min}$), що відповідає найбільшому (найменшому) значенню функції $f(X)$. Оптимальне рішення завжди перебуває на границі ОДР, наприклад, в останній вершині багатокутника ОДР, через яку пройде цільова пряма, або на всій її стороні.

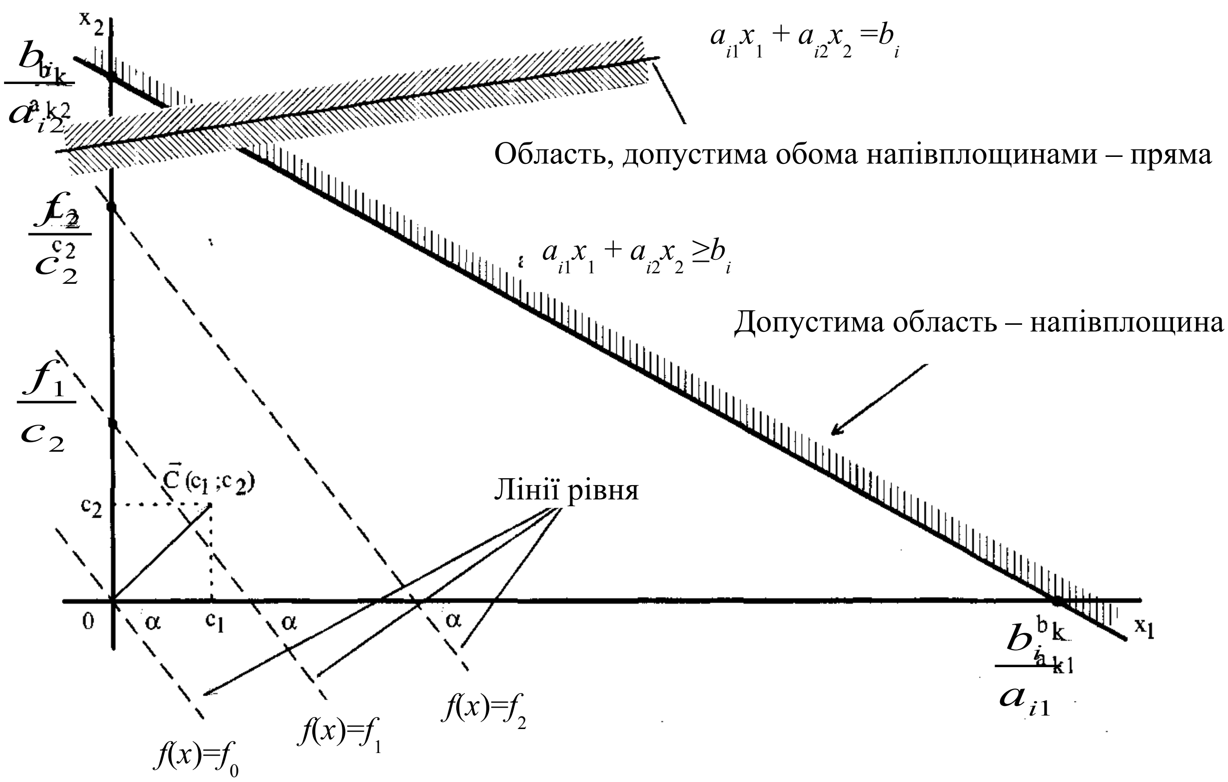

Рисунок 2.1 – Геометрична інтерпретація обмежень і ЦФ задачі ЛП

При пошуку оптимального рішення задачі ЛП можливі наступні ситуації: існує єдине рішення задачі; існує нескінченна безліч рішень (**альтернативний оптимум**); ЦФ не обмежена; область припустимих рішень – єдина точка; задача не має рішень.

Рис. 2.2 характеризує такий випадок, коли цільова функція приймає максимальне значення в єдиній точці *A*. З рис. 2.3 видно, що цільова функція приймає максимальне значення в будь-якій точці відрізка *AB*.

На рис. 2.4 зображений випадок, коли максимум недосяжний, а на рис. 2.5 – випадок, коли система обмежень задачі несумісна. Відзначимо, що знаходження мінімального значення f при даній системі обмежень відрізняється від знаходження її максимального значення при тих же обмеженнях лише тим, що лінія рівня f пересувається не в напрямку вектора $\vec{C} = (c_1, c_2)$, а в протилежному напрямку. Таким чином, відзначені вище випадки, що зустрічаються при знаходженні максимального значення цільової функції, мають місце й при визначенні її мінімального значення.

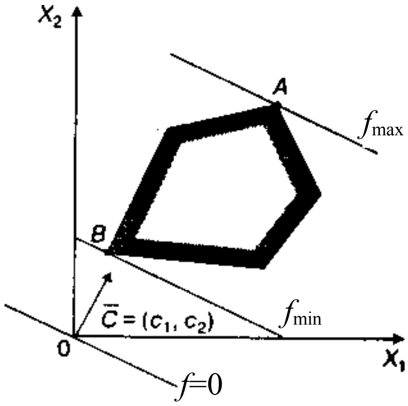

Рисунок 2.2 – Оптимум функції f досяжний у точці A

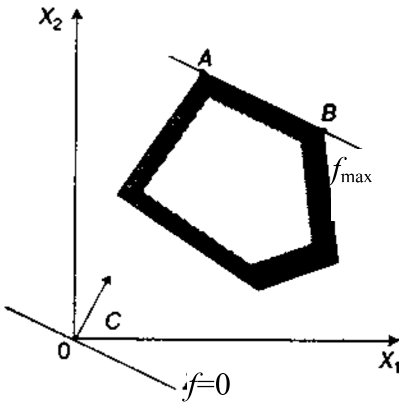

Рисунок 2.3 – Оптимум функції f досяжний у будь-якій точці $|AB|$

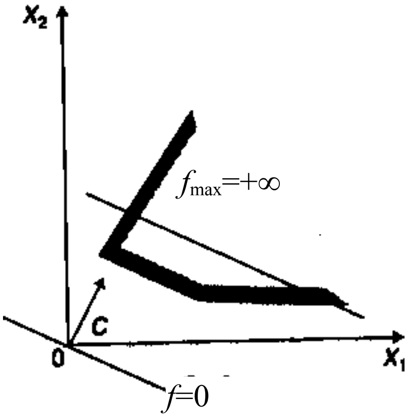

Рисунок 2.4 – Оптимум функції f не досяжний

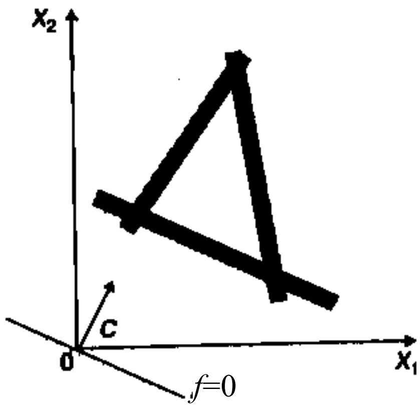

Рисунок 2.5 – Область допустимих рішень – порожня область

2.2 Методика рішення задач лінійного програмування графічним методом

Для практичного рішення задачі лінійного програмування (2.1) – (2.3) на основі її геометричної інтерпретації необхідно:

1. Побудувати прямі, рівняння яких виходять у результаті заміни в обмеженнях (2.2) – (2.3) знаків нерівностей на знаки рівностей.

2. Знайти напівплощини, обумовлені кожним з обмежень задачі. Для цього підставте в конкретну нерівність координати якої-небудь точки [наприклад, (0;0)], і перевірте істинність отриманої нерівності.

Якщо нерівність істина,
то треба заштрихувати напівплощину, що містить дану точку;
інакше (нерівність помилкова) треба заштрихувати напівплощину, що не містить дану точку.

Оскільки x_1 і x_2 повинні бути невід'ємними, то їхні припустимі значення завжди будуть перебувати вище осі $0x_1$ і правіше осі $0x_2$, тобто в I-му квадранті.

3. Визначити багатокутник рішень. Визначити ОДР як частину площини, що належить одночасно всім дозволеним областям, і виділити її. При відсутності ОДР задача ***не має рішень,*** про що робиться відповідний висновок.

4. Побудувати вектор $\vec{C} = \left(c_1, c_2\right)$, що починається в точці (0;0) і закінчується в точці (c_1, c_2).

5. Якщо ОДР не порожня безліч, то побудувати цільову пряму $f = c_1x_1 + c_2x_2 = L$, де L – довільне число, наприклад, кратне c_1 і c_2, тобто зручне для проведення розрахунків. Спосіб побудови аналогічний побудові прямих обмежень.

6. При пошуку max ЦФ пересувайте цільову пряму ***за напрямом*** вектора $\vec{C}$, при пошуку min ЦФ – ***проти напряму*** вектора $\vec{C}$. Остання за ходом руху вершина ОДР буде точкою max або min ЦФ. Якщо такої точки (точок) не існує, то робиться висновок про ***необмеженість ЦФ на безлічі планів*** зверху (при пошуку max) або знизу (при пошуку min).

7. Визначте координати точки max (min) ЦФ $X^* = \left(x_1^*, x_2^*\right)$ і обчисліть значення ЦФ $f(X^*)$. Для обчислення координат оптимальної точки X^* розв'язується система рівнянь прямих, на перетинанні яких знаходиться X^*.

Приклад №2.1. Розглянемо рішення задачі про асортимент продукції (приклад №1.1) геометричним способом, модель якої має вигляд:

$$f(X) = 3x_1 + 4x_2 \rightarrow \max,$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \le 9, \\ 3x_1 + 2x_2 \le 13, \\ x_1 - x_2 \le 1, \\ x_2 \le 2, \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0.$$

Рішення

Побудуємо багатокутник рішень (рис. 2.6). Для цього обчислимо координати точок перетинання прямих обмежень з осями координат і на площині x_10x_2 зобразимо ці граничні прямі:

$2x_1 + 3x_2 = 9$ (L_1);
$3x_1 + 2x_2 = 13$ (L_2);
$x_1 - x_2 = 1$ (L_3);
$x_2 = 2$ (L_4).

$$L_1: \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 4{,}5 \\ x_2 = 0 \end{cases}; \quad L_2: \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 6{,}5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 4{,}3 \\ x_2 = 0 \end{cases}; \quad L_3: \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 0 \end{cases};$$

Пряма (L_4) проходить через точку $x_2 = 2$ паралельно осі $0x_1$.

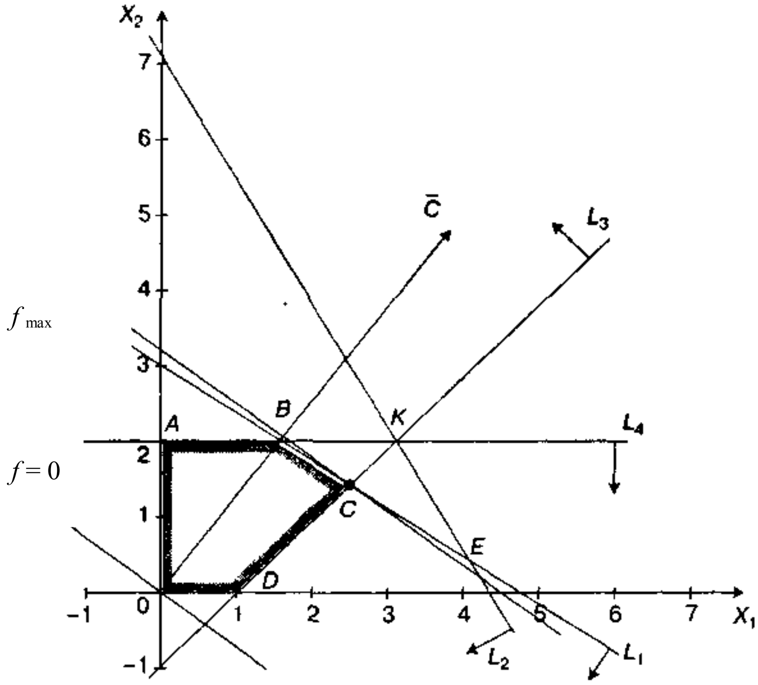

Рисунок 2.6 – Рішення задачі лінійного програмування геометричним способом

Визначимо ОДР. Взявши яку-небудь точку, наприклад, початок координат, встановимо, яку напівплощину визначає відповідна нерівність. Наприклад, підставимо точку (0; 0) у вихідне обмеження (L_1), одержимо $0 < 9$, що є істиною нерівністю, тому стрілкою (або штрихуванням) позначимо напівплощину, що ***містить*** точку (0; 0), тобто розташовану лівіше й нижче прямої (L_1). Аналогічно визначимо припустимі напівплощини для інших обмежень і вкажемо їх стрілками у відповідних прямих обмеженнях (див. рис. 2.6). Областю рішень є багатокутник $0ABCD$.

Для побудови прямої $f = 3x_1 + 4x_2 = 0$ будуємо вектор-градієнт $\vec{C} = (3; 4)$ і через точку 0 проводимо пряму, перпендикулярну йому. Побудовану пряму $f = 0$ переміщаємо паралельно самої собі за напрямом вектора $\vec{C}$. З рис. 2.6 виходить, що стосовно багатокутника рішень опорною ця пряма стає в точці C, де функція приймає максимальне значення. Точка C лежить на перетинанні прямих L_1 і L_3. Для визначення її координат розв'яжемо систему рівнянь:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 9, \\ x_1 - x_2 = 1, \end{cases}$$

$C(2{,}4; 1{,}4)$, [од. продукції/добу].

Оптимальний план задачі $x_1 = 2,4$; $x_2=1,4$. Підставляючи значення x_1 і x_2 у лінійну функцію, одержимо:

$$f_{\max} = 3 \cdot 2,4 + 4 \cdot 1,4 = 12,8 \text{ [гр.од./добу]}.$$

Отримане рішення означає, що обсяг виробництва продукції $П_1$ повинен дорівнювати 2,4 од.продукції за добу, а продукції $П_2$ – 1,4 од.продукції за добу. Доход, одержуваний у цьому випадку, складе: $f_{\max} = 12,8$ гр.од. за добу.

Приклад №2.2. Розв'яжемо задачу геометричним способом, модель якої має вигляд:

$$f(X) = -2x_1 - x_2 \rightarrow \max(\min);$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 \le 16, \\ -4x_1 + 2x_2 \le 8, \\ x_1 + 3x_2 \ge 9, \\ 6x_1 + 5x_2 = 30, \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$$

Рішення

Побудуємо багатокутник рішень (рис. 2.7). Для цього визначимо координати точок перетинання прямих обмежень з осями координат і на площині $x_1 0 x_2$ зобразимо ці граничні прямі:

$$2x_1 + 4x_2 = 16 \qquad (L_1);$$
$$-4x_1 + 2x_2 = 8 \qquad (L_2);$$
$$x_1 + 3x_2 = 9 \qquad (L_3);$$
$$6x_1 + 5x_2 = 30 \qquad (L_4).$$

Побудуємо обмеження (рис. 2.7):

$$L_1: \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 8 \\ x_2 = 0 \end{cases}; \quad L_2: \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2 \\ x_2 = 0 \end{cases};$$

$$L_3: \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 9 \\ x_2 = 0 \end{cases}; \quad L_4: \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -5 \\ x_2 = 0 \end{cases}.$$

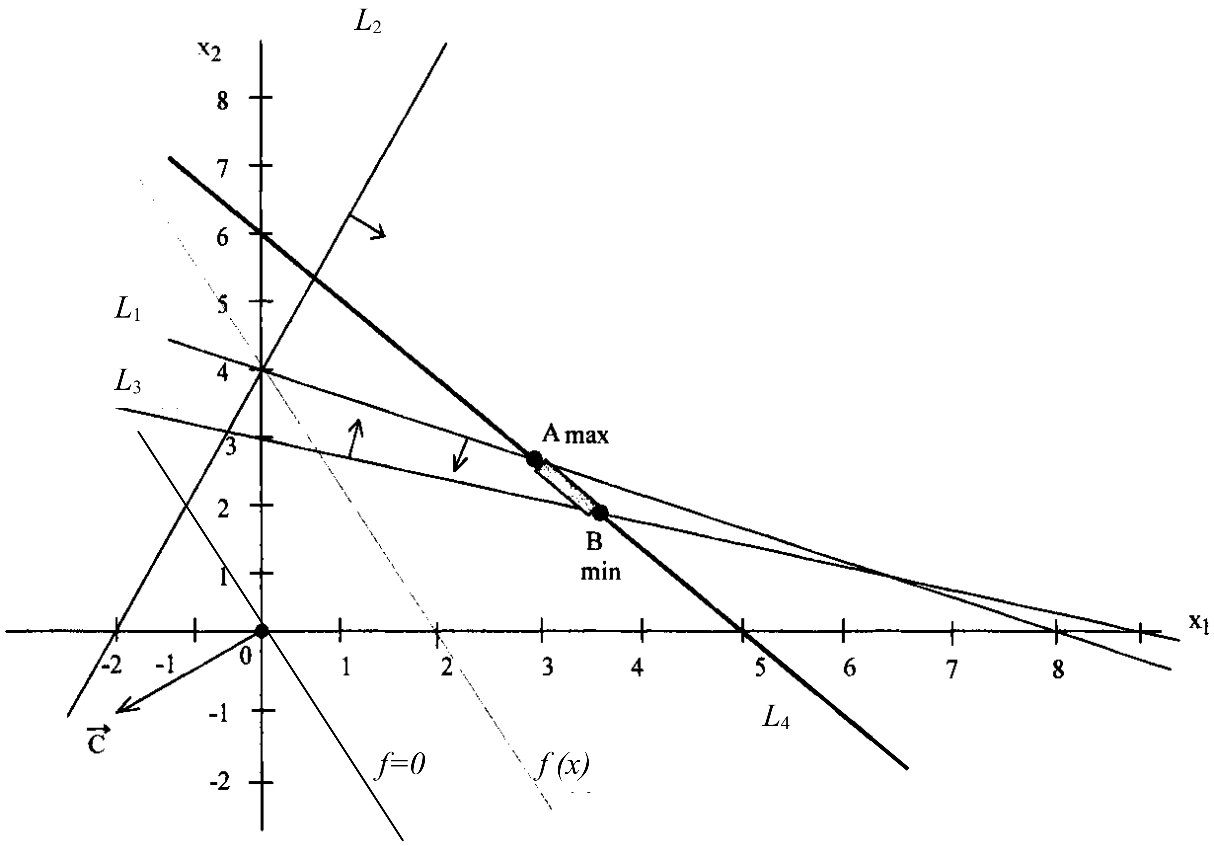

Рисунок 2.7 – Рішення задачі лінійного програмування геометричним способом

Визначимо ОДР. Обмеження-рівність (4) допускає тільки точки, що лежать на прямій (L_4). Підставимо точку (0; 0) в обмеження (L_3) і одержимо $0 > 9$, що є помилковою нерівністю, тому стрілкою (або штрихуванням) позначимо напівплощину, що ***не містить*** точку (0; 0), тобто розташовану вище прямої (L_3). Аналогічно визначимо й укажемо припустимі напівплощини для інших обмежень (див. рис. 2.7). Аналіз напівплощин, припустимих іншими обмеженнями-нерівностями, дозволяє визначити, що ОДР – це відрізок AB.

Для побудови прямої $f = -2x_1 - x_2 = 0$ будуємо вектор-градієнт $\vec{C} = (-2; -1)$ і через точку 0 проводимо пряму, перпендикулярну йому. Для пошуку мінімуму ЦФ побудовану пряму $f = 0$ переміщаємо паралельно самої собі ***проти напрямку*** вектора $\vec{C}$. Точка B – це остання точка відрізка AB, через яку проходить цільова пряма, тобто B – точка мінімуму ЦФ.

Визначимо координати точки B із системи рівнянь прямих обмежень (L_3) і (L_4):

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \geq 9, \\ 6x_1 + 5x_2 = 30, \end{cases}$$

$$B(3{,}46; 1{,}85).$$

Мінімальне значення ЦФ дорівнює:

$$f(B) = -2 \cdot 3{,}46 - 1 \cdot 1{,}85 = -8{,}77.$$

При пошуку точки максимуму ЦФ будемо рухати цільову пряму ***за напрямом*** вектора $\vec{C}$. Останньою точкою відрізка AB, а значить і точкою максимуму, буде точка A. Визначимо координати точки A із системи рівнянь прямих обмежень (L_1) і (L_4):

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 \le 16, \\ 6x_1 + 5x_2 = 30, \\ A(2{,}86;\ 2{,}57). \end{cases}$$

Максимальне значення ЦФ дорівнює:

$$f(A) = -2 \cdot 2{,}86 - 1 \cdot 2{,}57 = -8{,}29.$$

Таким чином, $B(3{,}46;\ 1{,}85)$ – точка мінімуму, $F_{\min}(B) = -8{,}77$; $A(2{,}86;\ 2{,}57)$ – точка максимуму, $F_{\max}(A) = -8{,}29$.

Приклад №2.3. Розв’яжемо задачу геометричним способом, модель якої має вигляд:

$$f(X) = x_1 - 3x_2 \to \min\ (\max);$$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \ge 3, \\ x_1 + x_2 \ge 5, \\ x_1 \le 4, \\ -2x_1 + x_2 \ge 2, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Рішення

Побудуємо багатокутник рішень (рис. 2.8). Для цього обчислимо координати точок перетинання прямих обмежень з осями координат і на площині $x_1 0 x_2$ зобразимо ці граничні прямі:

$x_1 + 3x_2 = 3$ (L_1);
$x_1 + x_2 = 5$ (L_2);
$x_1 = 4$ (L_3);
$-2x_1 + x_2 = 2$ (L_4).

Побудуємо обмеження (рис. 2.8):

$$L_1\!: \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = 0 \end{cases}; \quad L_2\!: \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 5 \\ x_2 = 0 \end{cases}; \quad L_4\!: \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = 0 \end{cases}.$$

Пряма (L_3) проходить через точку $x_1 = 4$ паралельно осі $0x_2$.

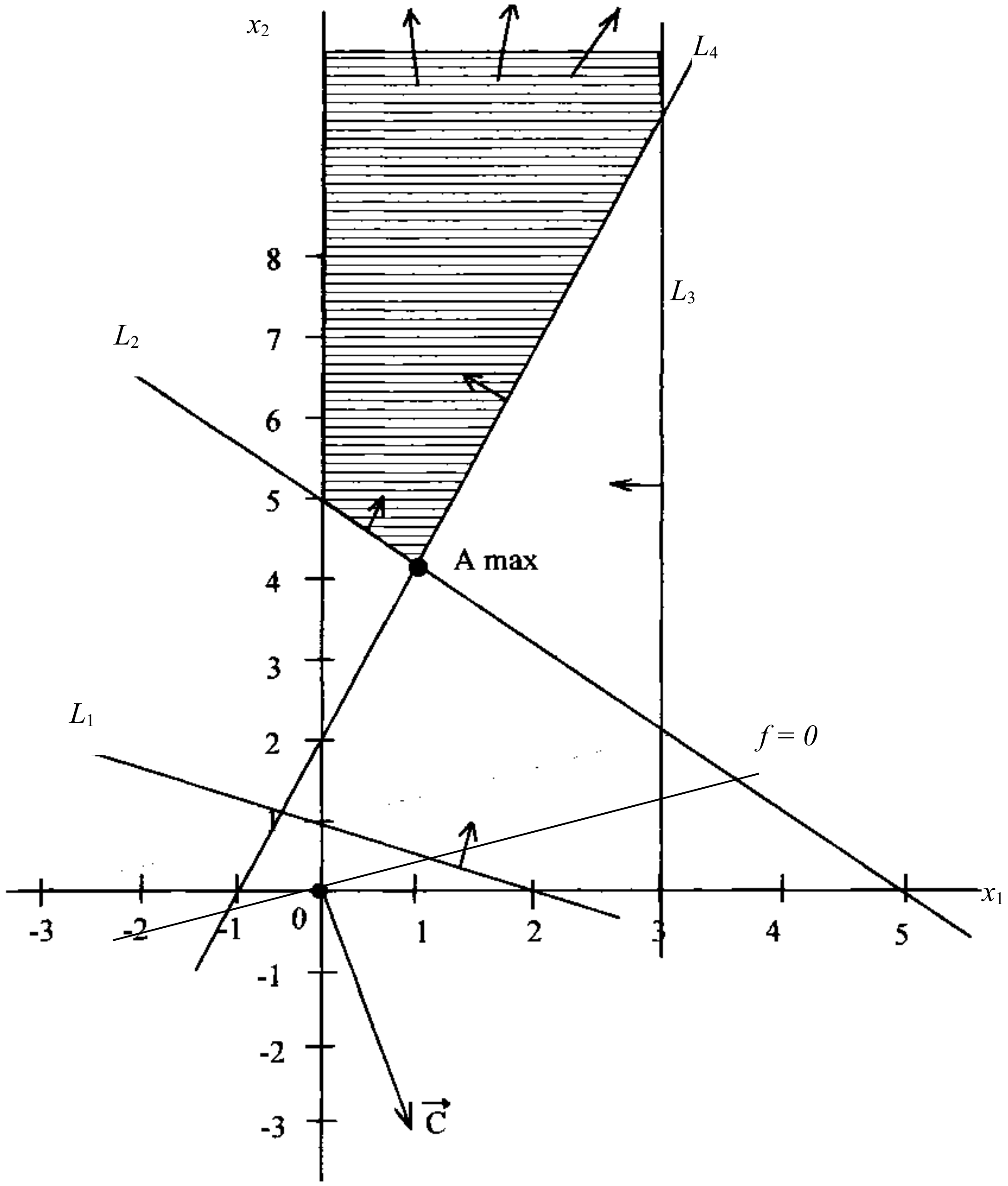

Рисунок 2.8 – Рішення задачі лінійного програмування геометричним способом

Визначимо ОДР. Підставимо точку (0; 0) в обмеження (L_2), одержимо $0 > 5$, що є помилковою нерівністю, тому стрілкою (або штрихуванням) позначимо напівплощину, яка ***не містить*** точку (0; 0), тобто розташовану правіше й вище прямої (L_2).

Аналогічно визначимо й укажемо припустимі напівплощини для інших обмежень (див. рис.2.8). Аналіз припустимих напівплощин дозволяє визначити, що ОДР – це незамкнута область, обмежена прямими (L_2), (L_3), (L_4) і віссю $0x_2$.

Для побудови прямої $f = x_1 - 3x_2 = 0$ будуємо вектор-градієнт $\vec{C} = (1; -3)$ і через точку 0 проводимо пряму, перпендикулярну йому. Для пошуку мінімуму ЦФ побудовану пряму $f = 0$ переміщаємо паралельно самої собі ***проти***

напряму вектора $\vec{C}$. Оскільки в цьому напряму ОДР не обмежена, то неможливо в цьому напряму знайти останню точку ОДР. Звідси слідує, що ЦФ не обмежена на безлічі планів ***знизу*** (оскільки йде пошук мінімуму).

При пошуку максимуму ЦФ будемо рухати цільову пряму ***за напрямом*** вектора $\vec{C}$ до перетинання з вершиною A – останньою точкою ОДР у цьому напряму. Визначимо координати точки A із системи рівнянь прямих обмежень (L_2) і (L_4):

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \geq 5, \\ -2x_1 + x_2 \geq 2, \end{cases} \quad A(1; 4).$$

Максимальне значення ЦФ дорівнює:

$$F(A) = 1 \cdot 1 - 3 \cdot 4 = -11.$$

Таким чином, у даній задачі ЦФ не обмежена на безлічі планів ***знизу,*** а $A(1; 4)$ є точкою максимуму ЦФ, $F_{\max}(A) = -11$.

Контрольні питання

1. Умови графічного розв'язання ЗЛП.
2. Основні етапи графічного розв'язання ЗЛП.
3. Графічне тлумачення можливих ситуацій у розв'язанні ЗЛП.
4. Альтернативний оптимум та його графічне тлумачення.
5. Яку область утворюють допустимі рішення ЗЛП та що вона собою являє?
6. Що таке лінія рівня функції двох змінних?
7. Характерні особливості лінії рівня цільової функції.
8. Де цільова функція ЗЛП досягає свого оптимального значення?

Варіанти задач для самостійного розв'язання

Розв'яжіть задачі лінійного програмування (2.1 – 2.8) графічним методом.

Задача №2.1

$f(X) = 4x_1 - 3x_2 \rightarrow \max (\min)$,

$$\begin{cases} 5x_1 - 2x_2 \leq 20, \\ x_1 + 2x_2 \geq 10, \\ 7x_1 + 10x_2 \leq 80, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Задача №2.2

$f(X) = 5x_1 + 2x_2 \rightarrow \max (\min)$,

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 \geq 6, \\ x_1 + 2x_2 \geq 5, \\ 4x_1 + 2x_2 \geq 8, \\ -x_1 + 2x_2 \geq 6, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Задача №2.3

$f(X) = x_1 + 2x_2 \to \max\ (\min),$

$$\begin{cases} -x_1 + 3x_2 \geq 10, \\ x_1 + x_2 \leq 6, \\ x_1 + 4x_2 \geq 3, \\ -x_1 + 4x_2 \leq 6, \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Задача №2.4

$f(X) = -2x_1 + 5x_2 \to \max\ (\min),$

$$\begin{cases} -3x_1 + 2x_2 \leq 12, \\ x_1 + 2x_2 = 8, \\ x_1 + x_2 \geq 5, \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Задача №2.5

$f(X) = x_1 + 6x_2 \to \max\ (\min),$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 10, \\ 3x_1 - 3x_2 \geq 6, \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 6, \\ 3x_1 + x_2 \geq 4, \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Задача №2.6

$f(X) = -3x_1 - 2x_2 \to \max\ (\min),$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \geq 3, \\ 2x_1 + 2x_2 \geq 2, \\ x_1 + x_2 \geq 6, \\ -2x_1 + 6x_2 \leq 20, \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Задача №2.7*

$f(X) = x_1 + 6x_2 \to \max\ (\min),$

$$\begin{cases} -2x_1 + 12x_2 \geq 8, \\ 4x_1 + 2x_2 \leq 10, \\ 3x_1 - 4x_2 \geq 2, \\ 4x_1 + 5x_2 \geq 8, \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Задача №2.8*

$f(X) = 4x_1 + 2x_2 \to \max\ (\min),$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \geq 7, \\ 2x_1 + x_2 \geq 8, \\ -x_1 + 2x_2 \leq 6, \\ -2x_1 + 8x_2 \geq 4, \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0. \end{cases}$$

3. АНАЛІЗ ЧУТЛИВОСТІ ОПТИМАЛЬНОГО РІШЕННЯ ЗАДАЧ ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ

3.1 Теоретичне введення

Неминуче коливання значень таких економічних параметрів, як ціни на продукцію й сировину, запаси сировини, попит на ринку й т.д. може привести до неоптимальності або непридатності колишнього режиму роботи. Для обліку подібних ситуацій проводиться **аналіз чутливості,** тобто аналіз того, як можливі зміни параметрів вихідної моделі вплинуть на отримане раніше оптимальне рішення задачі ЛП.

При такому аналізі завжди розглядається комплекс лінійних оптимізаційних моделей. Це надає моделі певну динамічність, що дозволяє дослідникові проаналізувати вплив можливих змін вихідних умов на отримане раніше оптимальне рішення. Динамічні характеристики моделей фактично відображають аналогічні характеристики, властиві реальним процесам. Відсутність методів, що дозволяють виявляти вплив можливих змін параметрів моделі на оптимальне рішення, може привести до того, що отримане (статичне) рішення застаріє ще до своєї реалізації. Для проведення аналізу моделі на чутливість із успіхом можуть бути використані графічні методи (табл. 3.1).

Таблиця 3.1 – Можливі ситуації графічного рішення задач ЛП

№	Вид ОДР	Вид оптимального рішення	Примітки
1.1	Багатокутна замкнута	Єдине рішення	ЦФ(X) → max
1.2		Єдине рішення	ЦФ(X) → min
1.3		Нескінченна безліч рішень	
2.1	Багатокутна незамкнута	ЦФ не обмежена знизу	
2.2		ЦФ не обмежена зверху	
2.3		Єдине рішення	ЦФ(X) → max
2.4		Нескінченна безліч рішень	ЦФ(X) → min
3.1	Промінь	Єдине рішення	Кількість обмежень більше однієї
3.2		ЦФ не обмежена зверху	
3.3		ЦФ не обмежена знизу	
4.1	Відрізок	Єдине рішення	
4.2		Нескінченна безліч рішень	
5	Єдина точка	Єдине рішення	Всі обмеження – нерівності
6		Рішень немає	Всі обмеження – нерівності
7		Рішень немає	Всі обмеження – нерівності
8		Рішень немає	Обмеження у вигляді рівностей і нерівностей

Для рішення задачі аналізу чутливості, обмеження лінійної моделі класифікуються в такий спосіб. **Зв'язуючі (активні)** обмеження проходять через оптимальну точку. **Незв'язуючі (неактивні)** обмеження не проходять через оптимальну точку. Аналогічно ресурс, що представляється зв'язуючим обмеженням, називають **дефіцитним,** а ресурс, що представляється незв’язуючим обмеженням – **недефіцитним.** Обмеження називають **надлишковим** у тому випадку, якщо його виключення не впливає на ОДР і, отже, на оптимальне рішення. Виділяють наступні три задачі аналізу на чутливість.

1. Аналіз зміни запасів ресурсів:

- на скільки можна збільшити (обмеження типу ≤) запас ***дефіцитного*** ресурсу для поліпшення оптимального значення ЦФ?
- на скільки можна зменшити (обмеження типу ≤) запас ***недефіцитного*** ресурсу при збереженні оптимального значення ЦФ?

2. Визначення найбільш вигідного ресурсу:

- збільшення (обмеження типу ≤) запасу якого з ресурсів найбільш вигідно?

3. Визначення меж зміни коефіцієнтів цільової функції:

- при якому діапазоні зміни коефіцієнтів цільової функції оптимальне рішення не міняється?

3.2 Методика графічного аналізу чутливості оптимального рішення

Задача 1. Аналіз зміни запасів ресурсів.

Після знаходження оптимального рішення представляється цілком логічним з'ясувати, як відіб'ється на оптимальному рішенні зміна запасів ресурсів. Для цього необхідно відповісти на два питання:

1. На скільки можна збільшити запас деякого ресурсу для поліпшення отриманого оптимального значення цільової функції f?
2. На скільки можна знизити запас деякого ресурсу при збереженні отриманого оптимального значення цільової функції f?

Перш ніж відповісти на поставлені питання, класифікуємо обмеження лінійної моделі як зв’язуючі (активні) і незв’язуючі (неактивні) обмеження. Пряма, що представляє зв’язуюче обмеження, повинна проходити через оптимальну точку, у противному випадку обмеження буде незв’язуючим. На рис. 2.6 зв’язуючими обмеженнями є обмеження (1) і (3), представлені прямими L_1 і L_3 відповідно, тобто ті, які визначають запаси вихідних ресурсів. Обмеження (1) визначає запаси сировини A. Обмеження (3) визначає співвідношення попиту на продукцію, що випускається.

Якщо деяке обмеження є зв’язуючим, то відповідний ресурс відноситься до розряду дефіцитних ресурсів, тому що він використовується повністю.

Таким чином, поняття ***"зв’язуючі обмеження"*** (1) і (3) означає, що при виробництві продукції у точці C(2,4; 1,4) запаси ресурсів A і B витрачаються ***повністю*** і з цієї причини неможливо подальше нарощування виробництва. У цьому полягає економічний зміст поняття ***дефіцитності*** ресурсів, тобто якщо фірма зможе збільшити добові запаси ресурсів, то це дозволить збільшити випуск продукції. У зв'язку із цим виникає питання: до якого рівня доцільно збільшити запаси ресурсів і на скільки при цьому збільшиться ***оптимальне*** виробництво продукції?

Правило №3.1. **Щоб** графічно визначити максимальне збільшення запасу дефіцитного ресурсу, який дозволить ***поліпшити*** оптимальне рішення, **необхідно** пересувати відповідну пряму в напрямку ***поліпшення*** ЦФ доти, поки це обмеження не стане ***надлишковим***.

Ресурс, з яким асоційоване незв'язуюче обмеження, варто віднести до розряду недефіцитних ресурсів (тобто наявних у деякому надлишку). У нашому прикладі незв'язуючими обмеженнями є (2) і (4). Отже, ресурс – сировина *В* – недефіцитний, тобто є в надлишку, а попит на продукцію $П_2$ не буде задоволений повністю (у табл. 3.2 – ресурси 2 і 4).

При аналізі моделі на чутливість для правих частин обмежень визначаються: 1) гранично допустиме збільшення запасу дефіцитного ресурсу, що дозволяє поліпшити знайдене оптимальне рішення, і 2) гранично допустиме зниження запасу недефіцитного ресурсу, що не змінює знайдене раніше оптимальне значення цільової функції.

У нашому прикладі сировина *А* і співвідношення попиту на продукцію, що випускається, $П_1$ і $П_2$ є дефіцитними ресурсами (у табл. 3.2 – ресурси 1, 3).

Розглянемо спочатку ресурс – сировина *А*. На рис. 3.1, при збільшенні запасу цього ресурсу, пряма L_1 переміщається нагору, паралельно самої собі, до точки *K*, у якій перетинаються лінії обмежень L_2, L_3 і L_4.

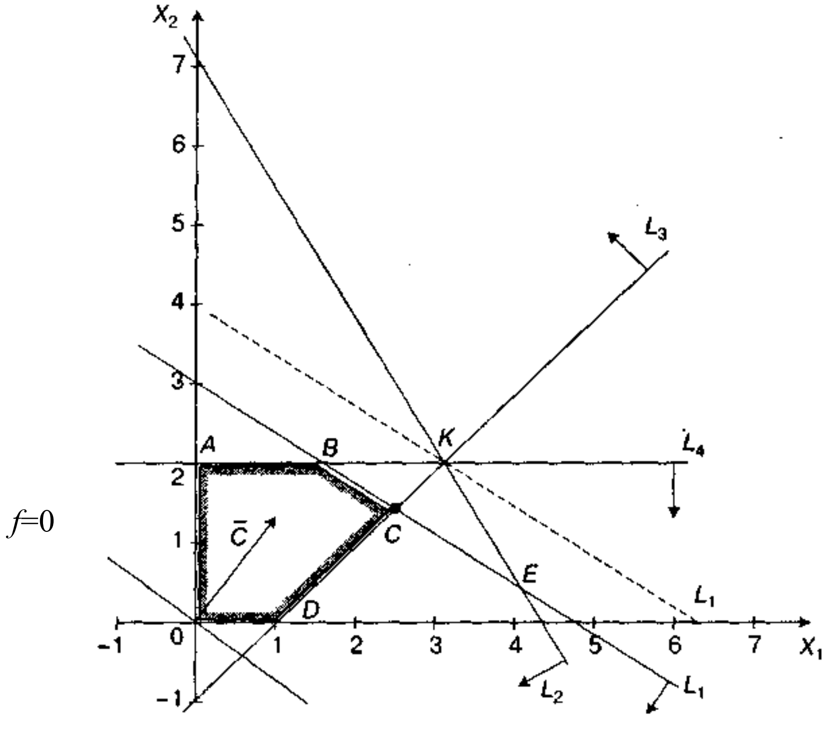

Рисунок 3.1 – Геометрична інтерпретація рішення задачі лінійного програмування (зміна ресурсу *А*)

У точці *K* обмеження (2), (3) і (4) стають зв'язуючими; оптимальному рішенню при цьому відповідає точка *K,* а простором (допустимих) рішень стає багатокутник *AKD*0. У точці *K* обмеження (1) (для ресурсу *А*) стає надлишковим, тому що будь-який подальший ріст запасу відповідного ресурсу не впливає ні на простір рішень, ні на оптимальне рішення.

Таким чином, обсяг ресурсу *A* не слід збільшувати поверх тієї межі, коли відповідне йому обмеження (1) стає надлишковим, тобто пряма (1) проходить через нову оптимальну точку *K*.

Правило №3.2. **Щоб** *чисельно* визначити максимальну величину запасу дефіцитного ресурсу, який вливає на поліпшення оптимального рішення, **необхідно:**

1) визначити координати точки (x_1; x_2), у якій відповідне обмеження стає *надлишковим;*

2) підставити координати (x_1; x_2) у *ліву частину* відповідного обмеження.

Координати точки *K*, у якій перетинаються прямі L_2, L_3 і L_4, знаходяться шляхом розв'язання системи рівнянь:

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = 13, \\ x_1 - x_2 = 1, \\ x_2 = 2. \end{cases}$$

У результаті виходить $x_1 = 3$ і $x_2 = 2$. Потім, шляхом підстановки координат точки *K* у ліву частину обмеження (1), визначається максимально допустимий запас ресурсу *A*:

$$2x_1 + 3x_2 = 2 \cdot 3 + 3 \cdot 2 = 12 \text{ [од.сировини } A\text{/добу].}$$

Подальше збільшення запасу сировини *A* недоцільно, тому що це *не змінить* ОДР і *не приведе* до іншого оптимального рішення (див. рис. 3.1). Доход від продажу продукції в обсязі, що відповідає точці *K*, можна розрахувати, підставивши її координати (3; 2) у вираз ЦФ:

$$3x_1 + 4x_2 = 3 \cdot 3 + 4 \cdot 2 = 17 \text{ [гр.од./добу].}$$

Розглянемо задачу про зміну співвідношення попиту на продукцію $П_1$ і $П_2$. Відповідно до правила № 3.1, новою оптимальною точкою стає точка *E,* де перетинаються прямі L_1 і L_2.

Рис. 3.2 ілюструє ситуацію, коли розглядається задача про зміну співвідношення попиту на продукцію $П_1$ і $П_2$.

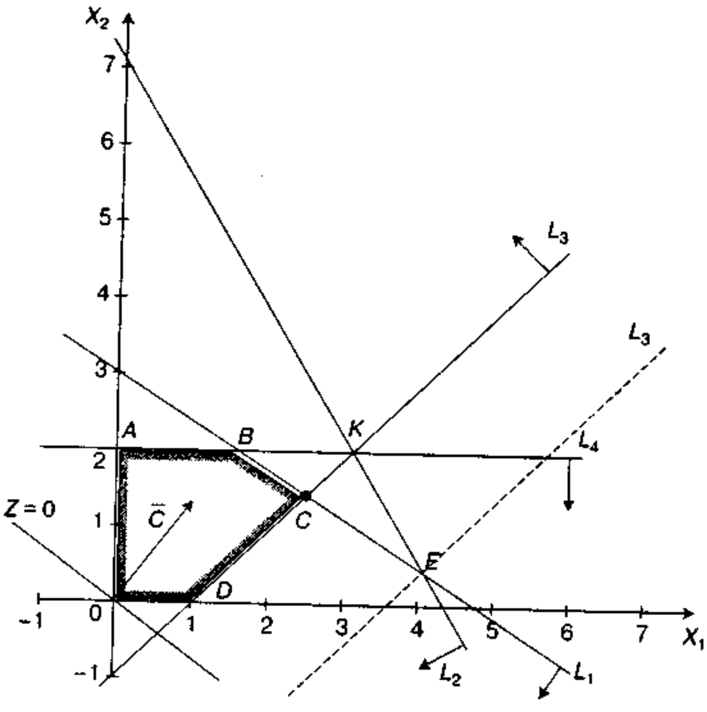

Рисунок 3.2 – Геометрична інтерпретація рішення задачі лінійного програмування (зміна попиту на продукцію)

Координати даної точки (правило № 3.2) знаходяться шляхом розв’язання системи рівнянь (1) і (2) у такий спосіб:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 9, \\ 3x_1 + 2x_2 = 13. \end{cases}$$

У результаті виходить $x_1 = 4{,}2$; $x_2 = 0{,}2$, причому добовий попит на продукцію $П_1$ не повинен перевищувати попит на продукцію $П_2$ на величину $x_1 - x_2 = 4{,}2 - 0{,}2 = 4$ од. продукції.

Подальше збільшення розриву в попиті на продукцію $П_1$ і $П_2$ не буде впливати на оптимальне рішення. Доход від продажу продукції при цьому складе:

$$3x_1 + 4x_2 = 3 \cdot 4{,}2 + 4 \cdot 0{,}2 = 13 \text{ [гр.од./добу]}.$$

Обмеження (2) і (4) є ***незв’язуючими***, тому що не проходять через оптимальну точку *C* (див. рис. 2.6). Відповідні їм ресурси (запас ресурсу *B* та попит на продукцію $П_2$) є ***недефіцитними.*** З економічної точки зору це означає, що в цей момент рівень ресурсів на продукцію *безпосередньо* не визначає обсяги виробництва. Тому деякі їх коливання ніяк не можуть вплинути на оптимальний режим виробництва в точці *C*. Розглянемо задачу про зменшення правої частини цих ***незв’язуючих*** обмежень.

Правило №3.3. **Щоб** визначити максимальне зменшення запасу недефіцитного ресурсу, який *не міняє* оптимальне рішення, **необхідно** пересувати відповідну пряму *до перетинання з оптимальною* точкою.

***Правило №3.4*. Щоб** *чисельно* визначити мінімальну величину запасу недефіцитного ресурсу, який не міняє оптимальне рішення, **необхідно** підставити координати *оптимальної* точки в *ліву частину* відповідного обмеження.

Обмеження (4) $x_2 \leq 2$ фіксує граничний рівень попиту на продукцію $П_2$. З рис. 2.6 виходить що, не змінюючи оптимального рішення, пряму L_4 (AB) можна опускати вниз до перетинання з оптимальною точкою C. Так як точка C має координати $x_1 = 2,4$; $x_2 = 1,4$, зменшення попиту на продукцію $П_2$ до величини $x_2 = 1,4$ ніяк не вплине на оптимальність отриманого раніше рішення.

Розглянемо обмеження (2) $3x_1 + 2x_2 \leq 13$, що являє собою обмеження на недефіцитний ресурс – сировина B. І в цьому випадку праву частину – запаси сировини B – можна зменшувати доти, поки пряма L_2 не досягне точки C. При цьому права частина обмеження (2) стане рівною $3x_1 + 2x_2 = 3 \cdot 2,4 + 2 \cdot 1,4 = = 10,0$, що дозволяє записати це обмеження у вигляді: $3x_1 + 2x_2 \leq 10$. Цей результат показує, що раніше отримане оптимальне рішення не зміниться, якщо добовий запас ресурсу B зменшити на 3 од.

Результати проведеного аналізу можна звести у табл. 3.2:

Таблиця 3.2 – Результат аналізу ресурсів

Ресурс	Тип ресурсу	Максимальна зміна запасу ресурсу, $\max\Delta R_i$, од.	Максимальне збільшення доходу від зміни ресурсу, $\max \Delta f(X^*)$, гр. од.
1 (A)	Дефіцитний	12 – 9 = +3	17 – 12,8 = +4,2
2 (B)	Недефіцитний	10 – 13 = –3	12,8 – 12,8 = 0
3	Дефіцитний	4 – 1 = +3	13,4 – 12,8 = +0,6
4	Недефіцитний	1,4 – 2 = –0,6	12,8 – 12,8 = 0

Задача 2. Визначення найбільш вигідного ресурсу.

У задачі 1 аналізу на чутливість було досліджено вплив на оптимум збільшення обсягу дефіцитних ресурсів. При обмеженнях, пов'язаних з додатковим залученням ресурсів, природно поставити запитання: якому з ресурсів варто віддати перевагу при вкладенні додаткових коштів? Для цього вводиться характеристика цінності кожної додаткової одиниці дефіцитного ресурсу, що виражається через відповідне збільшення оптимального значення цільової функції. Таку характеристику для розглянутого прикладу можна одержати безпосередньо з табл. 3.2, у якій наведені результати рішення задачі 1 на чутливість. Позначимо цінність додаткової одиниці i-го виду ресурсу через y_i. Величина y_i визначається із співвідношення

$$y_i = \frac{max\, \Delta f\left(X^*\right)}{max\, \Delta R_i},$$

де $\max\Delta f(X^*)$ – максимальне збільшення оптимального значення ЦФ;

$\max\Delta R_i$ – максимально допустимий приріст обсягу i-го ресурсу.

Результати розрахунку цінності одиниці кожного з ресурсів представлені в табл. 3.3:

Таблиця 3.3 – Результати розрахунку цінності ресурсів

Ресурс i-го виду	Тип ресурсу	Значення y_i
1 (A)	Дефіцитний	4,2 / 3 = 1,4
2 (B)	Недефіцитний	0 / (–3) = 0
3	Дефіцитний	0,6 / 3 = 0,2
4	Недефіцитний	0 / (–0,6) = 0

З табл. 3.3 видно, що збільшення добового запасу ресурсу A [обмеження (1)] на 3 од. продукції дозволить одержати додатковий доход, рівний y_1 = 1,4 гр.од./добу, а збільшення розриву в попиті на продукцію $П_1$ і $П_2$ [обмеження (3)] принесе додатковий доход у розмірі y_3 = 0,2 гр.од./добу.

Недефіцитні ресурси мають нульові цінності, оскільки зміна цих ресурсів не приводить до збільшення доходу.

Таким чином, отримані результати свідчать про те, що додаткові вкладення в першу чергу варто направити на збільшення ресурсу A і лише потім – на формування співвідношення попиту на продукцію $П_1$ і продукцію $П_2$. Що стосується недефіцитних ресурсів, то, як і слід було сподіватися, їхній обсяг збільшувати не слід.

Задача 3. Визначення меж зміни коефіцієнтів цільової функції.

Зміна цін на продукцію, тобто зміна коефіцієнтів цільової функції, впливає на нахил прямої, що представляє цю функцію в прийнятій системі координат. Так, при збільшенні коефіцієнта ЦФ c_1 або зменшенні c_2 цільова пряма обертається ***за*** годинниковою стрілкою. При зменшенні c_1 або ж збільшенні c_2 цільова пряма обертається ***проти*** годинникової стрілки.

Варіація коефіцієнтів цільової функції може привести до зміни сукупності зв'язуючих обмежень і, отже, статусу того чи іншого ресурсу (тобто зробити недефіцитний ресурс дефіцитним, і навпаки).

При аналізі моделі на чутливість до змін коефіцієнтів цільової функції необхідно досліджувати наступні питання:

1. Який діапазон зміни того чи іншого коефіцієнта цільової функції, при якому не змінюється оптимальне рішення?
2. На скільки варто змінити той чи інший коефіцієнт цільової функції, щоб зробити деякий недефіцитний ресурс дефіцитним і, навпаки, дефіцитний ресурс зробити недефіцитним?

Відповімо на поставлені питання на прикладі.

Розглядаючи перше питання, позначимо через c_1 і c_2 доходи підприємства від продажу одиниці продукції $П_1$ і $П_2$ відповідно. Тоді цільову функцію можна представити в наступному виді:

$$f = c_1x_1 + c_1x_2.$$

На рис. 2.6 видно, що при збільшенні c_1 або зменшенні c_2 пряма, що представляє цільову функцію f, обертається (навколо точки C) за годинниковою стрілкою. Якщо ж c_1 зменшується або c_2 збільшується, ця пряма обертається в протилежному напрямку – проти годинникової стрілки. Таким чином, точка C буде залишатися оптимальною точкою доти, поки нахил прямої не вийде за межі, обумовлені нахилами прямих для обмежень (1) і (3).

Коли нахил прямої f стане рівним нахилу прямої L_1, одержимо дві альтернативні оптимальні кутові точки – C і B. Аналогічно, якщо нахил прямої f стане рівним нахилу прямої для обмеження (3), будемо мати альтернативні оптимальні кутові точки C і D. Наявність альтернативних оптимумів свідчить про те, що те саме оптимальне значення f може досягатися при різних значеннях змінних x_1 і x_2. Як тільки нахил прямої вийде за межі зазначеного вище інтервалу c_1, одержимо деяке нове оптимальне рішення.

Розглянемо на прикладі, яким чином можна знайти припустимий інтервал зміни c_1 при якому точка C залишається оптимальною. Для цього застосуємо правило № 3.5 і формулу розрахунку тангенса кута нахилу прямої (рис. 3.3).

Правило №3.5. **Щоб** визначити границі припустимого діапазону зміни коефіцієнта ЦФ, наприклад min c_1 і max c_1, **необхідно** прирівняти тангенс кута нахилу цільової прямої по черзі до тангенсів кутів нахилу прямих зв'язуючих обмежень, наприклад tg $\alpha_{(1)}$ і tg $\alpha_{(2)}$.

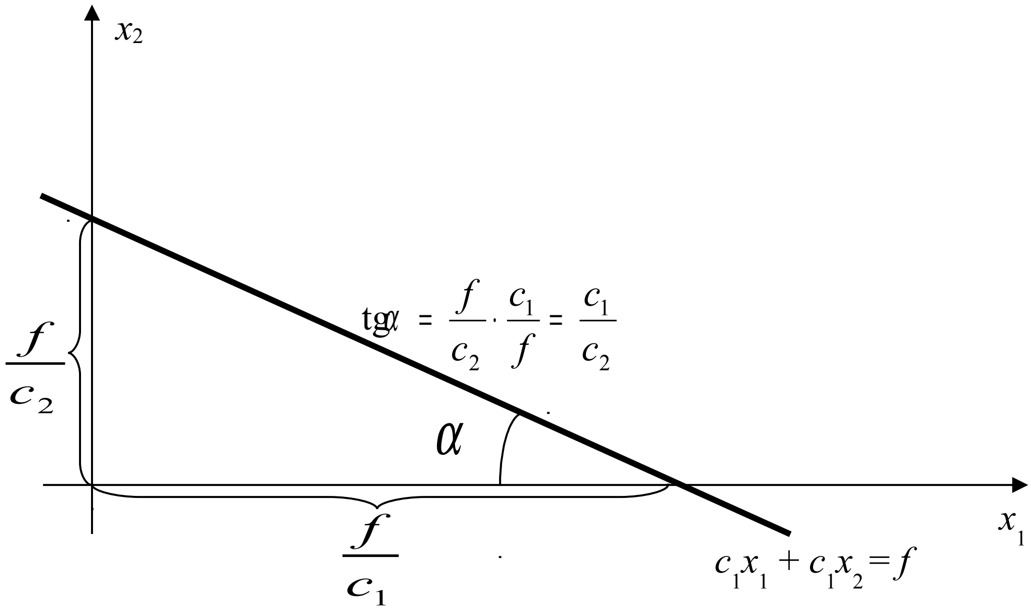

Рисунок 3.3 – Визначення тангенса кута нахилу tgα прямої $c_1x_1 + c_1x_2 = f$

Визначимо тангенси кутів нахилу:

1) цільової прямої $f(X) = 3x_1 + 4x_2 \to \max$, з огляду на те, що $c_2 = 4$ фіксоване

$$\mathrm{tg}\alpha_{\text{ЦФ}} = \frac{c_1}{c_2} = \frac{c_1}{4};$$

2) зв'язуючого обмеження $2x_1 + 3x_2 \le 9$

$$\mathrm{tg}\alpha_{L_1} = \frac{2}{3};$$

3) зв'язуючого обмеження $x_1 - x_2 \le 1$

$$\mathrm{tg}\alpha_{L_3} = -\frac{1}{1} = -1.$$

Для знаходження min c_1 цільова пряма повинна збігтися із прямою (1). Вихідне значення коефіцієнта $c_2 = 4$ залишимо незмінним. На рис. 2.6 видно, що значення c_1 можна зменшувати доти, поки пряма f не збіжиться із прямою L_1 (відрізок BC). Це крайнє мінімальне значення коефіцієнта c_1 можна визначити з рівності кутів нахилів прямої f і прямої L_1 ($\mathrm{tg}\alpha_{ЦФ} = \mathrm{tg}\alpha_{L_1}$).

Так як тангенс кута нахилу для прямої f дорівнює $\frac{c_1}{4}$, а для прямої (1) дорівнює $\frac{2}{3}$, то мінімальне значення c_1 визначимо з рівності $\frac{c_1}{4} = \frac{2}{3}$, звідки

$$\min c_1 = \frac{8}{3} \text{ [гр. од. / од.]}.$$

Для знаходження max c_1 цільова пряма повинна збігтися із прямою (3):

$$\mathrm{tg}\alpha_{ЦФ} = \mathrm{tg}\alpha_{L_3},$$

$$\frac{c_1}{4} = +\infty,$$

$$\max c_1 = +\infty \text{ [гр. од. / од.]}.$$

З рис 2.6 видно, що значення c_1 можна збільшувати безмежно, тому що пряма f при $c_2 = 4$ і $c_1 \to +\infty$ не збігається із прямою L_3 (відрізок DC) і, отже, точка C при всіх значеннях коефіцієнта $c_1 \ge \frac{8}{3}$ буде єдиною оптимальною.

Інтервал зміни c_1, у якому точка C, як і раніше, залишається єдиною оптимальною точкою, визначається нерівністю $\frac{8}{3} < c_1 < +\infty$. При $c_1 = \frac{8}{3}$ оптимальними кутовими точками будуть як точка C, так і точка B. Як тільки коефіцієнт c_1 стає менше $\frac{8}{3}$, оптимум зміщується у точку B.

Можна помітити, що, як тільки коефіцієнт c_1 виявляється менше $\frac{8}{3}$, ресурс (3) стає недефіцитним, а ресурс (4) – дефіцитним. Для підприємства це означає наступне: якщо доход від продажу одиниці продукції $П_1$ стане менше $\frac{8}{3}$ гр.од., то найбільш вигідна виробнича програма підприємства повинна передбачати випуск максимально допустимої кількості продукції $П_2$ (повністю задовольняти попит на продукцію $П_2$).

При цьому співвідношення попиту на продукцію $П_1$ і $П_2$ не буде лімітувати обсяги виробництва, що обумовить недефіцитність ресурсу (3).

Збільшення коефіцієнта c_1 понад $\frac{8}{3}$ гр. од. не знижує проблему дефіциту ресурсів (1) і (3). Точка C – точка перетинання прямих L_1 і L_3 – залишається завжди оптимальною.

Контрольні питання

1. Які обмеження називають зв’язуючими та незв’язуючими?
2. Виділіть основні три задачі аналізу чутливості оптимального рішення.
3. В чому сутність аналізу зміни запасів ресурсів?
4. В чому сутність визначення найбільш вигідного ресурсу?
5. В чому сутність визначення меж зміни коефіцієнтів цільової функції?

Варіанти задач для самостійного розв’язання

Задача № 3.1

Проаналізуйте випадки, коли ціна на продукцію першого виду:

1) перевищила 4 гр. од.;
2) дорівнює 1 гр. од.;
3) дорівнює 4 гр. од.

Яка точка стане оптимальною, якими будуть обсяги виробництва продукції, як зміниться дефіцитність та обсяг споживання ресурсів задачі?

Задача № 3.2

Визначте допустимий діапазон зміни ціни на продукцію 2-го виду при незмінному значенні ціни на продукцію першого виду 3 гр.од. у вихідній задачі. Проаналізуйте вплив зміни ціни на продукцію 2-го виду на обсяги виробництва й дефіцитність ресурсів у вихідній задачі (аналогічно задачі №3.1).

Задача № 3.3

Нехай у задачі №1.1 обмеження (1) для ресурсу A змінилося на $2x_1 + 3x_2 \leq 10$. Визначте наступні параметри задачі:

1) нове оптимальне рішення X^* і $f(X^*)$;

1) максимально допустимий приріст обсягу ресурсу A і відповідне збільшення ЦФ;

2) величини y_i для всіх ресурсів задачі.

Задача № 3.4

Перелічіть види всіх ресурсів і обмежень задачі. Проведіть аналіз чутливості оптимального рішення для ресурсів (1), (2), (3) і цін c_1 і c_2 (табл. 3.4).

Таблиця 3.4 – Параметри задачі №3.4

Модель	Координати перетинання прямих з осями $0x_1$ і $0x_2$
$f(X) = 6x_1 + 5x_2 \rightarrow \max$ [тис.грн.]	(2; 2,4)
$x_1 + 2x_2 \leq 11$ [од. ресурсу] (1)	(11; 5,5)
$2x_1 + x_2 \leq 7$ [од. ресурсу] (2)	(3,5; 7)
$2x_1 - x_2 \leq 1$ [од. ресурсу] (3)	(0,5; –1)
$2x_1 + 3x_2 \geq 3$ [од. ресурсу] (4)	(1,5; 1)
$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0$	$X_{\max}$ (1; 5) [од. прод.], $f(X_{\max}) = 31$ [тис.грн.]

Задача № 3.5*

Використовуючи конкретні приклади моделей задач, сформулюйте *задачі, правила, економічну інтерпретацію* аналізу оптимального рішення на чутливість для наступних випадків:

1) у задачі існують обмеження зі знаком „≥”;

2) при пошуку допустимого діапазону зміни ціни цільова функція, повертаючись навколо оптимальної точки, проходить через:

а) вертикальне положення;

б) горизонтальне положення.

Задача № 3.6*

Деяка фірма виготовляє продукцію двох видів з використанням трьох видів ресурсів – нерівності (1), (3), (5). Нерівності (2) і (4) обмежують відповідно мінімальний добовий попит на продукцію першого виду й максимальний добовий попит на продукцію другого виду. ЦФ являє собою доход від реалізації продукції. Перелічіть види всіх ресурсів і обмежень задачі й проведіть повний аналіз чутливості оптимального рішення (табл. 3.5).

Таблиця 3.5 – Параметри задачі №3.6

Модель	Координати перетинання прямих з осями $0x_1$ і $0x_2$
$f(X) = 5x_1 + x_2 \rightarrow \max$ [грн.]	
$-x_1 + x_2 \leq 1$ [од. ресурсу] (1)	(–1; 1)
$x_1 \geq 2$ [од. ресурсу] (2)	(2; –)
$4x_1 - 8x_2 \leq 12$ [од. ресурсу] (3)	(3; –1,5)
$x_2 \leq 6$ [од. ресурсу] (4)	(–; 6)
$3x_1 + 2x_2 \leq 21$ [од. ресурсу] (5)	(7; 10,5)
$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0$	$X_{\max}$ (6;1,5) [од. прод.], $f(X_{\max}) = 31,5$ [грн.]

*Задача № 3.7**

Перелічіть види всіх ресурсів і обмежень задачі. Проведіть повний аналіз чутливості оптимального рішення (табл. 3.6).

Таблиця 3.6 – Параметри задачі №3.7

Модель	Координати перетинання прямих з осями $0x_1$ і $0x_2$
$f(X) = 4x_1 + x_2 \rightarrow \max$ [грн.]	(1; 4)
$-x_1 + 4x_2 \leq 9$ [од. ресурсу] (1)	(–9; 2,3)
$3x_1 + x_2 \geq 5$ [од. ресурсу] (2)	(1,7; 5)
$x_1 + 2x_2 \leq 7$ [од. ресурсу] (3)	(7; 3,5)
$5x_1 - 8x_2 \leq -1$ [од. ресурсу] (4)	(–0,2; 0,1)
$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0$	$X_{\max}$ (3;2) [од. прод.], $f(X_{\max}) = 14$ [грн.]

4. ЧИСЕЛЬНІ МЕТОДИ РІШЕННЯ ЗАДАЧ ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ

4.1 Канонічна форма задач лінійного програмування

Якщо задача лінійного програмування має більше двох вільних змінних, то її розв'язання потребує застосування деякого алгебраїчного (чисельного) методу. Принцип, що лежить в основі вирішення задачі з множиною змінних, достатньо простий. Припускається, що оптимальному рішенню відповідає одна з крайніх точок припустимої множини. Отже, необхідно провести оцінку значень цільової функції у всіх крайніх точках припустимої множини і вибрати ту з них, в якій досягається оптимальне значення цільової функції. Використовуються методи матричної алгебри, і такий алгоритм переходу від однієї крайньої точки припустимої множини до іншої, при якому перехід здійснюється тоді, коли значення цільової функції поліпшується. Якщо виявляється, що деяке базисне рішення поліпшити вже не можна, то воно є оптимальним планом задачі. Цей алгоритм дістав назву *симплекс-методу* [1, 6, 12].

У звичайному симплекс-методі приймається передумова про максимізацію цільової функції задачі лінійного програмування в умовах системи обмежень із знаком "≤". Це означає, що при реалізації даного алгоритму початковою крайньою точкою може бути обрано початок координат. Пошук оптимального рішення завжди починається зі значення цільової функції, яке дорівнює нулю.

Симплекс-метод можна застосовувати також і при рішенні задач мінімізації, і при рішенні задач, система обмежень яких містить обмеження зі знаком "≥" або рівняння. Ця процедура передбачає введення в задачу штучних, а також надлишкових і залишкових змінних.

Для розв'язання задачі лінійного програмування симплекс-методом необхідно привести її до канонічної форми.

Задача лінійного програмування записана в *канонічній формі* (від грецького слова «канон» – зразок. Назва «канонічна» рівнозначна назві «типова»), якщо її цільова функція максимізується, обмеження мають вигляд рівностей з невід'ємною правою частиною і всі змінні невід'ємні.

Задача лінійного програмування в канонічній формі має вигляд:

$$f = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \to \max;$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \tag{4.1}$$

$$x_j \ge 0 \left(j = \overline{1, n}\right); \quad b_i \ge 0 \left(i = \overline{1, m}\right).$$

Так як загальна задача лінійного програмування має обмеження не тільки виду «=», але й «≤», «≥», а цільова функція може або максимізуватися, або мінімізуватися, то необхідно вміти приводити будь-які задачі лінійного програмування до канонічної форми. Із цією метою розглянемо два види задач лінійного програмування й покажемо, як ці задачі привести до канонічної форми.

Одна із окремих задач лінійного програмування може бути представлена моделлю:

$$f = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \to \max;$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \le b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \le b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \le b_m, \end{cases} \tag{4.2}$$

$$x_j \ge 0\left(j = \overline{1, n}\right); \quad b_i \ge 0\left(i = \overline{1, m}\right).$$

Ліва частина кожного обмеження даної задачі менша або дорівнює правій. Для того щоб ліва частина обмеження дорівнювала правій, необхідно до лівої частини кожного обмеження додати відповідно невід’ємні змінні x_{n+1}, x_{n+2}, …, x_{n+m}. Ці змінні вводяться в цільову функцію з нульовими коефіцієнтами, щоб не змінити її значення.

Після приведення до канонічної форми задача (4.2) буде мати вигляд:

$$f = c_1x_1 + \ldots + c_nx_n + 0 \cdot x_{n+1} + 0 \cdot x_{n+2} + \ldots + 0 \cdot x_{n+m} \to \max;$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + \ldots + a_{1n}x_n + x_{n+1} = b_1, \\ a_{21}x_1 + \ldots + \ldots + a_{2n}x_n \quad + \cdot\, x_{n+2} = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + \ldots + \ldots + a_{mn}x_n \quad + x_{n+m} = b_m, \end{cases} \tag{4.3}$$

$$x_j \ge 0\left(j = \overline{1, n+m}\right).$$

Змінні x_{n+1}, x_{n+2}, …, x_{n+m} називаються *додатковими.* Наприклад, для задачі використання ресурсів, розглянутої в прикладі №1.1, модель якої аналогічна моделі (4.2), додаткові змінні будуть економічно інтерпретуватися як кількість невикористовуваних ресурсів.

Розглянемо інший окремий вид задачі лінійного програмування:

$$f = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \to \min;$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \ge b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \ge b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \ge b_m, \end{cases} \tag{4.4}$$

$$x_j \ge 0\left(j = \overline{1, n}\right); \quad b_i \ge 0\left(i = \overline{1, m}\right).$$

Визначення мінімального значення цільової функції f можна звести до визначення максимального значення функції $(-f)$,тому що $\min f = -\max(-f)$.

Для приведення обмежень виду «≥» до обмежень-рівностей необхідно від лівої частини кожного обмеження відняти відповідно невід'ємні змінні x_{n+1}, x_{n+2}, …, x_{n+m}. Ці змінні вводяться в цільову функцію з нульовими коефіцієнтами, щоб не змінити її значення.

Після приведення до канонічної форми задача (4.4) буде мати вигляд:

$$f = -c_1x_1 - \ldots - c_nx_n + 0 \cdot x_{n+1} + 0 \cdot x_{n+2} + \ldots + 0 \cdot x_{n+m} \rightarrow \max;$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + \ldots + a_{1n}x_n - x_{n+1} = b_1, \\ a_{21}x_1 + \ldots + \ldots + a_{2n}x_n - x_{n+2} = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + \ldots + \ldots + a_{mn}x_n - x_{n+m} = b_m, \end{cases} \qquad (4.5)$$

$$x_j \geq 0 \left(j = \overline{1, n+m}\right).$$

Таким чином, якщо в задачі лінійного програмування визначається мінімум цільової функції, то таку задачу необхідно звести до визначення максимуму цільової функції, а всі наявні обмеження виду «≤» і «≥» привести до обмежень-рівностей.

Зауваження №4.1. Вимога максимізації цільової функції при приведенні задачі до канонічної форми не обов'язкова й висувається з метою простоти викладу матеріалу, пов'язаного з рішенням задач лінійного програмування симплекс-методом. Методика рішення задач на мінімум трохи відрізняється від методики рішення задач на максимум. Тому вимога максимізації цільової функції дає можливість розв'язувати задачу за єдиним алгоритмом.

4.2 Базисні рішення задач лінійного програмування

Для рішення задачі лінійного програмування описаним далі симплекс-методом, необхідно привести її до канонічної форми й визначити вихідне припустиме базисне рішення. Відштовхуючись від цього рішення, за допомогою алгоритму симплекс-методу приходять до оптимального рішення або висновку про те, що задача рішення не має.

Раніше відзначалося, що задача лінійного програмування досягає свого оптимального рішення в кутовій точці многогранника рішень. Координати кутової точки – це базисне рішення задачі. Визначити базисне рішення можна шляхом послідовних елементарних перетворень обмежень або спеціальних обчислювальних прийомів.

Розглянемо обмеження задачі лінійного програмування, записаної в канонічній формі (4.1). Ці обмеження являють собою систему m лінійних рівнянь із n змінними. Будемо вважати, що $m < n$, хоча на практиці зустрічаються задачі, у яких $m > n$ і $m = n$. Система сумісна і ранг її матриці дорівнює m.

В обмеженнях задачі (4.1) всі змінні можна розділити на дві групи. Перша група – основні (залежні) змінні, число яких повинно дорівнювати числу лінійно незалежних рівнянь m, друга – неосновні (незалежні) змінні, число яких дорівнює $n - m$. Такий поділ не зв'язується з індексами (порядковими номерами) змінних.

Будемо вважати, що обмеження задачі (4.1), записаної в канонічній формі, шляхом послідовних елементарних перетворень можуть бути приведені до виду

$$\begin{cases} x_1 + a'_{1,m+1}x_{m+1} + \ldots + a'_{1n}x_n = b'_1, \\ x_2 + a'_{2,m+1}x_{m+1} + \ldots + a'_{2n}x_n = b'_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_m + a'_{m,m+1}x_{m+1} + \ldots + a'_{mn}x_n = b'_m, \end{cases} \tag{4.6}$$

$$b'_i \geq 0 \left(i = \overline{1, m}\right).$$

У системі (4.6) коефіцієнти при кожному невідомому $x_1, x_2, ..., x_m$ утворюють одиничні вектори:

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},\ E_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},\ \ldots,\ E_m = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Сукупність одиничних векторів $E_1, E_2, ..., E_m$ утворює *базис* m*-мірного* простору, а змінні $x_1, x_2, ..., x_m$ називаються *базисними.* Змінна є *базисною,* якщо вона входить тільки в одне з рівнянь системи з коефіцієнтом, рівним одиниці. Всі інші змінні є *небазисними.*

Поодиноке рішення, отримане шляхом прирівнювання небазисних (незалежних) змінних до нуля й знаходження значень базисних (залежних) змінних, називається *базисним рішенням.* Отже, якщо $x_{m+1} = 0$, $x_{m+2} = 0$, ..., $x_{m+n} =$ $= 0$, то $x_1 = b'_1$, $x_2 = b'_2$, ..., $x_m = b'_m$. Перше рішення задачі, отримане таким чином, називається *вихідним базисним рішенням.*

Базисне рішення називається *виродженим,* якщо значення однієї або декількох базисних змінних дорівнюють нулю. Задача, що має хоча б одне вироджене базисне рішення, називається *виродженою,* у противному випадку – *невиродженою.*

При рішенні задачі лінійного програмування базисні змінні, як правило, не виділяють шляхом послідовних елементарних перетворень, а користуються спеціальними обчислювальними прийомами.

Як відомо, у задачі лінійного програмування може зустрічатися три види обмежень: «≤», «≥» і «=». Після приведення задачі, що має обмеження «≤» (4.2), до канонічної форми (4.3) кожне рівняння буде містити базисну змінну, а саме $x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots, x_{n+m}$. Прирівнявши небазисні змінні до нуля: $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, ..., $x_n = 0$, одержимо припустиме базисне рішення:

$$x_{n+1} = b_1,\ x_{n+2} = b_2,\ \ldots,\ x_{n+m} = b_m.$$

Після приведення окремої задачі, що має обмеження «≥» (4.4), до канонічної форми (4.5), змінні x_{n+1}, x_{n+2}, …, x_{n+m} не можуть бути прийняті в якості базисних, тому що вони входять у рівняння з коефіцієнтом (–1). Тому для виділення базисних змінних і знаходження припустимого базисного рішення використовується *метод штучного базису,* що полягає в наступному.

У кожне обмеження задачі (4.5) вводяться відповідно штучні невід'ємні змінні x_{n+m+1}, x_{n+m+2}, …, x_{n+m+m}, які приймаються в якості базисних. Штучні змінні входять у цільову функцію задачі з коефіцієнтом ($-M$)*,* де M – велике позитивне число, у багато разів більше заданих в умові задачі.

Після введення штучних змінних задача (4.5) приймає вид:

$$\begin{aligned} f = &- c_1x_1 - c_2x_2 - \ldots - c_nx_n + \\ &+ 0 \cdot x_{n+1} + 0 \cdot x_{n+2} + \ldots + 0 \cdot x_{n+m} - \\ &- M\,x_{n+m+1} - M\,x_{n+m+2} - \ldots - M\,x_{n+m+m} \to \max; \end{aligned}$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n - x_{n+1} + x_{n+m+1} = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_1 + \ldots + a_{2n}x_n - x_{n+2} + x_{n+m+2} = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m1}x_1 \ldots + a_{mn}x_n - x_{n+m} + x_{n+m+m} = b_m, \end{cases}$$

$$x_j \geq 0 \left(j = \overline{1, n+m+m} \right).$$

Штучні змінні вводяться тільки з метою одержання вихідного базисного плану. Поки штучна змінна є базисною, вона буде приймати позитивні значення (якщо відповідні їй значення $b_i > 0$) і, отже, зменшувати значення цільової функції в порівнянні з максимальним. Оскільки ці змінні мають більші за абсолютною величиною негативні коефіцієнти, у процесі рішення задачі симплекс-методом вони із числа базисних переводяться в небазисні. У силу того, що значення небазисних змінних при одержанні базисного рішення прирівнюються до нуля, штучні змінні не будуть впливати на значення цільової функції. Цей же метод використовується для обмежень виду « = ».

Зауваження №4.2. При одержанні вихідного базисного плану необхідно прагнути до того, щоб він містив мінімальну кількість штучних змінних. Це дає можливість зменшити число кроків для одержання оптимального рішення.

Розглянемо на конкретних прикладах процес приведення задачі лінійного програмування до канонічної форми й одержання вихідного базисного рішення.

4.3 Приклади приведення ЗЛП до канонічної форми й одержання вихідного базисного рішення

Приклад №4.1. Привести до канонічної форми наступну задачу лінійного програмування:

$$f = 2x_1 + x_2 - x_3 \to \max;$$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 \geq 4, \\ x_1 + x_2 - 3x_3 \leq 9, \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 10, \\ x_j \geq 0 \left(j = \overline{1,3}\right). \end{cases}$$

Для приведення даної задачі до канонічної форми необхідно від лівої частини першого обмеження відняти невід'ємну змінну x_4, а до лівої частини другого обмеження додати невід'ємну змінну x_5. Додаткові змінні x_4 і x_5 у цільову функцію входять із нульовими коефіцієнтами.

Канонічна форма даної задачі буде мати вигляд:

$$f = 2x_1 + x_2 - x_3 + 0 \cdot x_4 + 0 \cdot x_5 \to \max;$$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = 4, \\ x_1 + x_2 - 3x_3 + x_5 = 9, \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 10, \\ x_j \geq 0 \left(j = \overline{1,5}\right). \end{cases}$$

У першому й третьому обмеженнях не можна виділити базисні змінні, тому в перше обмеження вводимо штучну змінну x_6, а в третє – штучну змінну x_7 і приймаємо їх у якості базисних. У цільову функцію ці змінні ввійдуть із коефіцієнтом ($-M$). У результаті описаних перетворень одержимо:

$$f = 2x_1 + x_2 - x_3 + 0 \cdot x_4 + 0 \cdot x_5 - Mx_6 - Mx_7 \to \max;$$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 + x_6 = 4, \\ x_1 + x_2 - 3x_3 + x_5 = 9, \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_7 = 10, \\ x_j \geq 0 \left(j = \overline{1,7}\right). \end{cases}$$

Для одержання вихідного базисного рішення прирівняємо до нуля небазисні змінні: $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, $x_4 = 0$. Тоді значення базисних змінних: $x_6 = 4$, $x_5 = 9$, $x_7 = 10$. Підставивши значення базисних змінних у цільову функцію, одержимо величину $f = -14M$.

Приклад №4.2. Привести до канонічної форми наступну задачу лінійного програмування:

$$f = x_1 - x_2 - x_3 - x_4 \to \min;$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_4 \leq 1, \\ -x_1 + x_2 + x_4 \leq 1, \\ x_2 + x_3 = 10, \\ x_j \geq 0 \left(j = \overline{1,4}\right). \end{cases}$$

Оскільки цільова функція даної задачі мінімізується, то, помноживши її вираз на (–1), одержимо

$$f = -x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \to \max.$$

До лівих частин першого й другого обмежень додамо відповідно невід'ємні змінні x_5 і x_6, які входять у цільову функцію з нульовими коефіцієнтами. Тоді дана задача в канонічній формі буде мати вигляд:

$$f = -x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + 0 \cdot x_5 + 0 \cdot x_6 \to \max;$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_4 + x_5 = 1, \\ -x_1 + x_2 + x_4 + x_6 = 1, \\ x_2 + x_3 = 10, \\ x_j \geq 0 \left(j = \overline{1, 6}\right). \end{cases}$$

У першому обмеженні базисною є додаткова змінна x_5, у другому – додаткова змінна x_6.

У деяких задачах в обмеженнях виду «≥» і «=» базисні змінні можна виділити відразу, не прибігаючи до методу штучного базису. Третє обмеження розглянутої задачі містить змінну x_3, що не входить в інші обмеження. Ця змінна може бути прийнята в якості базисної.

Для одержання вихідного базисного рішення прирівняємо до нуля небазисні змінні: $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_4 = 0$ і одержимо значення базисних змінних: $x_5 = 1$, $x_6 = 1$, $x_3 = 1$. Значення цільової функції $f = 1$.

Контрольні питання

1. Яка форма задачі лінійного програмування вважається канонічною?
2. Чи є обов'язковою вимога максимізації цільової функції при приведенні задачі до канонічної форми і з якої причини вона висувається?
3. Яка змінна є базисною?
4. Яке рішення називається базисним?
5. Яке базисне рішення називається виродженим?
6. У яких випадках застосовується метод штучного базису? У чому суть цього методу?

Варіанти задач для самостійного розв’язання

Привести до канонічної форми, виділити базисні змінні, визначити вихідне базисне рішення й значення цільової функції для наступних задач:

Задача № 4.1

$$f = 3x_1 + 4x_2 \to \max;$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 2, \\ -x_1 + 5x_2 \le 37, \\ 5x_1 + x_2 \le 40, \\ 3x_1 - 4x_2 \le 11, \\ 3x_1 + 4x_2 \ge 19, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Задача № 4.2

$$f = -3x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 3x_4 - x_5 \to \max;$$

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 \le 2, \\ 4x_1 - x_2 + x_4 + x_5 \le 21, \\ 4x_1 - x_2 - x_4 + x_5 \ge 13, \\ x_1 + x_2 = 3, \end{cases}$$
$$x_j \ge 0, \quad \left(j = \overline{1,5}\right).$$

Задача № 4.3

$$f = 2x_1 - 3x_2 + 2x_4 + 3x_5 \to \max;$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \le 12, \\ x_1 + x_4 \le 5, \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_5 \le 20, \\ x_1 - x_2 - 2x_3 + 2x_4 - 2x_5 \le 10, \\ 2x_1 + 2x_2 - 2x_3 - 2x_4 + x_5 \le 24, \end{cases}$$
$$x_j \ge 0, \quad \left(j = \overline{1,5}\right).$$

Задача № 4.4

$$f = 2x_1 + x_2 + x_3 \to \min;$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 4, \\ x_1 - x_2 + x_3 \le 2, \end{cases}$$
$$x_j \ge 0, \quad \left(j = \overline{1,3}\right).$$

Задача № 4.5

$$f = x_1 - x_2 - 2x_3 - 3x_4 \to \min;$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = -1, \\ -x_1 - x_4 \le -5, \\ x_2 + x_3 \ge 10, \end{cases}$$
$$x_j \ge 0, \quad \left(j = \overline{1,4}\right).$$

Задача № 4.6

$$f = x_1 + x_2 \to \max;$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \ge 1, \\ x_1 - x_2 \le 1, \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$$

5. СИМПЛЕКС-МЕТОД

5.1 Поняття про симплекс-метод

Графічний метод, розглянутий у другій частині навчального посібника, дозволяє розв'язувати задачі лінійного програмування із двома змінними. Трохи складніше, але можна розв'язувати цим методом задачі лінійного програмування із трьома змінними. Однак графічний метод непридатний для рішення задач лінійного програмування, у яких кількість змінних $n > 3$. Рішення таких задач вимагає застосування аналітичних методів.

Розглянуті в курсі вищої математики класичні методи знаходження екстремуму функції непридатні для рішення задач математичного програмування й, зокрема, лінійного. Тому для рішення задач лінійного програмування створені спеціальні методи рішення, одним із яких є *симплекс-метод*. Симплекс-метод не має ту наочність, що характерна для графічного методу.

Відомо, що *оптимальні рішення задачі лінійного програмування зв'язані, з кутовими точками многогранника рішень.* Кутових точок може бути багато, якщо багато обмежень. Кількість кутових точок відповідає кількості базисних рішень. Для кожного базисного рішення однозначно визначається значення цільової функції. Знайти оптимальне рішення (оптимальний план), безладно перебираючи всі базисні рішення у пошуках такого рішення, що приносить цільовій функції екстремальне значення, важко. Тим більше що при такому неупорядкованому пошуку значення цільової функції (невиродженої задачі) не обов'язково будуть монотонно зростати (при пошуку максимуму) або монотонно убувати (при пошуку мінімуму).

У зв'язку з цим необхідний такий перехід від одного базисного рішення до іншого (від однієї кутової точки до іншої, починаючи з кутової точки, що відповідає вихідному базисному рішенню), у результаті якого нове рішення приносило б у невиродженій задачі на максимум більше значення цільової функції, а в невиродженій задачі на мінімум – менше. Даний процес рішення задачі реалізує симплекс-метод, який також називається *методом послідовного поліпшення плану.* Процес рішення задачі триває до одержання оптимального плану або до встановлення факту відсутності рішень задачі. Якщо задача лінійного програмування вироджена, то при переході від одного базисного рішення до іншого значення цільової функції може не змінитися. Перехід від одного базисного рішення до іншого називається *ітерацією* симплекс-методу.

Критерій розв'язності задачі лінійного програмування.

Для того щоб задача лінійного програмування була розв'язна, тобто мала оптимальне рішення, необхідно й досить, щоб обмеження задачі були сумісними (безліч припустимих рішень не порожнє), а цільова функція була обмежена при пошуку максимуму зверху, а при пошуку мінімуму – знизу.

Симплекс-метод може бути інтерпретований геометрично як рух по сусідніх кутових точках многогранника рішень. Точки називаються *сусідніми,* якщо вони розташовані на одному ребрі. Наприклад, якщо вихідне базисне рішення (вихідний базисний план) відповідає кутовій точці A, то наступний базисний план, отриманий у процесі рішення задачі симплекс-методом, буде відповідати кутовій точці Q, а оптимальний – кутовій точці H (рис. 5.1).

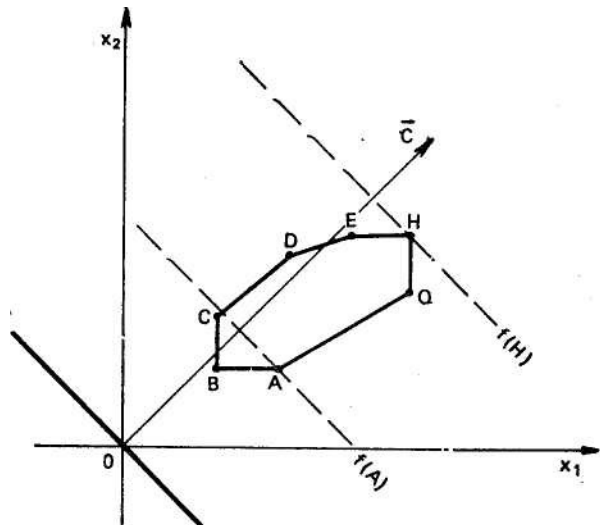

Рисунок 5.1 – Геометрична інтерпретація симплекс-методу

Таким чином, кількість ітерацій симплекс-методу залежить від вибору вихідного базисного плану й кількості кутових точок, що зустрічаються при русі від вихідного плану до оптимального.

В п. 5.2 буде розглянутий алгоритм, що реалізує симплекс-метод. *Алгоритм* – це чітко запропонована послідовність дій (кроків), виконання яких гарантує досягнення певної мети.

Основу алгоритму симплекс-методу становить послідовність кроків, що реалізує охарактеризований вище перехід від одного базисного плану до іншого і що приводить до оптимального рішення, або до висновку про те, що задача рішення не має.

5.2 Алгоритм симплекс-методу

Як уже відомо, перш ніж розв'язувати задачу лінійного програмування симплекс-методом, її необхідно привести до канонічної форми (див. п. 4.1). Після цього виділяють змінні, які присутні тільки в одному рівнянні з коефіцієнтом одиниця і приймають їх у якості базисних. Якщо в обмеженні таку змінну виділити не можна, то вводять штучну базисну змінну. Потім визначається вихідний базисний план і значення цільової функції для цього плану (див. п. 4.2). Далі виконується описана нижче послідовність кроків.

Крок 1. Будується й заповнюється вихідна симплексна таблиця за наступною схемою (табл. 5.1):

Таблиця 5.1 – Вихідна симплекс-таблиця

Базис	C	B		…	c_j	…	
				…	x_j	…	
…	…	…			…		
x_i	c_i	b_i		…	a_{ij}	…	
…	…	…			…		
	Δ	f		…	Δ_j	…	

У стовпці «Базис» записуються базисні змінні, у стовпці «C» – коефіцієнти при базисних змінних у цільовій функції (c_i), у стовпці «B» – вільні члени обмежень (b_i), тобто значення базисних змінних. У стовпцях x_j (небазисні змінні) відбиваються коефіцієнти при небазисних змінних в обмеженнях (a_{ij}), над змінними x_j – коефіцієнти при цих змінних у цільовій функції (c_j). Рядок «Δ» у стовпці «B» містить значення цільової функції, що розраховується за формулою:

$$f = \sum_{i=1}^{m} c_i b_i \,, \qquad (5.1)$$

а стовпцях x_j цього ж рядка – значення відносних оцінок (Δ_j), що розраховуються за формулою:

$$\Delta_j = \sum_{i=1}^{m} c_i a_{ij} - c_j \quad \left(j = \overline{1, n}\right). \qquad (5.2)$$

При визначенні значення f фактично потрібно знайти суму добутків елементів стовпця «C» на відповідні елементи стовпця «B», що рівносильне підстановці базисного плану в цільову функцію, а при визначенні значення відносної оцінки Δ_j – суму добутків елементів стовпця «C» на відповідні елементи того стовпця x_j, для якого вона розраховується.

Крок 2. Перевіряється отриманий базисний план на оптимальність за умовою оптимальності.

Якщо $\Delta_j \geq 0$ і серед базисних змінних немає штучних, то план є оптимальним.

Якщо $\Delta_j \geq 0$ і серед базисних змінних є штучні, то задача не має розв'язку, тому що її система обмежень несумісна.

Якщо $\Delta_j < 0$, то отриманий базисний план не оптимальний і необхідно переходити до іншого базисного плану.

Якщо в оптимальному плані $\Delta_j = 0$, то це говорить про те, що задача має нескінченне число планів (див. приклад № 5.3).

Крок 3. Для переходу до нового базисного плану в першу чергу із числа небазисних змінних з негативними оцінками Δ_j вибирається змінна, яка вводиться в базис. Введемо в новий базис змінну x_k, якій відповідає найбільша за абсолютною величиною від’ємна оцінка Δ_j:

$$|\Delta_k| = \max_j\{|\Delta_j|\}. \qquad (5.3)$$

Стовпець, що відповідає змінній x_k, називають *головним* (*ведучим*). Елементи головного стовпця позначаються через a_{ik}. Обрана змінна буде вводитися в базис.

Якщо виявиться декілька однакових найбільших за абсолютною величиною від'ємних оцінок, то вибирається люба з відповідних їм змінних.

Крок 4. Вибирається змінна, яка виводиться з базису. Її індекс r знаходиться із співвідношення:

$$\frac{b_r}{a_{rk}} = \min_i\left\{\frac{b_i}{a_{ik}}\right\}, \text{ для всіх } i, \text{ при яких } a_{ik} > 0. \qquad (5.4)$$

Рядок таблиці, у якій отримано найменше відношення $\left(\frac{b_r}{a_{rk}}\right)$ елемента стовпця «*B*» до відповідного елемента головного стовпця, називають *головним* (*ведучим*). Елементи головного рядка позначаються через a_{rj}. Обрана змінна x_r буде виводитися з базису.

Якщо виявиться кілька однакових найменших значень співвідношень, то вибирається люба з відповідних їм змінних. Це може відбутися у виродженій задачі.

Елемент, що знаходиться на перетинанні головного рядка й головного стовпця, називають *головним* (*ведучим*). Головний елемент позначається через a_{rk}. У випадку відсутності значень $a_{ik} > 0$ задача розв'язку не має, тому що її цільова функція не обмежена на безлічі планів задачі.

Крок 5. Для визначення нового базисного плану проводять перерахування елементів таблиці й результати заносять у нову симплексну таблицю. Обрані змінні в новій таблиці міняються місцями разом зі своїми коефіцієнтами в цільовій функції. Інші змінні переписуються без змін зі своїми коефіцієнтами. Елементи нової симплексної таблиці розраховуються за наведеними нижче формулами:

елементи головного рядка $b_k = \frac{b_r}{a_{rk}}$; $a_{kj} = \frac{a_{rj}}{a_{rk}}$;

головний елемент $a_{kr} = \frac{1}{a_{rk}}$;

елементи головного стовпця $a_{ir} = -\frac{a_{ik}}{a_{rk}}$; $\Delta_r = -\frac{\Delta_k}{a_{rk}}$;

всі інші елементи таблиці

$$b_i' = b_i - \frac{b_r a_{ik}}{a_{rk}}; \quad a_{ij}' = a_{ij} - \frac{a_{rj} a_{ik}}{a_{rk}};$$

$$\Delta_j' = \Delta_j - \frac{\Delta_k a_{rj}}{a_{rk}}; \quad f' = f - \frac{b_r \Delta_k}{a_{rk}}.$$

Деякі практичні поради:

1) якщо в головному стовпці перелічуваної таблиці стоїть нуль, то відповідний йому рядок переписується у нову симплексну таблицю без змін;

2) якщо в головному рядку перелічуваної таблиці стоїть нуль, то відповідний йому стовпець переписується у нову таблицю без змін;

3) якщо із числа базисних виключається штучна змінна, то відповідний їй стовпець у нову симплексну таблицю не включається і, отже, не перераховується. Як вказувалося раніше, штучні змінні вводяться тільки для одержання вихідного базисного плану. Згодом вони виводяться з базису і у число базисних більше не потраплять. Даний прийом не прискорює процесу одержання оптимального плану, однак зменшує обсяг обчислень.

Крок 6. Перевіряється правильність розрахунку значень цільової функції f і оцінок Δ_j за формулами (5.1), (5.2). Перехід до кроку 2 наступної ітерації.

5.3 Приклади рішення задач лінійного програмування симплекс-методом

Приклад №5.1. Розв'язати задачу про використання ресурсів, застосовуючи алгоритм симплекс-методу. Модель задачі має вигляд:

$$f = 12x_1 + 15x_2 \to \max;$$

$$\begin{cases} 6x_1 + 6x_2 \le 36, \\ 4x_1 + 2x_2 \le 20, \\ 4x_1 + 8x_2 \le 40, \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$$

Рішення

Приведемо задачу до канонічної форми:

$$f = 12x_1 + 15x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 + 0 \cdot x_5 \to \max;$$

$$\begin{cases} 6x_1 + 6x_2 + x_3 = 36, \\ 4x_1 + 2x_2 + x_4 = 20, \\ 4x_1 + 8x_2 + x_5 = 40, \end{cases}$$

$$x_j \ge 0 \left(j = \overline{1,5} \right).$$

Виділяємо базисні змінні. Кількість базисних змінних повинно дорівнювати кількості обмежень, тобто трьом. У кожному обмеженні даної задачі можна виділити одну змінну, котра присутня тільки в одному обмеженні з коефіцієнтом +1. Отже, змінні x_3, x_4, x_5 є базисними, а змінні x_1, x_2 – небазисними.

Визначимо вихідний базисний план і значення цільової функції: $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 36$, $x_4 = 20$, $x_5 = 40$, $f = 0$.

Вихідні дані задачі, а також обчислені за формулою (5.1) значення цільової функції ($f = 0 \cdot 36 + 0 \cdot 20 + 4 \cdot 0 \cdot 40 = 0$) і за формулою (5.2) значення відносних оцінок ($\Delta_1 = 0 \cdot 6 + 0 \cdot 4 + 0 \cdot 4 - 12 = -12$; $\Delta_2 = 0 \cdot 6 + 0 \cdot 2 + 0 \cdot 8 - 15 = -15$) перенесемо у вихідну симплексну таблицю (табл. 5.2).

Таблиця 5.2 – Вихідна симплекс-таблиця задачі №5.1

Базис	C	B	12	15
			x_1	x_2
x_3	0	36	6	6
x_4	0	20	4	2
x_5	0	40	4	**8***
	Δ	0	–12	–15

Перевіряємо отриманий план на оптимальність за умовою оптимальності ($\Delta_j \geq 0$). Оскільки для даного плану існують оцінки $\Delta_1 < 0$ і $\Delta_2 < 0$, план не оптимальний. Необхідний перехід до іншого базисного плану.

У першу чергу серед небазисних змінних на підставі (5.3) виберемо змінну, котра буде вводитися в базис:

$$|\Delta_k| = \max\{|\Delta_1|, |\Delta_2|\} = \max\{|-12|, |-15|\} = \max\{12, 15\} = 15 .$$

У базис буде вводитися змінна x_2, тому що цій змінній відповідає максимальна за модулем відносна оцінка $|\Delta_2| = 15$. Стовпець, що відповідає змінній x_2, є головним.

Далі на підставі (5.4) виберемо змінну, котра буде виводитися з базису:

$$\frac{b_r}{a_{rk}} = \min\left\{\frac{36}{6}, \frac{20}{2}, \frac{40}{8}\right\} = \min\{6, 10, 5\} = 5 .$$

З базису буде виводитися змінна x_5, тому що цій змінній відповідає мінімальне відношення, рівне 5. Рядок, що відповідає змінній x_5, є головним.

На перетинанні головного рядка й головного стовпця знаходиться головний елемент $a_{52} = 8$. У таблиці для зручності розрахунків головний елемент необхідно позначити „*".

Будуємо нову симплексну таблицю (табл. 5.3), у якій змінні x_5 і x_2 міняються місцями, разом зі своїми коефіцієнтами в цільовій функції. Інші змінні переписуються без змін зі своїми коефіцієнтами у цільовій функції.

Таблиця 5.3 – Симплекс-таблиця 1 ітерації

Базис	C	B	12	0
			x_1	x_5
x_3	0	6	3	–3/4
x_4	0	10	3	–1/4
x_2	15	5	1/2	1/8
	Δ	75	–9/2	15/8

Перераховуємо елементи табл. 5.2 і результати заносимо у відповідні клітки табл. 5.3. Елементи головного рядка табл. 5.2 перераховуються шляхом діленням кожного елемента цього рядка на головний $\left(\frac{40}{8}=5,\quad \frac{4}{8}=\frac{1}{2}\right)$, головний елемент – шляхом ділення одиниці на головний елемент $\left(\frac{1}{8}\right)$, елементи головного стовпця – шляхом діленням кожного елемента цього стовпця на головний зі знаком мінус $\left(-\frac{6}{8}=-\frac{3}{4},\quad -\frac{2}{8}=-\frac{1}{4},\quad \frac{15}{8}\right)$.

Всі інші елементи табл. 5.3 визначаються за правилом прямокутника. Наприклад, для клітки x_3x_1 новий елемент дорівнює $6-\frac{6\cdot 4}{8}=3$.

Перевіряємо правильність розрахунку значень цільової функції f і оцінок Δ_1, Δ_5 за формулами (5.1), (5.2):

$f = 0 \cdot 6 + 0 \cdot 10 + 15 \cdot 5 = 75,$

$\Delta_1 = 0 \cdot 3 + 0 \cdot 3 + 15 \cdot 1/2 - 12 = -9/2,$

$\Delta_5 = 0 \cdot (-3/4) + 0 \cdot (-1/4) + 15 \cdot 1/8 - 0 = 15/8.$

Отриманий у табл. 5.3 план не оптимальний, тому що існує $\Delta_1 = -9/2$. У число базисних уводиться змінна x_1, а з базису виключається змінна x_3.

Перераховуємо елементи табл. 5.3 і результати заносимо в табл. 5.4. Після перевірки правильності розрахунку f і оцінок Δ_3, Δ_5 робимо висновок про те, що отриманий у табл. 5.4 план оптимальний, тому що оцінки Δ_3, $\Delta_5 > 0$.

Таблиця 5.4 – Симплекс-таблиця 2 ітерації (оптимальний план)

Базис	C	B	0	0
			x_3	x_5
x_1	12	2	1/3	–1/4
x_4	0	4	–1	1/2
x_2	15	4	–1/6	1/4
	Δ	84	3/2	3/4

Для одержання максимального доходу в розмірі 84 гр.од. підприємству необхідно випускати з наявних ресурсів 2 од. продукції виду $П_1$ і 4 од. продукції $П_2$.

Відповідь: $x_1^* = 2$, $x_2^*=4$, $f_{\max} = 84$.

Приклад №5.2. Розглянемо рішення задачі лінійного програмування симплекс-методом, у якій для побудови вихідного плану застосовується метод штучного базису:

$$f = x_1 - 5x_2 - x_3 + x_4 \to \max;$$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 3x_3 + x_4 = 3, \\ 2x_1 \qquad\; + 3x_3 - x_4 = 4, \end{cases}$$

$$x_j \geq 0 \left(j = \overline{1,4}\right).$$

Рішення

Вихідна задача записана в канонічній формі. Для виділення базисних змінних обидві частини першого обмеження розділимо на 3 і тоді в якості базисної можна взяти змінну x_2, а в друге обмеження введемо штучну змінну x_5.

$$f = x_1 - 5x_2 - x_3 + x_4 - Mx_5 \to \max;$$

$$\begin{cases} 1/3x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 1/3x_4 \quad = 1, \\ \quad 2x_1 \qquad\quad + 3x_3 - x_4 + x_5 = 4, \end{cases}$$

$$x_j \geq 0 \left(j = \overline{1,5} \right).$$

Визначимо вихідний базисний план і значення цільової функції:

$$x_1 = 0,\ x_3 = 0,\ x_4 = 0,\ x_2 = 1,\ x_5 = 4,\ f = -4M - 5.$$

Заповнимо вихідну симплексну таблицю (табл. 5.5). При перевірці плану на оптимальність, для вибору найбільшої за абсолютною величиною відносної оцінки, досить розглядати ту частину від'ємних Δ_j, що містить M (у силу того що M – дуже велике позитивне число). Тільки при наявності декількох однакових найбільших за абсолютною величиною частин Δ_j, що містять M, розглядається та частина Δ_j, що M не містить.

Таблиця 5.5 – Вихідна симплекс-таблиця задачі №5.2

Базис	C	B	1	–1	1
			x_1	x_3	x_4
x_2	–5	1	1/3	1	1/3
x_5	$-M$	4	2	3	–1
	Δ	$-4M - 5$	$-2M - 8/3$	$-3M - 4$	$M - 8/3$

Аналіз табл. 5.5 показує, що в базис вводиться змінна x_3, а виводиться – x_2. Перераховуємо елементи табл. 5.5 за відомими формулами. Подальше рішення задачі показано в табл. 5.6–5.8. Оскільки в табл. 5.6 з базису виключається штучна змінна x_5, то відповідний їй стовпець у нову симплексну таблицю не включається.

Таблиця 5.6 – Симплекс-таблиця 1 ітерації

Базис	C	B	1	–5	1
			x_1	x_2	x_4
x_3	–1	1	1/3	1	1/3
x_5	$-M$	1	1	–3	–2
	Δ	$-M - 1$	$-M - 4/3$	$3M + 4$	$2M - 4/3$

Таблиця 5.7 – Симплекс-таблиця 2 ітерації

Базис	C	B	–5	1
			x_2	x_4
x_3	–1	2/3	2	1
x_1	1	1	–3	–2
	Δ	1/3	0	–4

Таблиця 5.8 – Симплекс-таблиця 3 ітерації (оптимальний план)

Базис	C	B	-5	1
			x_2	x_3
x_4	1	2/3	2	1
x_1	1	7/3	1	2
	Δ	3	8	4

Отриманий у табл. 5.8 план оптимальний, тому що штучні змінні в базисі відсутні й відносні оцінки Δ_2, $\Delta_3 > 0$.

Відповідь: $x^*_1 = 7/3$, $x^*_2 = 0$, $x^*_3 = 0$, $x^*_4 = 2/3$, $f_{\max} = 3$.

Приклад №5.3. Розглянемо процес рішення задачі лінійного програмування, що має нескінченне число планів (рішень):

$$f = x_1 + x_2 \to \min;$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \le 2, \\ x_1 + x_2 \ge 2, \\ x_1 - 2x_2 \le 1, \end{cases}$$

$$x_j \ge 0 \left(j = \overline{1, 2}\right).$$

Рішення

Після приведення задачі до канонічної форми для одержання вихідного базисного плану, в друге обмеження введемо штучну змінну x_6. Тоді модель задачі прийме наступний вид:

$$f = -x_1 - x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 + 0 \cdot x_5 - Mx_6 \to \min;$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 2, \\ x_1 + x_2 - x_4 + x_6 = 2, \\ x_1 - 2x_2 + x_5 = 1, \end{cases}$$

$$x_j \ge 0 \left(j = \overline{1, 6}\right).$$

Процес одержання оптимального плану показано у табл. 5.9–5.11.

Таблиця 5.9 – Вихідна симплекс-таблиця задачі № 5.3

Базис	C	B	-1	-1	0
			x_1	x_2	x_4
x_3	0	2	1	-1	0
x_6	$-M$	2	1	1	-1
x_5	0	1	1	-2	0
	Δ	$-2M$	$-M + 1$	$-M + 1$	M

Таблиця 5.10 – Симплекс-таблиця 1 ітерації

Базис	C	B	–1	0
			x_1	x_4
x_3	0	4	2	–1
x_2	–1	2	1	–1
x_5	0	5	3	–2
	Δ	–2	0	1

Таблиця 5.11 – Симплекс-таблиця 2 ітерації (оптимальний план)

Базис	C	B	0	0
			x_5	x_4
x_3	0	2/3	–2/3	1/3
x_2	–1	1/3	–1/3	–1/3
x_1	–1	5/3	1/3	–2/3
	Δ	–2	0	1

Оптимальний план $x^*_1 = 0$, $x^*_2 = 2$, $f_{\min} = -2$ отриманий у табл. 5.10, тому що $\Delta_1 = 0$ і $\Delta_4 = 1$. Наявність в оптимальному плані оцінки $\Delta_1 = 0$ говорить про те, що задача має нескінченне число рішень. Включення в число базисних змінної x_1, якій відповідає оцінка $\Delta_1 = 0$, і виключення з базису змінної x_5 не змінить значення цільової функції, але приведе до зміни базисного плану. Це відбудеться на наступній ітерації (табл. 5.11), у результаті якої виходить новий оптимальний план $x^*_1 = 5/3$, $x^*_2 = 1/3$, $f_{\min} = -2$.

Відповідь. Оптимальні рішення даної задачі будуть лежати на відрізку, укладеному між точками $A(0, 2)$ і $B(5/3, 1/3)$.

У будь-якій точці цього відрізка цільова функція $f_{\min} = -2$. Задача має нескінченне число рішень. Координати будь-якої внутрішньої точки відрізка AB можуть бути знайдені з наступних співвідношень ($0 \le \alpha \le 1$):

$$x_1 = \alpha \cdot 0 + (1 - \alpha)5/3,$$

$$x_2 = \alpha \cdot 2 + (1 - \alpha)1/3.$$

При $\alpha = 0$ одержуємо координати точки A, при $\alpha = 1$ – координати точки B.

Зауваження №5.1. При рішенні практичних задач наявність нескінченного числа оптимальних планів дає можливість вибирати такий план, що найбільшою мірою відповідає сформованій виробничій ситуації.

Контрольні питання

1. Який перехід від одного базисного плану до іншого реалізує симплекс-метод?
2. Яку геометричну інтерпретацію можна дати симплекс-методу?
3. Що називається ітерацією симплекс-методу?
4. Опишіть алгоритм симплекс-методу.

5. У якому випадку задача лінійного програмування буде мати рішення?

6. Сформулюйте умову оптимальності плану задачі лінійного програмування.

Варіанти задач для самостійного розв'язання

Задача № 5.1

Розв'язати симплекс-методом наступні задачі лінійного програмування:

а) $f = -x_1 + 3x_2 + 2x_3 \to \min;$

$$\begin{cases} -x_1 - x_2 - 2x_3 \le 5, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 \le 3, \\ 2x_1 - 5x_2 + 6x_3 \le 5, \\ x_j \ge 0, \quad \left(j = \overline{1,3}\right). \end{cases}$$

б) $f = x_1 + 2x_2 \to \max;$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \le 6, \\ 2x_1 + x_2 \le 4, \\ x_1 \le 1, \\ -x_1 + x_2 \le 1, \\ x_1 \ge 0, \; x_2 \ge 0. \end{cases}$$

в) $f = -2x_1 - 3x_2 + 2x_4 + 3x_5 \to \max;$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 \le 12, \\ x_1 + x_4 \le 5, \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_5 \le 20, \\ x_1 - x_2 - 2x_3 + 2x_4 - 2x_5 \le 10, \\ -2x_1 + 2x_2 - 2x_3 - 2x_4 + x_5 \le 19, \\ x_j \ge 0, \quad \left(j = \overline{1,5}\right). \end{cases}$$

г) $f = x_1 + 4x_2 + x_3 \to \max;$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 3, \\ 2x_1 - 5x_2 - x_3 = 0, \\ x_j \ge 0, \quad \left(j = \overline{1,3}\right). \end{cases}$$

д) $f = -2x_1 - 3x_2 \to \min;$

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \le 6, \\ x_1 + x_2 \ge 1, \\ x_1 \ge 0, \; x_2 \ge 0. \end{cases}$$

е) $f = x_1 - 4x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 \to \max;$

$$\begin{cases} 14x_1 - 14x_2 + 12x_3 + 5x_4 + 6x_5 + 3x_6 = 8, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 + x_5 = 0, \\ 16x_1 - 16x_2 + 8x_3 + 7x_4 + 4x_5 + 5x_6 = 12, \\ x_j \ge 0, \ \left(j = \overline{1,6}\right). \end{cases}$$

ж) $f = 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 \to \min;$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 2, \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 = 6, \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 7, \\ x_j \ge 0, \ \left(j = \overline{1,4}\right). \end{cases}$$

з) $f = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \to \max;$

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + 5x_3 - x_4 = 5, \\ 5x_1 + 3x_2 + 6x_3 - 2x_4 = 5, \\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 - x_4 = 4, \\ x_j \ge 0, \ \left(j = \overline{1,4}\right). \end{cases}$$

і) $f = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \to \min;$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 \ge 6, \\ -x_1 + x_3 - 2x_4 \le 2, \\ -2x_2 - 3x_3 + 2x_4 \le 8, \\ x_j \ge 0, \ \left(j = \overline{1,4}\right). \end{cases}$$

Задача № 5.2

Побудувати модель і розв’язати симплекс-методом задачу:

Завод виготовляє продукцію двох видів P_1 і P_2. Для виготовлення цієї продукції потрібно чотири види ресурсів: R_1, R_2, R_3, R_4. Інші вихідні дані задачі зведені в табл. 5.12.

Потрібно визначити план випуску продукції P_1 і P_2, при якому доход підприємства виявився б максимальним.

Таблиця 5.12 – Вихідні дані до задачі №5.2

Вид ресурсів	Витрати ресурсів на одиницю продукції		Запас ресурсів, од.
	P_1	P_2	
R_1	4	6	38
R_2	4	2	26
R_3	0	6	30
R_4	6	0	36
Доход, гр.од.	14	10	

6. ДВОЇСТІСТЬ У ЛІНІЙНОМУ ПРОГРАМУВАННІ

6.1 Поняття про двоїсті задачі лінійного програмування

Кожній задачі лінійного програмування, яку називають *вихідною,* можна поставити у відповідність деяку іншу задачу лінійного програмування, називану *двоїстою* до неї. Разом узяті ці задачі утворюють пару взаємно двоїстих задач і кожну з них можна розглядати як вихідну. Вирішуючи одну із цих задач, можна одержати рішення другої задачі.

Двоїста задача – це допоміжна задача лінійного програмування одержувана за допомогою певних правил безпосередньо з умов вихідної. Сформулюємо правила побудови двоїстих задач:

1. Якщо цільова функція f вихідної задачі максимізується, то цільова функція z двоїстої – мінімізується й навпаки.

2. Кількість обмежень (m) вихідної задачі дорівнює кількості змінних двоїстої, а кількість змінних (n) вихідної дорівнює кількості обмежень двоїстої. Змінні двоїстої задачі позначимо через $y_i \ \left(i = \overline{1, m}\right)$.

3. Оскільки змінні вихідної задачі зв'язані з обмеженнями двоїстої, кожній змінній $x_j \geq 0$ відповідає в двоїстій задачі обмеження виду «≤» ($z \to \max$) або «≥» ($z \to \min$), і навпаки.

4. Кожній змінній x_j, не обмеженій за знаком, відповідає обмеження виду «=» двоїстої задачі, і навпаки.

5. Вільні члени обмежень вихідної задачі $b_i\left(i = \overline{1, m}\right)$ у двоїстій є коефіцієнтами при змінних $y_i\left(i = \overline{1, m}\right)$ у цільовій функції, а коефіцієнти $c_j\left(j = \overline{1, n}\right)$ при змінних $x_j\left(j = \overline{1, n}\right)$ у цільовій функції вихідної задачі є вільними членами обмежень двоїстої.

6. Матриця A коефіцієнтів при невідомих в обмеженнях вихідної задачі у двоїстій транспонується (A^{T}).

Розглянемо в загальному виді одну із окремих задач лінійного програмування, яку будемо вважати *вихідною:*

$$f = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \to \max;$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \leq b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \leq b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \leq b_m, \end{cases}$$

$$x_j \geq 0 \left(j = \overline{1, n}\right).$$

Двоїста до цієї задачі буде мати вигляд:

$$z = b_1y_1 + b_2y_2 + \ldots + b_ny_n \to \min;$$

$$\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + \ldots + a_{m1}y_m \geq c_1, \\ a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots + a_{m2}y_m \geq c_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + \ldots + a_{mn}y_m \geq c_n, \end{cases}$$

$$y_i \geq 0 \left(i = \overline{1, m}\right).$$

Якщо застосувати правила побудови двоїстих задач, то одержимо вихідну задачу.

У табл. 6.1 наведені поодинокі види вихідних задач лінійного програмування в матричному виді й відповідні їм двоїсті задачі.

Таблиця 6.1 – Вихідні задачі лінійного програмування й відповідні їм двоїсті задачі

	Вихідна задача	Двоїста задача	
I	$f = CX \to \max$ $AX \leq B$ $X \geq 0$	$z = YB \to \min$ $YA \geq C$ $Y \geq 0$	Симетричні задачі
II	$f = CX \to \min$ $AX \geq B$ $X \geq 0$	$z = YB \to \max$ $YA \leq C$ $Y \geq 0$	
III	$f = CX \to \max$ $AX = B$ $X \geq 0$	$z = YB \to \min$ $YA \geq C$	Несиметричні задачі
IV	$f = CX \to \min$ $AX = B$ $X \geq 0$	$z = YB \to \max$ $YA \leq C$	

Через $Y = (y_1, y_2, ..., y_m)$ позначена матриця-рядок невідомих двоїстої задачі. Всі інші позначення, використовувані в таблиці, наведені в п. 1.1.

Матриця-рядок Y множиться ліворуч на матрицю-стовпець B (у цільовій функції) і матрицю A (в обмеженнях) виходячи із правил множення двох матриць, а також правил побудови двоїстих задач (зокрема, у двоїстій задачі матриця коефіцієнтів при невідомих в обмеженнях повинна бути транспонованою).

Перші дві пари взаємно двоїстих задач у табл. 6.1 називаються *симетричними,* інші дві – *несиметричними* через наявність обмежень виду «=». Використовуючи правила побудови двоїстих задач і табл. 6.1, для будь-якої задачі лінійного програмування можна побудувати двоїсту до неї.

6.2 Приклади побудови двоїстих задач лінійного програмування

Приклад №6.1. Побудувати задачу, двоїсту до даної:

$$f = x_1 - x_2 \to \max;$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \leq 1, \\ x_1 - x_2 \geq 0, \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0,\, x_2 \geq 0.$$

Щоб побудувати двоїсту задачу, вихідну необхідно привести до форми (I) шляхом множення обох частин другого обмеження на (–1). Після цього перетворення вихідна задача прийме вид:

$$f = x_1 - x_2 \to \max;$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \leq 1, \\ -x_1 + x_2 \leq 0, \\ x_1 \geq 0,\, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Двоїста задача:

$$z = y_1 \to \min;$$

$$\begin{cases} y_1 - y_2 \geq 1, \\ -y_1 + y_2 \geq -1, \\ y_1 \geq 0,\, y_2 \geq 0. \end{cases}$$

Приклад №6.2. Побудувати задачу, двоїсту до даної:

$$f = 7x_1 + 6x_2 + 3x_3 - x_4 \to \min;$$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 \geq 12, \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 \leq 10, \\ 3x_1 + 5x_2 + 4x_4 = 7, \end{cases}$$

$$x_2 \geq 0,\, x_3 \geq 0.$$

Для побудови двоїстої задачі скористаємося формами (II), (IV) і перетворимо дану задачу шляхом множення обох частин другої нерівності на (–1). Тоді вихідна задача буде мати вигляд:

$$f = 7x_1 + 6x_2 + 3x_3 - x_4 \to \min;$$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 \geq 12, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 \geq -10, \\ 3x_1 + 5x_2 + 4x_4 = 7, \end{cases}$$

$$x_2 \geq 0,\, x_3 \geq 0.$$

Двоїста задача:

$$z = 12y_1 - 10y_2 + 7y_3 \to \max;$$

$$\begin{cases} 2y_1 + y_2 + 3y_3 = 7, \\ -y_1 - 2y_2 + 5y_3 \leq 6, \\ 2y_1 + y_2 \leq 3, \\ -3y_1 - y_2 + 4y_3 = -1, \end{cases}$$

$$y_1 \geq 0,\, y_2 \geq 0.$$

Використовуючи приклад №6.2, пояснимо деякі правила побудови двоїстих задач. Оскільки кількість обмежень вихідної задачі m=3, двоїста задача повинна мати три змінні: y_1, y_2, y_3. Кількість змінних вихідної задачі n = 4, тому двоїста повинна мати чотири обмеження. Змінні x_1 і x_4 вихідної задачі не обмежені за знаком. У силу цього перше й четверте обмеження двоїстої задачі мають вигляд рівностей. Третє обмеження вихідної задачі має вигляд рівності, отже, змінна y_3 двоїстої задачі не обмежена за знаком.

6.3 Економічний зміст змінних двоїстої задачі

Розглянемо задачу про використання ресурсів, сутність якої полягає в наступному. Підприємству необхідно виготовляти два види продукції P_1 і P_2 з використанням трьох видів ресурсів: R_1, R_2, R_3, кількість яких обмежена. Відомі: запас ресурсу кожного виду на підприємстві; кількість кожного виду ресурсу, що витрачається на виготовлення одиниці продукції; доход від реалізації одиниці кожного виду продукції (табл. 6.2).

Таблиця 6.2 – Вихідні дані

Вид ресурсів	Витрати ресурсу на 1 од. продукції		Запас ресурсів, од.
	P_1	P_2	
R_1	6	6	36
R_2	4	2	20
R_3	4	8	40
Доход від реалізації одиниці продукції, гр.од.	12	25	–

Потрібно визначити кількість продукції кожного виду, що забезпечить підприємству максимальний доход.

Модель цієї задачі має вигляд:

$$f = 12x_1 + 15x_2 \to \max;$$

$$\begin{cases} 6x_1 + 6x_2 \le 36, \\ 4x_1 + 2x_2 \le 20, \\ 4x_1 + 8x_2 \le 40, \end{cases} \tag{6.1}$$
$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$$

Припустімо тепер, що з якоїсь причини підприємство відмовляється від виробництва даної продукції й вирішує продати наявні ресурси. Природно, що підприємство бажає одержати за ці ресурси не менше тієї суми, яку воно одержало б при продажі готової продукції, а покупець ресурсів зацікавлений заплатити за них якнайменше. Постає питання: за якою ж ціною продавати ресурси?

Введемо наступні позначення: y_1 – ціна одиниці ресурсу R_1; y_2 – ціна одиниці ресурсу R_2; y_3 – ціна одиниці ресурсу R_3.

Ціль, яку ставить покупець ресурсів, відіб'ється в цільовій функції задачі. Її зміст складається в мінімізації вартості всіх видів ресурсів:

$$z = 36y_1 + 20y_2 + 40y_3 \to \min.$$

В обмеженнях задачі необхідно відбити той факт, що підприємство повинно одержати у випадку продажу ресурсів не менше тієї суми, яку воно одержало б від реалізації продукції:

$$\begin{cases} 6y_1 + 4y_2 + 4y_3 \geq 12, \\ 6y_1 + 2y_2 + 8y_3 \geq 15. \end{cases}$$

Зміст першого обмеження – ціна ресурсів, що йдуть на виготовлення одиниці продукції P_1 (ліва частина нерівності), повинна бути не менше доходу (12 гр.од.) від реалізації одиниці продукції P_1. Друге обмеження має аналогічний зміст тільки для одиниці продукції P_2.

І останнє, ціна одиниці ресурсу повинна бути величиною невід’ємною, тобто

$$y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, y_3 \geq 0.$$

У цілому дана задача може бути представлена моделлю:

$$z = 36y_1 + 20y_2 + 40y_3 \to \min.$$

$$\begin{cases} 6y_1 + 4y_2 + 4y_3 \geq 12, \\ 6y_1 + 2y_2 + 8y_3 \geq 15, \end{cases} \qquad (6.2)$$

$$y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, y_3 \geq 0.$$

Необхідно звернути увагу на те, що якщо до моделі вихідної задачі (6.1) застосувати правила побудови двоїстих задач, одержимо (6.2). Отже, задача (6.2) є двоїстою до задачі (6.1) про використання ресурсів.

Економічний зміст змінних двоїстої задачі (двоїстих оцінок) відображається у відносній оцінці ресурсів даного підприємства. Оцінки є відносними, тому що ті самі ресурси для різних підприємств являють різну цінність.

Теорія двоїстості лінійного програмування представляє великий теоретичний і практичний інтерес і з економічної точки зору встановлює зв'язки між оптимальним розподілом ресурсів і деякою системою оцінок на ресурси.

Зауваження № 6.1. З математичної точки зору за вихідну і двоїсту може бути прийнята кожна з пари взаємно двоїстих задач, але на практиці звичайно вважаються двоїстими ті задачі, у яких визначаються значення цін і інших вартісних показників.

6.4 Теореми двоїстості

При розгляді правил побудови двоїстих задач вказувалося, що задача, двоїста двоїстій, збігається з вихідною. Виходячи із цього, не має значення яку задачу вважати вихідною, а яку двоїстою. Потрібно тільки враховувати напрямок оптимізації (максимізація або мінімізація). Тому розглядають пару взаємно двоїстих задач.

Пара взаємно двоїстих задач лінійного програмування володіє рядом цікавих і важливих властивостей, що зв'язують їх воєдино. Дослідження задач двоїстої пари показує, що при їхньому рішенні можна зіткнутися з одним із трьох взаємно виключаючих варіантів:

1) обидві задачі мають плани;
2) тільки одна із задач має плани;
3) множина планів обох задач порожня.

***Теорема* 1.** Для будь-яких припустимих планів $X=(x_1, x_2, ..., x_n)$ і $Y=(y_1, y_2, \ldots, y_m)$ вихідної й двоїстої задач відповідно значення цільової функції в задачі максимізації не більше значення цільової функції в задачі мінімізації.

Доведемо теорему для симетричних задач двоїстої пари (форма (I), табл. 6.1), обмеження яких мають вигляд:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \le b_i, \quad \left(i=\overline{1,m}\right),$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij}y_i \ge c_j, \quad \left(j=\overline{1,n}\right).$$

Використовуючи обмеження, можна записати наступні співвідношення для цільових функцій цих задач:

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \le \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij}y_i\right)x_j, \tag{6.3}$$

$$\sum_{i=1}^{m} b_i y_i \ge \sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j\right)y_i. \tag{6.4}$$

Якщо поміняти в правій частині одного із співвідношень, наприклад в (6.3), порядок підсумовування, а саме

$$\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij}y_i\right) = \sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j\right)y_i, \tag{6.5}$$

прийдемо до рівності правих частин співвідношень (6.3) і (6.4). У результаті цього одержимо

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \le \sum_{i=1}^{m} b_i y_i. \tag{6.6}$$

Економічний зміст нерівності (6.6) для наведеної вище економічної інтерпретації вихідної й двоїстої задач полягає в тому, що сумарний доход від реалізації продукції не більше сумарної оцінки ресурсів.

Теорема 1 доведена для симетричних задач форми (I). Легко переконатися, що вона справедлива для симетричних задач форми (II), а також несиметричних задач форм (III) і (IV) (табл. 6.1).

***Теорема* 2.** Якщо вихідна й двоїста задачі мають допустимі плани, то існують і оптимальні плани в цих задачах.

Доведемо існування оптимального плану у вихідній задачі. Якщо $Y = (y_1, y_2, \ldots, y_m)$ – припустимий план двоїстої задачі мінімізації, то припустимий план $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ вихідної задачі максимізації задовольняє нерівності

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \le \sum_{i=1}^{m} b_i y_i .$$

Отже, цільова функція вихідної задачі обмежена зверху на безлічі припустимих планів. На підставі критерію можливості розв'язання задачі лінійного програмування (див. розділ 5) дана задача має оптимальний план.

Аналогічно доводиться існування оптимального плану двоїстої задачі.

Теорема* 3 *(перша основна теорема двоїстості)

(Теореми 3 і 4 приводяться без доказів. З доказом теорем можна ознайомитися в спеціальній літературі (наприклад, [12, додаткова література]).

Якщо одна із задач двоїстої пари має оптимальний план, то інша також має оптимальний план. При цьому для будь-яких оптимальних планів

$$X^* = \left(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*\right) \text{ і } Y^* = \left(y_1^*, y_2^*, \ldots, y_m^*\right)$$

має місце рівність

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x^* = \sum_{i=1}^{m} b_i y^* .$$

Якщо цільова функція однієї із задач не обмежена, то обмеження іншої задачі несумісні. Однак зворотне твердження невірно. У випадку відсутності припустимих планів однієї із задач, інша також може не мати припустимих планів.

Теорема* 4 *(друга основна теорема двоїстості)

Для того щоб припустимі плани x^* і y^* пари двоїстих задач були оптимальними, необхідно і досить виконання умов:

$$x_j^* \left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i^* - c_j \right) = 0, \quad j = \overline{1, n},$$

$$y_i^* \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^* - b_i \right) = 0, \quad i = \overline{1, m} .$$

Це означає, що якщо яке-небудь одне обмеження задачі при підстановці в нього оптимального плану обертається в строгу нерівність, то відповідна цьому обмеженню змінна в оптимальному плані двоїстої задачі дорівнює нулю. І навпаки, якщо яка-небудь змінна в оптимальному плані одної задачі позитивна, то відповідне їй обмеження двоїстої задачі при підстановці в нього оптимального плану цієї задачі обертається в рівність.

Формально зазначений зв'язок між вихідною і двоїстою задачею можна записати в такий спосіб:

якщо $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^* > b_i$, то $y_i^* = 0$;

якщо $y_i^* > 0$, то $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^* = b_i$;

або

якщо $x_j^* > 0$, то $\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i^* = c_j$;

якщо $\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i^* > c_j$, то $x_j^* = 0$.

6.5 Рішення двоїстих задач

Теорія двоїстості знаходить широке практичне застосування. Сформульовані теореми двоїстості дозволяють одержати рішення однієї задачі, процес рішення якої з тієї або іншої причини утруднений, за оптимальним рішенням двоїстої до неї. До такої причини відноситься значне перевищення числа обмежень над числом змінних задачі, тому що обсяг обчислень при рішенні задач лінійного програмування симплекс-методом визначається, в основному, числом обмежень. Також при необхідності рішення задачі з обмеженнями виду «≥», можна перейти до рішення двоїстої, котра буде мати обмеження виду «≤», що дозволить уникнути введення штучних змінних.

Розглянемо процес одержання рішення двоїстої задачі (6.2) на підставі оптимального рішення вихідної задачі Прикладу № 5.1.

Підставимо в обмеження задачі (6.1) значення змінних $x^*_1 = 2$, $x^*_2=4$ в оптимальному плані:

$$\begin{cases} 6\cdot 2 + 6\cdot 4 \le 36 \\ 4\cdot 2 + 2\cdot 4 \le 20 \\ 4\cdot 2 + 8\cdot 4 \le 40 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 36 = 36 \\ 16 < 20 \\ 40 = 40 \end{cases}.$$

На підставі другої основної теореми двоїстості змінна двоїстої задачі y_2, що відповідає другому обмеженню вихідної, котре обернулося при підстановці оптимального плану в строгу нерівність, дорівнює нулю ($y^*_2 = 0$).

Оскільки змінні x_1, x_2 в оптимальному плані мають позитивні значення, то відповідні їм обмеження двоїстої задачі при підстановці в них її оптимального плану обертаються в рівність. Враховуючи, що $y^*_2 = 0$, одержимо

$$\begin{cases} 6y_1 + 4y_3 = 12, \\ 6y_1 + 8y_3 = 15. \end{cases}$$

Вирішивши отриману систему двох лінійних рівнянь із двома змінними, знайдемо оптимальний план двоїстої задачі: $y^*_1 = 3/2$, $y^*_2 = 0$, $y^*_3 = 3/4$. Відповідно до першої основної теореми двоїстості $f_{\max} = z_{\min} = 84$.

Контрольні питання

1. Що являє собою двоїста задача лінійного програмування?
2. У чому відмінність симетричних задач двоїстої пари від несиметричних?
3. Дайте економічну інтерпретацію задачі, двоїстої до задачі використання ресурсів.
4. Яка задача з пари взаємно двоїстих задач може бути прийнята в якості вихідної і яка в якості двоїстої? Які задачі на практиці вважають двоїстими?
5. З якими варіантами рішень можна зіткнутися при дослідженні задач двоїстої пари?
6. Як за рішенням вихідної задачі знайти рішення двоїстої і навпаки?

Варіанти задач для самостійного розв’язання

Задача № 6.1. Побудуйте задачі, двоїсті до даних:

а) $f = x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 \to \max;$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 \le 5, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 \le 3, \end{cases}$$
$$x_j \ge 0 \left(j = \overline{1,4}\right).$$

б) $f = 3x_2 - x_4 \to \max;$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_4 = 8, \\ 2x_2 + x_3 - 3x_4 = 6, \end{cases}$$
$$x_j \ge 0 \left(j = \overline{1,4}\right).$$

в) $f = 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 \to \min;$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \ge 5, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 \ge 1, \\ x_1 - x_2 - 4x_3 \le -3, \\ x_1 - x_2 + 8x_3 \ge 4, \end{cases}$$
$$x_j \ge 0 \left(j = \overline{1,3}\right).$$

г) $f = 7x_1 + 6x_2 + 3x_3 - x_4 \to \min;$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 \ge 12, \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 \le 10, \end{cases}$$
$$3x_1 + 5x_2 + 4x_4 = 7,$$
$$x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0.$$

$$
\text{д) } f = 2x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 + x_5 \to \max;
$$
$$
\begin{aligned}
x_1 - 3x_2 + x_3 + 2x_4 \qquad &= 5,\\
2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 - x_5 &\le 8,\\
x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 + 2x_5 &\le 9,\\
-x_1 - 2x_2 + x_3 - 3x_4 - x_5 &\ge 4.
\end{aligned}
$$

Задача № 6.2. Побудуйте задачу, двоїсту до даної:

$$
f = x_1 + x_2 \to \max;
$$
$$
\begin{cases} -x_1 + 3x_2 \le 6,\\ 3x_1 - x_2 \le 6,\end{cases}
$$
$$
x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.
$$

Розв’яжіть вихідну й двоїсту задачі графічним методом, переконайтеся на прикладі цих задач у справедливості першої і другої основних теорем двоїстості.

Задача № 6.3. Побудуйте задачі, двоїсті до даних:

$$
\text{а) } f = 5x_1 + x_2 \to \max;
$$
$$
\begin{cases} x_1 - x_2 \le 2,\\ x_1 - 3x_2 \le 3,\end{cases}
$$
$$
x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.
$$

$$
\text{б) } f = x_1 - 2x_2 \to \min;
$$
$$
\begin{cases} x_1 - x_2 \ge 5,\\ -x_1 + x_2 \ge 1,\end{cases}
$$
$$
x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.
$$

Розв’яжіть вихідну й двоїсту задачі графічним методом. Проаналізуйте результати рішення для кожної пари задач.

7. ТРАНСПОРТНІ ЗАДАЧІ ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ

7.1 Класична постановка транспортної задачі

Під терміном „***транспортні задачі***” (ТЗ) розуміють широке коло задач не тільки транспортного характеру. Загальним для них являється, як правило, розподіл ресурсів, які знаходяться у m виробників (постачальників), за n споживачами цих ресурсів.

Розглянемо економіко-математичну модель прикріплення пунктів відправлення до пунктів призначення.

Нехай є m постачальників $A_1, A_2, ..., A_m$ однорідного вантажу в кількостях відповідно $a_1, a_2, ..., a_m$ одиниць і n споживачів $B_1, B_2, ..., B_n$ цього вантажу, потреба яких становить відповідно $b_1, b_2, ..., b_n$ одиниць.

Відома вартість перевозу одиниці вантажу від i-го постачальника до j-го споживача – c_{ij} $\left(i=\overline{1,m};\quad j=\overline{1,n}\right)$.

Потрібно скласти такий план перевозу вантажу, який забезпечить мінімальні транспортні витрати.

Зауваження №7.1. Перевезений вантаж повинен бути однорідним, наприклад пісок, вугілля, ліс, цегла, метал і т.п. Одиниці виміру кількості вантажу можуть бути різними (т, м^3, шт., л і т. п.). Вартість перевозу, як правило, виміряється в грошових одиницях. Передбачається, що вартість перевезеного вантажу пропорційна його кількості. В якості постачальників вантажу можуть виступати підприємства, бази, склади, а в якості споживачів – підприємства, магазини, будівельні об'єкти й т.п.

Перш ніж приступити до побудови моделі задачі, необхідно визначити невідомі. Виходячи з умови задачі, невідомою величиною є кількість одиниць вантажу, перевезеного від кожного постачальника до кожного споживача. Позначимо через x_{ij} $\left(i=\overline{1,m};\quad j=\overline{1,n}\right)$ кількість одиниць вантажу, перевезеного від i-го постачальника до j-го споживача.

Вихідні параметри моделі транспортної задачі

1) n – кількість пунктів відправлення, m – кількість пунктів призначення.

2) a_i – запас продукції в пункті відправлення A_i $\left(i=\overline{1,n}\right)$ [од. прод.].

3) b_j – попит на продукцію в пункті призначення B_j $\left(j=\overline{1,m}\right)$ [од. прод.].

4) c_{ij} – тариф (вартість) перевозу одиниці продукції з пункту відправлення A_i у пункт призначення B_j [гр. од./ од. прод.].

Шукані параметри моделі транспортної задачі

1) x_{ij} – кількість продукції, перевезеної з пункту відправлення A_i у пункт призначення B_j [од. прод.].

2) $f(X)$ – транспортні витрати на перевезення всієї продукції [гр. од.].

Щоб краще представити умову задачі, зведемо вихідні дані в табл. 7.1.

Методи рішення транспортних задач зводяться до простих операцій із таблицею, де у визначеному порядку записані всі умови ТЗ. Таку таблицю називають *транспортною (розподільною) таблицею*. Рядок таблиці відповідає постачальникові, а стовпець – споживачеві.

У транспортній таблиці записуються:

– пункти відправлення (ПВ) і пункти призначення (ПП);
– запаси, наявні в пунктах відправлення;
– заявки, подані пунктами призначення;
– вартість перевозу із кожного пункту відправлення в кожний пункт призначення c_{ij}.

Вартість перевозу міститься в правому верхньому кутку кожної клітки таблиці, з тим щоб у самій клітці при складанні плану вміщувати перевіз x_{ij}.

Вихідні транспортної задачі слід представляти за формою (табл. 7.1):

Таблиця 7.1 – Транспортна (розподільна) таблиця

Споживачі / Постачальники	B_1	B_2	...	B_n	Запаси (обсяги відправлень)), a_i
A_1	c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}	...	c_{1n} x_{1n}	a_1
A_2	c_{21} x_{21}	c_{22} x_{22}	...	c_{2n} x_{2n}	a_2
...	...	...	...	...	...
A_m	c_{m1} x_{m1}	c_{m2} x_{m2}	...	c_{mn} x_{mn}	a_m
Потреба, b_j	b_1	b_2	...	b_n	$\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{j=1}^{m} b_j$

7.2 Збалансована та незбалансована моделі транспортної задачі

При постановці конкретних задач перевезення вантажів може виникнути одна із трьох ситуацій:

1) кількість вантажу у всіх постачальників $\left(\sum_{i=1}^{m} a_i\right)$ дорівнює потребі в даному вантажі всіх споживачів $\left(\sum_{j=1}^{n} b_j\right)$:

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_m = b_1 + b_2 + \ldots + b_n$$

або

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j \; ; \qquad (7.1)$$

2) кількість вантажу у всіх постачальників $\left(\sum_{i=1}^{m} a_i\right)$ більша потреби в даному вантажі всіх споживачів $\left(\sum_{j=1}^{n} b_j\right)$:

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_m > b_1 + b_2 + \ldots + b_n,$$
$$\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j\,; \qquad (7.2)$$

3) кількість вантажу у всіх постачальників $\left(\sum_{i=1}^{m} a_i\right)$ менша потреби в даному вантажі всіх споживачів $\left(\sum_{j=1}^{n} b_j\right)$:

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_m < b_1 + b_2 + \ldots + b_n,$$
$$\sum_{i=1}^{m} a_i < \sum_{j=1}^{n} b_j\,. \qquad (7.3)$$

Кожній ситуації відповідає певна модель транспортної задачі.

Розглянемо ситуацію (1), якій відповідає співвідношення (7.1). Об'єктом дослідження в транспортній задачі є планування перевезення вантажів. Ціль дослідження – складання плану перевезення вантажів, який забезпечує мінімальні транспортні витрати. Критерій задачі – мінімальні транспортні витрати. Відобразимо критерій задачі в цільовій функції. Вартість перевозу одиниці вантажу від i-го постачальника до j-го споживача становить c_{ij}, а вантажу перевозиться x_{ij} одиниць. Отже, вартість перевезу всього вантажу від i-го постачальника до j-го споживача буде дорівнювати величині $c_{ij}x_{ij}$. З огляду на те, що сумарна вартість перевозу вантажів від всіх постачальників до всіх споживачів повинна бути мінімальною, цільова функція транспортної задачі буде мати вигляд:

$$\begin{gathered} f = c_{11}x_{11} + c_{12}x_{12} + \ldots + c_{1n}x_{1n} + \\ + c_{21}x_{21} + c_{22}x_{22} + \ldots + c_{2n}x_{2n} + \ldots \\ + c_{m1}x_{m1} + c_{m2}x_{m2} + \ldots + c_{mn}x_{mn} \to \min. \end{gathered}$$

Із співвідношення (7.1) виходить, що весь вантаж, наявний у постачальників, повинен бути вивезений і кожний споживач повинен одержати рівно стільки вантажу, скільки йому необхідно. Цей факт відбивається в обмеженнях задачі. У транспортній задачі можна виділити дві групи обмежень.

Перша група обмежень, кількість яких дорівнює m (кількість постачальників), відбиває той факт, що весь вантаж, наявний у постачальників, повинен бути вивезений:

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + \ldots + x_{1n} = a_1, \\ x_{21} + x_{22} + \ldots + x_{2n} = a_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{m1} + x_{m2} + \ldots + x_{mn} = a_m. \end{cases}$$

Друга група обмежень, кількість яких дорівнює n (кількість споживачів), відбиває той факт, що кожний споживач повинен одержати рівно стільки вантажу, скільки йому необхідно:

$$\begin{cases} x_{11} + x_{21} + \ldots + x_{m1} = b_1, \\ x_{12} + x_{22} + \ldots + x_{m2} = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{1n} + x_{2n} + \ldots + x_{mn} = b_n. \end{cases}$$

Кількість перевезеного вантажу від i-го постачальника до j-го споживача повинна бути величиною позитивною. Отже, у модель необхідно додати обмеження невід'ємності змінних:

$$x_{ij} \geq 0 \ \left(i = \overline{1, m}; \quad j = \overline{1, n}\right).$$

У компактному виді модель транспортної задачі можна представити в такий спосіб:

$$f = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \to \min;$$

$$\begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \quad \left(i = \overline{1, m}\right), \\ \sum\limits_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \quad \left(j = \overline{1, n}\right), \\ x_{ij} \geq 0 \left(i = \overline{1, m};\ j = \overline{1, n}\right). \end{cases} \tag{7.4}$$

Для того щоб транспортна задача (7.4) мала розв'язок, тобто мала оптимальний план, необхідно й досить виконання умови (7.1).

Розглянемо ситуацію (2), якій відповідає співвідношення (7.2). У даній ситуації у всіх постачальників є більше вантажу, ніж необхідно споживачам. Тому частина вантажу в постачальників залишиться, а споживачі одержать весь необхідний вантаж. Оскільки у частини постачальників вантаж залишиться, обмеження першої групи будуть мати вигляд «≤», а модель задачі прийме наступний вид:

$$f = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \to \min;$$

$$\begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{n} x_{ij} \leq a_i \quad \left(i = \overline{1, m}\right), \\ \sum\limits_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \quad \left(j = \overline{1, n}\right), \\ x_{ij} \geq 0 \left(i = \overline{1, m};\ j = \overline{1, n}\right). \end{cases}$$

В ситуації (3), якій відповідає співвідношення (7.3), всім споживачам потрібно більше вантажу, ніж є у постачальників. Тому кожний постачальник весь свій вантаж вивезе, а частина споживачів одержать вантажу менше необхідної кількості, тому обмеження другої групи приймуть вид «≤».

Модель (7.4) називається *закритою* моделлю транспортної задачі, а відповідна їй задача – *збалансованою.* Моделі, що відповідають співвідношенням (7.2) і (7.3), називаються *відкритими*, а відповідні їм задачі – *незбалансованими.* Кількість змінних у моделі дорівнює ($m \times n$), а кількість обмежень – ($m + n$).

Щоб вирішити транспортну задачу, описувану відкритою моделлю, її необхідно збалансувати або, по-іншому, відкриту модель привести до закритої. Досягається це в такий спосіб.

У ситуації (2), коли $\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j$, вводиться фіктивний споживач B_{n+1} з потребою $b_{n+1} = \sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j$. До лівої частини кожного обмеження першої групи додається відповідно невід'ємна змінна $x_{i,\ n+1} \left(i = \overline{1, m}\right)$, у другу групу обмежень додається обмеження, що відповідає фіктивному споживачеві B_{n+1}:

$$\sum_{i=1}^{m} x_{i,n+1} = b_{n+1}.$$

У таблицю вихідних даних задачі (табл. 7.1) додається стовпець.

У ситуації (3), коли $\sum_{i=1}^{m} a_i < \sum_{j=1}^{n} b_j$, вводиться фіктивний постачальник A_{m+1} з наявністю вантажу в кількості $a_{m+1} = \sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{i=1}^{m} a_i$.

До лівої частини кожного обмеження другої групи додається відповідно невід'ємна змінна $x_{m+1,j} \left(j = \overline{1, n}\right)$, у першу групу обмежень додається обмеження, що відповідає фіктивному постачальникові A_{m+1}:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{m+1,j} = a_{m+1}.$$

У таблицю вихідних даних задачі (табл. 7.1) додається рядок.

Вартість перевозу одиниці вантажу до фіктивного споживача або від фіктивного постачальника приймається рівною нулю, тому що вантаж не перевозиться.

Перехід від відкритої моделі до закритої фактично означає приведення моделі транспортної задачі до канонічної форми без врахування вимоги максимізації цільової функції.

Розглянемо приклад побудови математичної моделі транспортної задачі.

Приклад №7.1. Заводи якоїсь автомобільної фірми розташовані в містах A_1, A_2 і A_3. Основні центри розподілу продукції зосереджені в містах B_1 і B_2. Обсяги виробництва зазначених трьох заводів дорівнюють 1000, 1300 і 1200 автомобілів щокварталу. Величини квартального попиту в центрах розподілу становлять 2300 і 1400 автомобілів відповідно. Вартість перевозу автомобілів по залізниці по кожному з можливих маршрутів наведена в табл. 7.2.

Таблиця 7.2 – Вартість перевозу автомобілів, гр. од./шт.

	B_1	B_2
A_1	80	215
A_2	100	108
A_3	102	68

Побудуйте математичну модель, що дозволяє визначити кількість автомобілів, перевезених з кожного заводу в кожний центр розподілу, таким чином, щоб загальні транспортні витрати були мінімальні.

Рішення

Визначення змінних

Позначимо кількість автомобілів, перевезених з i-го заводу в j-ий центр розподілу через x_{ij}.

Перевірка збалансованості задачі

Як видно з розгляду вихідних даних задачі, сумарне виробництво автомобілів становить 3500 шт./кв. $\left(\sum_{i=1}^{3} a_i = 1000 + 1300 + 1200 = 3500\right)$, а сумарна потреба всіх пунктів розподілу становить 3700 шт./кв. $\left(\sum_{j=1}^{2} b_j = 2300 + 1400 = 3700\right)$.

Звідси робимо висновок – задача *незбалансована,* оскільки попит на автомобілі перевищує обсяг їхнього виробництва. Для встановлення балансу введемо додатковий *фіктивний* завод із щоквартальним обсягом виробництва 200 шт./кв. $\left(a_4 = \sum_{j=1}^{2} b_j - \sum_{i=1}^{3} a_i = 3700 - 3500 = 200\right)$. Фіктивні тарифи $c^{ф}$ прирівняємо до нуля (тому що перевезення в дійсності здійснюватися не будуть).

Побудова транспортної матриці

Відповідно до результатів перевірки збалансованості задачі №7.1 у транспортній матриці повинно бути чотири рядки, що відповідають заводам і два стовпці, що відповідають центрам розподілу (див. табл. 7.3). Тариф перевезення вписують *у правому верхньому* куті клітки матриці для зручності подальшого знаходження опорних планів задачі.

Цільова функція транспортної задачі

Сумарні витрати в грошових одиницях на щоквартальне перевезення автомобілів визначаються за формулою:

$$f(X) = 80x_{11} + 215x_{12} + 100x_{21} + 108x_{22} + 102x_{31} + 68x_{32} + 0 \cdot x_{41} + 0 \cdot x_{42} \rightarrow \min;$$

Таблиця 7.3 – Транспортна матриця задачі № 7.1

Споживачі / Постачальники	B_1	B_2	Обсяг вироб., шт./кв.
A_1	80 x_{11}	215 x_{12}	1000
A_2	100 x_{21}	108 x_{22}	1300
A_3	102 x_{31}	68 x_{32}	1200
$A_ф$	0 x_{41}	0 x_{42}	200
Попит, шт./кв.	2300	1400	3700

Обмеження транспортної задачі

Запишемо спочатку обмежуючі умови для заводів. Ця група обмежень, кількість яких дорівнює 4, відображає той факт, що усі виготовлені автомобілі кожного заводу повинні бути повністю вивезені:

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} = 1000, \\ x_{21} + x_{22} = 1300, \\ x_{31} + x_{32} = 1200, \\ x_{41} + x_{42} = 200. \end{cases}$$

Друга група обмежень, кількість яких дорівнює 2, відображає той факт, що потреба в автомобілях кожного центру розподілу повинна бути повністю задоволена:

$$\begin{cases} x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} = 2300, \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} = 1400. \end{cases}$$

Математичну модель варто доповнити умовою невід’ємності змінних:

$$x_{ij} \ge 0 \ \left(i = \overline{1,2};\ j = \overline{1,4}\right).$$

7.3 Методи побудови опорних планів

7.3.1 Теоретичне введення

Опорний план є припустимим рішенням транспортної задачі і використовується в якості початкового базисного рішення при знаходженні оптимального рішення методом потенціалів.

Для рішення вихідні дані транспортної задачі (7.4) зводяться в таблицю (табл. 7.1). З умови (7.1) виходить, що будь-яке обмеження транспортної задачі є лінійною комбінацією інших. Отже, система обмежень транспортної задачі лінійно залежна й містить тільки $m + n - 1$ незалежних рівнянь. Тому вихідний припустимий невироджений базисний план повинен мати $m + n - 1$ базисну змінну і його легко можна одержати безпосередньо з даних таблиці. Всі інші змінні – небазисні і їхні значення дорівнюють нулю. Умовимося ці нулі в таблиці не відображати, тобто клітку, яка відповідає небазисній змінній, залишати незаповненою.

Для одержання опорного (вихідного) плану існує три методи: метод північно-західного кута, метод мінімального елемента й метод Фогеля. "Якість" опорних планів, отриманих цими методами, розрізняється: у загальному випадку метод Фогеля дає найкраще рішення (найчастіше оптимальне), а метод північно-західного кута – найгірше.

Всі існуючі методи знаходження опорних планів відрізняються тільки ***способом вибору клітки*** для заповнення. Саме заповнення відбувається однаково незалежно від використовуваного методу. Варто пам'ятати, що перед знаходженням опорного плану транспортна задача повинна бути ***збалансована***.

7.3.2 Метод північно-західного кута

На кожному кроці **методу північно-західного кута** із всіх не викреслених кліток вибирається сама ліва й верхня (північно-західна) клітка.

Знаходимо значення x_{11} зі співвідношення: $x_{11} = \min\{a_1, b_1\}$.

Можливі три варіанти:

1) якщо $a_1 < b_1$, то $x_{11} = a_1$, рядок $i = 1$ виключається з подальшого розгляду, а потреба першого споживача b_1 (стовпець $j = 1$) зменшується на величину a_1;

2) якщо $a_1 > b_1$, то $x_{11} = b_1$, стовпець $j = 1$ виключається з подальшого розгляду, а наявність вантажу у першого постачальника a_1 (рядок $i = 1$) зменшиться на величину b_1;

3) якщо $a_1 = b_1$, то $x_{11} = a_1 = b_1$, рядок $i = 1$ і стовпець $j = 1$ виключається з подальшого розгляду. Даний варіант приводить до виродження вихідного плану.

Потім аналогічні операції проводимо із частиною таблиці, що залишилася, починаючи з її північно-західного кута. На останньому кроці процесу залишиться один рядок і один стовпець. Після заповнення клітки, що знаходиться на їхньому перетинанні, процес завершується.

Після завершення описаного процесу необхідно провести перевірку отриманого плану на виродженість. Якщо кількість заповнених кліток дорівнює $m + n - 1$, то план є невиродженим, у противному випадку – виродженим.

Якщо план вироджений, тобто кількість заповнених кліток менше $m + n - 1$, то незаповнені клітки з мінімальною вартістю перевозу заповнюються нулями, щоб загальна кількість заповнених кліток дорівнювала $m + n - 1$. Однак при розміщенні нулів необхідно пам'ятати, що в таблиці не повинно бути жодного прямокутника, утвореного заповненими клітками, всі вершини якого є заповненими клітками. Наприклад, змінні x_{11}, x_{12}, x_{21}, x_{22} або x_{11}, x_{1n}, x_{21}, x_{2n} (табл. 7.1) не можуть бути одночасно базисними.

7.3.3 Метод мінімального елемента

На відміну від методу північно-західного кута даний метод враховує при побудові опорного плану вартість перевозу. У ряді випадків він дозволяє одержати кращий, з точки зору критерію оптимальності, план, скорочуючи кількість ітерацій для одержання оптимального плану.

Визначення значень x_{ij} починається із клітки, що має мінімальну вартість перевозу (якщо таких кліток більше однієї, то вибирають першу по порядку).

Як і у методі північно-західного кута, змінній, що відповідає вибраній клітці, присвоюється мінімальне із двох можливих значень. Відповідний рядок чи стовпець виключається із подальшого розгляду, а потреба споживача або наявність вантажу у постачальників зменшується на обрану величину. Якщо для обраної клітки з мінімальною вартістю перевозки наявність вантажу у постачальника рівняється потребі споживача, то із подальшого розгляду виключається рядок і стовпець.

Потім в частині таблиці, що залишилася, проводяться аналогічні операції, знову починаючи з клітки, що має мінімальну вартість перевозу. На останньому кроці процесу залишиться один рядок і один стовпець. Після заповнення клітки, що знаходиться на перетинанні, процес завершується.

Перевірка одержаного плану на виродженість і розстановка (у випадку виродженості плану) нулів здійснюється так само, як описано для методу північно-західного кута.

7.3.4 Метод Фогеля

На кожному кроці **методу Фогеля** для кожного i-го рядка обчислюються штрафи d_i як різниця між двома найменшими вартостями (тарифами) рядка. У такий же спосіб обчислюються штрафи d_j для кожного j-го стовпця. Після чого вибирається максимальний штраф із всіх штрафів рядків і стовпців. У рядку або стовпці, що відповідає обраному штрафу, для заповнення вибирається не викреслена клітка з мінімальною вартістю (тарифом) min c_{ij}.

Якщо існує декілька однакових по величині максимальних штрафів у матриці, то у відповідних рядках або стовпцях вибирається одна не викреслена клітка з мінімальним тарифом min c_{ij}.

Якщо кліток з мінімальною вартістю (тарифом) також декілька, то з них вибирається клітка (i, j) з максимальним сумарним штрафом, тобто сумою штрафів по i-му рядку та j-му стовпцю.

7.3.5 Методичні рекомендації щодо побудови опорного плану транспортної задачі

Формально, реальні і фіктивні стовпці й рядки в транспортній матриці абсолютно *рівноправні.* Тому при знаходженні опорних планів фіктивні рядки, стовпці і тарифи необхідно аналізувати й використовувати так само як і реальні. Але при обчисленні значення цільової функції фіктивні перевезення *не враховуються,* оскільки вони реально не були виконані і оплачені.

Якщо величина фіктивних вартостей перевищує максимальний з реальних вартостей задачі [$c^{ф} > \max c_{ij}$ ($i = \overline{1, n}$; $j = \overline{1, m}$)], то методи мінімального елемента й Фогеля дозволяють одержати більш дешеві плани перевозок, ніж у випадку з нульовими фіктивними тарифами.

Приклад №7.2. Знайти трьома методами опорний план транспортної задачі, у якій запаси на трьох складах дорівнюють 210, 170, 65 од. продукції, потреби чотирьох магазинів дорівнюють 125, 90, 130, 100 од. продукції, тарифи перевозу в грошових одиницях за одиницю продукції наступні:

$$c_{ij} = \begin{pmatrix} 5 & 8 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & 4 & 9 \\ 9 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Рішення

Визначення змінних

Позначимо кількість продукції, перевезеної з i-го складу в j-й магазин через x_{ij}.

Перевірка збалансованості задачі

Як видно з розгляду вихідних даних задачі, сумарні запаси продукції становлять 445 од. $\left(\sum_{i=1}^{3} a_i = 210 + 170 + 65 = 445\right)$, а сумарна потреба усіх магазинів у продукції становить 445 од. $\left(\sum_{j=1}^{4} b_j = 125 + 90 + 130 + 100 = 445\right)$.

Перевірка збалансованості задачі показує, що сумарний обсяг запасів дорівнює сумарному обсягу потреб, тобто введення фіктивних стовпців або рядків не потрібно.

Вихідні дані задачі представимо у вигляді транспортної матриці (табл. 7.4).

Таблиця 7.4 – Транспортна матриця задачі №7.2

Споживачі / Постачальники	B_1	B_2	B_3	B_4	Запаси, од. продукції
A_1	5 x_{11}	8 x_{12}	1 x_{13}	2 x_{14}	210
A_2	2 x_{21}	5 x_{22}	4 x_{23}	9 x_{24}	170
A_3	9 x_{31}	2 x_{32}	3 x_{33}	1 x_{34}	65
Потреба, од. продукції	125	90	130	100	445

Результати знаходження опорного плану різними методами представлені в табл. 7.5, 7.6 і 7.7.

Метод північно-західного кута

1. x_{11} = min [210, 125] = 125, стовпчик 1 виключається з подальшого розгляду, а наявність продукції на першому складі (рядок 1) зменшується на 125 одиниць і стає рівною 85 одиницям.
2. x_{12} = min [85, 90] = 85, рядок 1 виключається з подальшого розгляду, а потреба другого споживача (стовпчик 2) зменшується на 85 одиниць і стає рівною 5 одиницям.
3. x_{22} = min [170, 5] =5, стовпчик 2 виключається з подальшого розгляду, а наявність товару у другого постачальника (рядок 2) зменшується на 5 одиниць і стає рівною 165 одиницям.
4. x_{23} = min [165, 130] = 130, стовпчик 3 виключається з подальшого розгляду, а наявність продукції на другому складі (рядок 2) зменшується на 130 одиниць і стає рівною 35 одиницям.
5. x_{24} = min [35, 100] = 35, рядок 2 виключається з подальшого розгляду, а потреба другого споживача (стовпчик 4) зменшується на 35 одиниць і стає рівною 65 одиницям.
6. Оскільки в таблиці залишився один рядок (рядок 3) і один стовпчик (стовпчик 4) – це останній крок процесу, x_{34} = 65.

Таблиця 7.5 – Транспортна таблиця з опорним планом північно-західного кута

Споживачі / Постачальники	B_1	B_2	B_3	B_4	Запаси, од. продукції
A_1	5 125	8 85	1	2	210/85/0
A_2	2	5 5	4 130	9 35	170/165/35/0
A_3	9	2	3	1 65	65/0
Потреба, од. продукції	125/0	90/5/0	130/0	100/65/0	445

Кількість заповнених кліток у табл. 7.5 дорівнює 6 ($m + n - 1 = 3 + 4 - 1 = 6$). Отже, отриманий план невироджений. Значення базисних змінних: $x_{11} = 125$, $x_{12} = 85$, $x_{22} = 5$, $x_{23} = 130$, $x_{24} = 35$, $x_{34} = 65$.

Решта змінних – небазисні, їхні значення дорівнюють нулю.

Опорний план $X_{\text{ПЗК}}$ знайдений методом північно-західного кута:

$$X_{\text{ПЗК}} = \begin{pmatrix} 125 & 85 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 130 & 35 \\ 0 & 0 & 0 & 65 \end{pmatrix} \text{[од. продукції].}$$

Відповідна ЦФ (загальні витрати на перевезення)

$f(X_{\text{ПЗК}}) = 125 \cdot 5 + 85 \cdot 8 + 5 \cdot 5 + 130 \cdot 4 + 35 \cdot 9 + 65 \cdot 1 = 2230$ [гр.од.].

Метод мінімального елемента

Тепер для тієї самої задачі (табл. 7.4) визначимо вихідний базисний план методом мінімального елемента і відобразимо його в табл. 7.6:

1. Змінним x_{13} і x_{34} відповідають клітки з мінімальною вартістю перевозок ($c_{13} = c_{34} = 1$). Вибираємо першу за номером клітку, $x_{13} = \min [210, 130] = 130$. Стовпчик 3 виключається з подальшого розгляду, а наявність продукції у першого постачальника (рядок 1) зменшується на 130 одиниць і стає рівною 80 одиницям.

2. $x_{34} = \min [65, 100] = 65$, рядок 3 виключається з подальшого розгляду, а потреба четвертого споживача (стовпчик 4) зменшується на 65 одиниць і стає рівною 35 одиницям.

3. У частині таблиці, що залишилася, змінним x_{14} і x_{21} відповідають клітки з мінімальною вартістю перевозу ($c_{14} = c_{21} = 2$). Вибираємо першу за номером клітку, $x_{14} = \min [80, 35] = 35$. Стовпчик 4 виключається з подальшого розгляду, а наявність продукції у першого постачальника (рядок 1) зменшується на 35 одиниць і стає рівною 45 одиницям.

4. $x_{21} = \min [170, 125] = 125$, стовпець 1 виключається з подальшого розгляду, а наявність продукції у другого споживача (рядок 2) зменшується на 125 одиниці і стає рівною 45 одиницям.

5. У частині таблиці, що залишилася, змінній x_{22} відповідає клітка з мінімальною вартістю перевозу ($c_{22} = 5$), $x_{14} = \min [45, 90] = 45$. Рядок 2 виключається з подальшого розгляду, а потреба у продукції другого споживача (стовпець 2) зменшується на 45 одиниць і стає рівною 45 одиницям.

6. Оскільки в таблиці залишився один рядок (рядок 1) і один стовпець (стовпець 2) – це останній крок процесу, $x_{12} = 45$.

Таблиця 7.6 – Транспортна таблиця з опорним планом мінімального елемента

Споживачі / Постачальники	B_1	B_2	B_3	B_4	Запаси, од. продукції
A_1	5	8 45	1 130	2 35	210/80/45/0
A_2	2 125	5 45	4	9	170/45/0
A_3	9	2	3	1 65	65/0
Потреба, од. продукції	125/0	90/45/0	130/0	100/35/0	445

Кількість заповнених кліток у табл. 7.6 дорівнює 6 ($m + n - 1 = 3 + 4 - 1 = 6$). Отже, отриманий план невироджений. Значення базисних змінних: $x_{12} = 44$, $x_{13} = 130$, $x_{14} = 35$, $x_{21} = 125$, $x_{22} = 45$, $x_{34} = 65$. Решта змінних – небазисні і їхні значення дорівнюють нулю.

Опорний план $X_{\text{МЕ}}$, знайдений методом мінімального елемента

$$X_{\text{МЕ}} = \begin{pmatrix} 0 & 45 & 130 & 35 \\ 125 & 45 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 65 \end{pmatrix} \text{[од. продукції]}.$$

Значення функції цілі $f(X_{\text{МЕ}}) = 1100$ [гр.од.].

Метод Фогеля

На першому кроці знаходження опорного плану методом Фогеля виникає ситуація рівності значень максимальних штрафів транспортної матриці (див. табл. 7.7)

$$d_{1\ \text{стовпця}} = d_{2\ \text{стовпця}} = 3.$$

Мінімальні вартості перевозу в цих стовпцях також збігаються

$$c_{21} = c_{32} = 2.$$

Тому необхідно зрівняти сумарні штрафи d_{ij} кліток (2,1) і (3,2)

$$d_{21} = d_{2\ \text{рядка}} + d_{1\ \text{стовпця}} = 2 + 3 = 5;$$
$$d_{32} = d_{3\ \text{рядка}} + d_{2\ \text{стовпця}} = 1 + 3 = 4.$$

Так як $d_{21} > d_{32}$, то вибираємо на першому кроці для заповнення клітку (2,1). Опорний план X_{Φ}, знайдений методом Фотеля

$$X_{\Phi} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 110 & 100 \\ 125 & 25 & 20 & 0 \\ 0 & 65 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{[од. продукції]}.$$

$$f(X_{\Phi}) = 895 \text{ [гр.од.]}.$$

Таблиця 7.7 – Транспортна таблиця з опорним планом Фогеля

Споживачі Постачальники	B_1	B_2	B_3	B_4	b_i	Штрафи рядків, d_i			
A_1	5	8	1 110	2 100	210/110/0	1	1	1	**7**
A_2	2 125	5 25	4 20	9	170/45/25/0	2	1	1	1
A_3	9	2 65	3	1	65/0	1	1	—	—
a_j	125/0	90/25/0	130/20/0	100/0					
Штрафи стовпців, d_j	3	3	2	1					
	—	3	2	1					
	—	3	3	**7**					
	—	3	3	—					

Для задачі, вихідні дані якої наведені в табл. 7.4, методом Фогеля отриманий кращий, із критерію оптимальності цільової функції, вихідний опорний план (табл. 7.7).

7.4 Поліпшення опорного плану методом потенціалів

Всі методи рішення транспортних задач спираються на виконання таких етапів:

1. Одержання опорного плану.
2. Перевірка на оптимальність отриманого плану.
3. Поліпшення отриманого плану.

Очевидно, що етапи 2 і 3 повторюються до одержання оптимального рішення (плану).

Побудований одним із описаних вище методів опорний план можна довести до оптимального за допомогою симплекс-методу. При існуючих особливостях моделі транспортної задачі (обмеження мають вигляд рівностей, кожна невідома входить у два рівняння, коефіцієнти при невідомих – одиниці) процес її рішення симплекс-методом є громіздким. Тому для знаходження оптимального плану транспортної задачі створені спеціальні методи, найпоширенішим із яких вважається метод потенціалів.

Розглянемо алгоритм, що реалізує цей метод.

***Крок* 1.** Кожному постачальнику A_i (тобто кожному рядку) поставимо у відповідність деяке число $u_i(i=\overline{1,m})$, назване *потенціалом* A_i, а кожному споживачеві B_j, (тобто кожному стовпчику) поставимо у відповідність деяке число $v_j(j=\overline{1,n})$, назване потенціалом B_j.

Кожній заповненій клітці транспортної таблиці відповідає "псевдовартість" a_{ij}. Для базисних кліток, тобто для тих, у котрих $x_{ij} > 0$, a_{ij}

розраховується так:

$$a_{ij} = c_{ij} = u_i + v_j . \qquad (7.5)$$

Отримана система (7.5) повинна містити $m + n - 1$ рівнянь (тому що кількість базисних змінних дорівнює $m + n - 1$) з $m + n$ невідомими. Як відомо, така система має множину рішень і будь-яке з них міститиме шукані потенціали. Щоб знайти одне з рішень, значення одного потенціалу в системі задається довільно. Звичайно вважають, що $u_1 = 0$, і знаходять значення інших потенціалів. Значення потенціалів записують у додатковий рядок v_j і стовпчик u_i.

***Крок* 2.** Для кожної незаповненої клітки, тобто для кожної небазисної змінної, розраховується псевдовартість

$$a'_{ij} = u_i + v_j . \qquad (7.6)$$

Розрахунок за виразом (7.6) проводиться безпосередньо за значеннями елементів рядків u_i і стовпчиків v_j. Результат записують у лівий нижній кут відповідної клітки.

***Крок* 3.** Перевірка отриманого плану на оптимальність проводиться за критерієм оптимальності плану транспортної задачі. Якщо для кожної незаповненої клітки виконується умова (7.7):

$$a'_{ij} - c_{ij} \le 0, \qquad (7.7)$$

то план являється оптимальним. В противному випадку одержаний план не оптимальний, і необхідно переходити до нового базисного плану шляхом переміщення перевозу в клітку, що відповідає умові $\max\lfloor \alpha'_{ij} - c_{ij} > 0 \rfloor$. Якщо таких кліток більше однієї, то переміщають перевозку в першу по порядку. Обрана клітка помічається в таблиці. Змінна, що знаходиться в цій клітці, вводиться у базис.

***Крок* 4.** Для правильного переміщення перевозок, щоб не порушити обмежень, будується цикл, тобто замкнутий шлях, з'єднуючий обрану незаповнену клітку з нею ж самою і проходячий через заповнені клітки.

Циклом у транспортній таблиці називають парне число кліток, з'єднаних замкнутою ламаною лінією, яка в кожній клітці обертається на 90°. Одна з кліток циклу, для котрої $a'_{ij} > c_{ij}$ – порожня, а інші клітки – базисні.

Цикл будується в такий спосіб. Викреслюються всі рядки й стовпці (умовно), що містять одну заповнену клітку (обрана клітка при цьому вважається заповненою). Всі інші заповнені клітки становлять цикл і лежать у його кутах. Напрямок обходу циклу (за годинниковою стрілкою або проти) несуттєвий.

Стосовно розташування клітки циклу мають бути виконані певні вимоги:

а) в одному ряду (рядку або в стовпці) розташовуються дві і лише дві клітки циклу;

б) остання (завершальна) клітка циклу знаходиться в тому ж ряду, що і перша (вихідна);

в) якщо умовно з’єднувати клітки циклу прямолінійними відрізками, то в кожній наступній клітці виконується поворот на 90^0. За такого геометричного тлумачення взаємозв’язку між клітками циклу не важливо, через скільки завантажених або вільних кліток проходять умовні прямолінійні відрізки.

Деякі види циклів зображені на рис. 7.1.

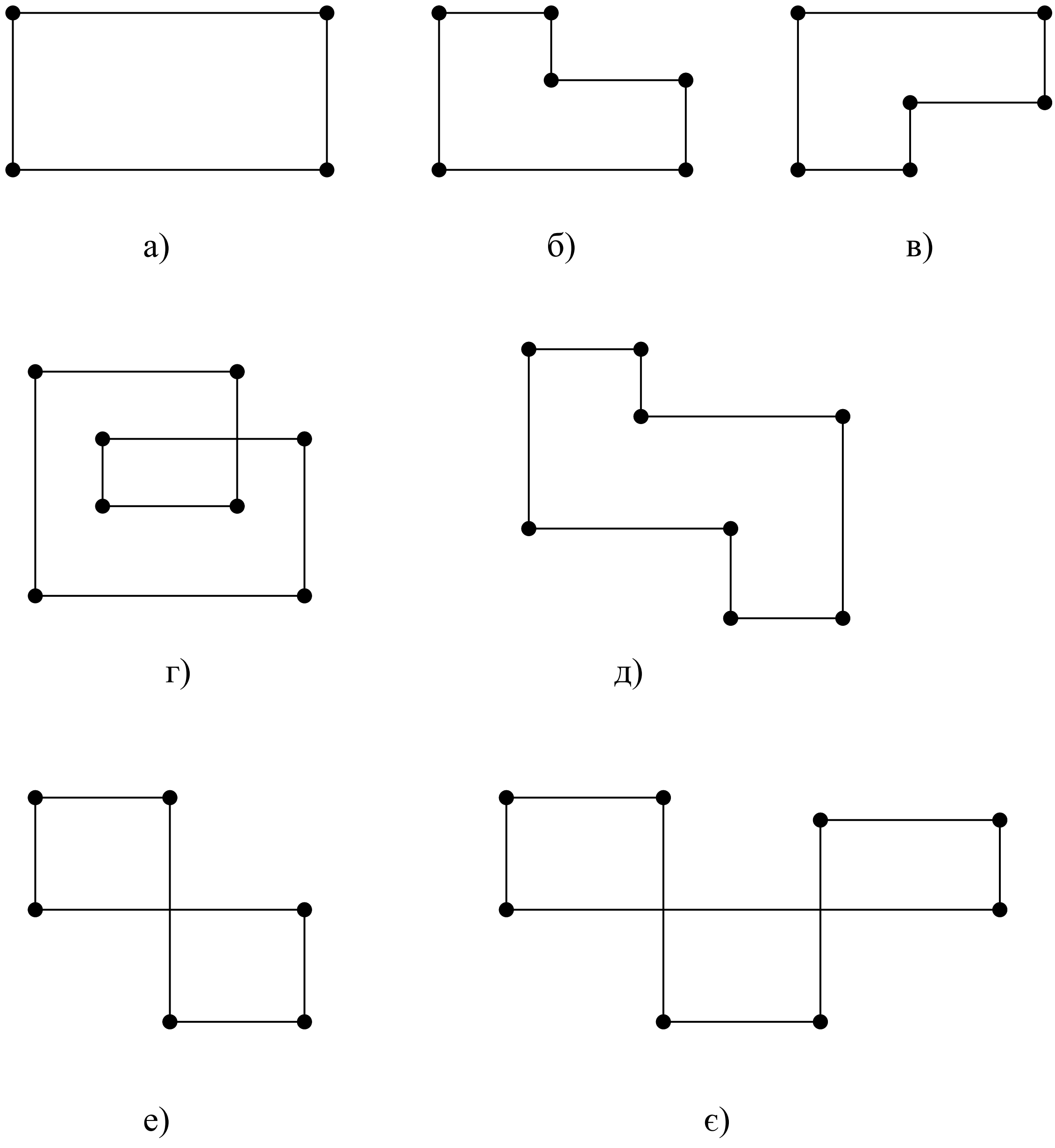

Рисунок 7.1 – Деякі види циклів

***Крок* 5.** В кожній клітці циклу, починаючи з незаповненої, проставляються по черзі знаки “+” і “–” (звичайно вони ставляться у правому нижньому кутку клітки). У клітках зі знаком “–” обирається мінімальна величина. Новий базисний план утворюється шляхом підсумовування обраної величини із величинами, що стоять в клітках циклу зі знаком “+”, і віднімання цієї величини із величин, що стоять в клітках зі знаком “–”.

При цьому обране мінімальне значення перевозу, яке стоїть у клітці зі знаком “–”, відповідатиме змінній, виведеній з базису. Якщо таких величин більше однієї, то із базису виводиться люба із відповідних їм змінних.

Значення змінних, включених у цикл, після коригування переносяться до нової таблиці. Всі інші змінні переносяться до нової таблиці без змін.

Здійснюється перехід до кроку 1 наступної ітерації.

Метод потенціалів забезпечує монотонне убування цільової функції й дозволяє за кінцеве число кроків знайти її мінімум при виконанні умови (7.7).

Приклад № 7.3. Рішення транспортної задачі методом потенціалів.

Визначимо оптимальний план задачі, вихідні дані якої зведені в табл. 7.4. При цьому будемо відштовхуватися від вихідного плану, знайденого методом північно-західного кута (див. табл. 7.5).

Рішення

Таблиця 7.8 – Вихідний опорний план

Споживачі / Постачальники		B_j				Запаси, од. прод.
		$v_1 = 5$	$v_2 = 8$	$v_3 = 7$	$v_4 = 12$	
A_i	$u_1 = 0$	5 125	8 85 -	1	2 * +	210
	$u_2 = –3$	2	5 5 +	4 130	9 35 -	170
	$u_3 = –11$	9	2	3	1 65	65
Потреба, од. прод.		125	90	130	100	445

Першому рядку табл. 7.8 поставимо у відповідність потенціал u_1, другому – потенціал u_2, третьому – потенціал u_3. Стовпцям відповідно потенціали v_1, v_2, v_3, v_4. Для кожної заповненої клітки на підставі формули (7.5) побудуємо співвідношення, визначимо значення потенціалів і запишемо їх у табл. 7.8 ліворуч і вгорі проти відповідних рядків і стовпців:

x_{11}: $u_1 + v_1 = 5$, $u_1 = 0$, $v_1 = 5$,
x_{12}: $u_1 + v_2 = 8$, $u_2 = –3$, $v_2 = 8$,
x_{22}: $u_2 + v_2 = 5$, $u_3 = –11$, $v_3 = 7$,
x_{23}: $u_2 + v_3 = 4$, $v_4 = 12$.
x_{24}: $u_2 + v_4 = 9$,
x_{34}: $u_3 + v_4 = 1$,

Для кожної незаповненої клітки на підставі формули (7.6) розраховується величина оцінки за формулою: $\bar{c}_{ij} = a'_{ij} - c_{ij}$.

Розрахуємо величини оцінок:

$x_{13} \Rightarrow \bar{c}_{13} = u_1 + v_3 – c_{13} = 0 + 7 – 1 = 6$,

$x_{14} \Rightarrow \bar{c}_{14} = u_1 + v_4 - c_{14} = 0 + 12 - 2 = \mathbf{10}$,
$x_{21} \Rightarrow \bar{c}_{21} = u_2 + v_1 - c_{21} = -3 + 5 - 2 = 0$,
$x_{31} \Rightarrow \bar{c}_{31} = u_3 + v_1 - c_{31} = -11 + 5 - 9 = -15$,
$x_{32} \Rightarrow \bar{c}_{32} = u_3 + v_2 - c_{32} = -11 + 8 - 2 = -5$,
$x_{33} \Rightarrow \bar{c}_{33} = u_3 + v_3 - c_{33} = -11 + 7 - 3 = -7$.

Перевіряємо отриманий план на оптимальність за формулою (7.7).

Критерій оптимальності плану транспортної задачі порушується в незаповнених клітках x_{13} і x_{14}.

У загальному випадку необхідно переходити до нового базисного плану шляхом переміщення перевезення в клітку, що відповідає максимальній позитивній різниці ($\bar{c}_{ij} = a'_{ij} - c_{ij}$). На даній ітерації це клітка x_{14}, тому будемо переміщати перевезення в цю клітку. Відзначимо клітку x_{14} у табл. 7.8.

Для правильного переміщення перевезень будується цикл. Викреслимо умовно в табл. 7.8 перший і третій стовпці, а також третій рядок, тому що вони містять одну заповнену клітку. Чотири заповнені клітки, що залишилися утворюють цикл (клітка, у яку переміщається перевезення, вважається заповненою).

У кожній клітці циклу, починаючи із клітки, що відповідає змінній x_{14}, проставимо по черзі знаки «+» і «–». У клітках зі знаком «–» виберемо мінімальну величину. У цьому випадку ця величина дорівнює 35. Новий базисний план представлений у табл. 7.9.

Таблиця 7.9 – Опорний план на ітерації 1

Споживачі / Постачальники		B_j				Запаси, од. прод.
		$v_1 = 5$	$v_2 = 8$	$v_3 = 7$	$v_4 = 2$	
A_i	$u_1 = 0$	5 125	8 50 –	1 * +	2 35	210
	$u_2 = -3$	2	5 40 +	4 130 -	9	170
	$u_3 = -1$	9	2	3	1 65	65
Потреба, од. прод.		125	90	130	100	445

Значення змінних $x_{11} = 125$, $x_{23} = 130$, $x_{34} = 65$, що не входять до циклу, переносяться без змін. Змінні, включені в цикл, коректуються на обрану величину, яка дорівнює 35, залежно від знаків «+» і «–», що відносяться до кліток циклу.

Отриманий у табл. 7.9 новий базисний план насамперед необхідно перевірити на виродженість. План невироджений. Значення базисних змінних: $x_{11} = 125$, $x_{12} = 50$, $x_{14} = 35$, $x_{22} = 40$, $x_{23} = 130$, $x_{34} = 65$.

Транспортні витрати:

$$f = \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{4} c_{ij} x_{ij} = 5 \cdot 125 + 8 \cdot 50 + 2 \cdot 35 + 5 \cdot 40 + 4 \cdot 130 + 1 \cdot 65 = 1880 \text{ [гр.од.]}.$$

Подальше рішення задачі наведене в табл. 7.9–7.12.

На кожній ітерації необхідно здійснювати перевірку плану на виродженість і кроки 1-7 алгоритму. На останній ітерації, коли отримано оптимальний план, останнім є крок 3 алгоритму.

Таблиця 7.10 – Опорний план на ітерації 2

Споживачі / Постачальники		B_j				Запаси, од. прод.
		$V_1 = 5$	$v_2 = 2$	$v_3 = 1$	$v_4 = 2$	
A_i	$u_1 = 0$	5 125 –	8	1 50 +	2 35	210
	$u_2 = 3$	2 * +	5 90	4 80 -	9	170
	$u_3 = -1$	9	2	3	1 65	65
Потреба, од. прод.		125	90	130	100	445

Таблиця 7.11 – Опорний план на ітерації 3

Споживачі / Постачальники		B_j				Запаси, од. прод.
		$V_1 = 5$	$v_2 = 8$	$v_3 = 1$	$v_4 = 2$	
A_i	$u_1 = 0$	5 45 -	8	1 130	2 35 +	210
	$u_2 = -3$	2 80 +	5 90 –	4	9	170
	$u_3 = -1$	9	2 * +	3	1 65 -	65
Потреба, од. прод.		125	90	130	100	445

Таблиця 7.12 – Опорний план на ітерації 4

Споживачі / Постачальники		B_j				Запаси, од. прод.
		$V_1 = 0$	$v_2 = 3$	$v_3 = 1$	$v_4 = 2$	
A_i	$u_1 = 0$	5	8	1 130	2 80	210
	$u_2 = 2$	2 125	5 45	4	9	170
	$u_3 = -1$	9	2 45	3	1 20	65
Потреба, од. прод.		125	90	130	100	445

У табл. 7.12 отриманий оптимальний план задачі, тому що для кожної незаповненої клітки виконується критерій оптимальності плану транспортної задачі.

Значення базисних змінних в оптимальному плані:

x_{13} =130, x_{14} = 80, x_{21}= 125, x_{22} = 45, x_{32} = 45, x_{34} = 20.

Транспортні витрати:

$$f = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{4} c_{ij}x_{ij} = 1 \cdot 130 + 2 \cdot 80 + 2 \cdot 125 + 5 \cdot 45 + 2 \cdot 45 + 1 \cdot 20 = 875 \text{ [гр.од.]}.$$

Контрольні питання

1.Які співвідношення між кількістю вантажу в постачальників і потребою в цьому вантажі у споживачів можуть виникнути при постановці конкретних задач перевезення вантажів?

2.Запишіть модель транспортної задачі, що відповідає співвідношенню (7.3).

3.Яка модель транспортної задачі називається закритою, а яка – відкритою?

4. Як відкриту модель привести до закритої?

5. За якої умови будь-яка транспортна задача буде мати рішення?

6. У якому випадку план транспортної задачі вважається виродженим?

7. Яка кількість заповнених кліток повинна утримуватися в таблиці транспортної задачі при її рішенні?

8. Які клітки заповнюються нулями у випадку виродженості плану і як перевіряється правильність розміщення нулів?

9. Побудуйте схему алгоритму методом потенціалів.

10. Як визначаються значення потенціалів і псевдовартостей у процесі рішення транспортної задачі методом потенціалів?

11. У якому випадку базисний план транспортної задачі є оптимальним?

10. Як будується цикл?

Варіанти задач для самостійного розв'язання

Задача №7.1. У пунктах *A* і *B* знаходиться відповідно 150 і 90 т пального. Пунктам 1, 2, 3 потрібні відповідно 60, 70, 40 т пального. Вартість перевозу 1 т пального з пункту *A* в пункти 1, 2, 3 дорівнює 60, 10, 40 тис. грн. за 1 т відповідно, а з пункту *B* у пункти 1, 2, 3 – 120, 20, 80 тис. грн. за 1 т відповідно. Складіть план перевезень пального, який мінімізує загальну суму транспортних витрат.

Задача №7.2. Три заводи випускають вантажні автомобілі, які відправляються чотирьом споживачам. Перший завод поставляє 90 платформ грузовиків, другий – 30 платформ, третій – 40 платформ. Потрібно поставити платформи наступним споживачам: першому – 70 шт., другому – 30 шт., третьому – 20 шт., четвертому – 40 шт. Вартість перевозу однієї платформи від постачальника до споживача зазначена в наступній таблиці (гр.од.):

Постачальники	Споживачі			
	1	2	3	4
I	18	20	14	10
II	10	20	40	30
III	16	22	10	20

Складіть оптимальний план доставки вантажних автомобілів.

Задача №7.3. Будівництво магістральної дороги включає задачу заповнення наявних на трасі вибоїн до рівня основної дороги й зрізання виступів в деяких місцях дороги. Зрізаним ґрунтом заповнюються вибоїни. Перевезення ґрунту здійснюється грузовиками однакової вантажопідйомності. Відстань у кілометрах від зрізів до вибоїн і обсяг робіт зазначені в наступній таблиці:

Постачальники	Споживачі			Наявність ґрунту, т
	I	II	III	
A	1	2	3	110
B	2	1	3	130
C	1	2	4	20
Необхідна кількість ґрунту, т	100	140	60	

Складіть план перевозок, який мінімізує загальний пробіг грузовиків.

Задача №7.4. Вантаж, що зберігається на трьох складах, вимагає для перевезення 60, 80, 106 автомашин відповідно. Його необхідно перевезти в чотири магазини. Першому магазину потрібно 44 машини вантажу, другому – 70, третьому – 50 і четвертому – 82 машини. Вартість пробігу однієї автомашини за 1 км становить 10 гр. од. Відстані від складів до магазинів зазначені в наступній таблиці:

Склади	Магазини			
	1	2	3	4
1	13	17	6	8
2	2	7	10	41
3	12	18	2	22

Складіть оптимальний за вартістю план перевозу вантажу від складів до магазинів.

Задача №7.5. На складах *A*, *B*, *C* знаходиться сортове зерно 100, 150, 250 т, яке потрібно доставити в чотири пункти. Пункту 1 необхідно поставити 50 т, пункту 2 – 100 т, пункту 3 – 200 т, пункту 4 – 150 т сортового зерна. Вартість доставки 1 т зерна зі складу *A* в зазначені пункти відповідно дорівнює (гр. од.): 80, 30, 50, 20; зі складу *B* – 40, 10, 60, 70; зі складу *C* – 10, 90, 40, 30.

Складіть оптимальний план перевозки зерна за умови мінімуму вартості перевозу.

Задача №7.6. Завод має три цехи – А, В, С і чотири склади – 1; 2; 3; 4. Цех А виробляє 30 тис. шт. виробів, цех В – 40 тис. шт. виробів; цех С – 20 тис. шт. виробів. Пропускна здатність складів за один і той же час характеризується наступними показниками: склад 1 – 20 тис. шт. виробів; склад 2 – 30 тис. шт. виробів; склад 3 – 30 тис. шт. виробів і склад 4 – 10 тис. шт. виробів. Вартість перевозу 1 тис. шт. виробів із цеху А на склади 1, 2, 3, 4 – відповідно (гр. од.): 20, 30, 40, 40, із цеху В – відповідно 30, 20, 50, 10, а із цеху С – відповідно 40, 30, 20, 60.

Складіть такий план перевозу виробів, при якому витрати на перевезення 90 тис. шт. виробів були б найменшими.

Задача №7.7. Є дві станції технічного обслуговування (СТО), що виконують ремонтні роботи для трьох автопідприємств. Виробничі потужності СТО, вартість ремонту в різних СТО, витрати на транспортування від автопідприємств на СТО й назад та кількість прогнозованих ремонтів у плановому періоді на кожному автопідприємстві наведені в наступній таблиці:

СТО	Вартість ремонту од., гр. од.	Витрати на транспортування, тис. грн.			Виробнича потужність, шт.
		АТП-1	АТП-2	АТП-3	
1	520	60	70	20	10
2	710	40	50	30	8
Необхідна кількість, гр. од.		6	7	5	18

Потрібно визначити, яку кількість автомашин з кожного автопідприємства необхідно відремонтувати на кожній СТО, щоб сумарні витрати на ремонт і транспортування були мінімальними.

Задача №7.8. Є два сховища з однорідним продуктом, у яких зосереджено 200 і 120 т продукту відповідно. Продукти необхідно перевезти трьом споживачам відповідно в кількості 80, 100 і 120 т. Відстані від сховищ до споживачів наступні (в км):

Сховище	Споживачі		
	1	2	3
1	20	30	50
2	60	20	40

Витрати на перевіз 1 т продукту на 1 км постійні й дорівнюють 5 гр. од.

Визначте план перевозок продукту від сховищ до споживачів за умови мінімізації транспортних видатків.

Задача №7.9. Промисловий концерн має два заводи й п'ять складів у різних регіонах країни. Щомісяця перший завод виробляє 40, а другий – 70 од. продукції. Вся продукція, вироблена заводами, повинна бути направлена на склади. Місткість першого складу дорівнює 20; другого – 30; третього – 15; четвертого – 27; п'ятого – 28 од. продукції. Витрати на транспортування продукції від заводу до складу наступні (од.):

Заводи	Склади				
	1	2	3	4	5
1	520	480	650	500	720
2	450	525	630	560	750

Складіть план перевозок за умови мінімізації щомісячних витрат на транспортування.

8. УСКЛАДНЕНІ ЗАДАЧІ ТРАНСПОРТНОГО ТИПУ

У п. 7 навчального посібника була розглянута класична транспортна задача, на якій показано, як використовується метод потенціалів для знаходження оптимального плану. В економіці підприємства такі задачі зустрічаються вкрай рідко. Звичайно при складанні економіко-математичної моделі у задачі транспортного типу необхідно вводити цілий ряд додаткових обмежень, а потім користуватися методом потенціалів.

Ряд економічних задач легко зводяться до транспортної задачі. Розглянемо ситуації, які найбільш часто зустрічаються в економіці підприємства.

1. Окремі поставки від певних постачальників деяким споживачам повинні бути виключені (через відсутність необхідних умов зберігання, надмірного перевантаження комунікацій і т.д.). Це обмеження вимагає, щоб у матриці перевозок, яка містить оптимальний план, певні клітки залишалися вільними. Останнє досягається штучним завищенням витрат на перевозку c_{ij} у клітках, перевозку через які варто заборонити. При цьому проводять завищення величини c_{ij} до таких значень, які будуть свідомо більші всіх і з якими їх доведеться порівнювати в процесі рішення задачі, тобто такі ситуації моделюються за допомогою введення так званих **заборонних** тарифів c^3. Заборонні тарифи повинні зробити невигідними перевозки у відповідних напрямках. Для цього величина заборонних тарифів повинна бути більша реальних тарифів у транспортній матриці

$$c^3 > \max c_{ij} \left(i = \overline{1,n};\ j = \overline{1,m}\right).$$

2. На підприємстві необхідно визначити мінімальні сумарні витрати на виробництво й транспортування продукції. З подібними задачами стикаються при рішенні питань, пов'язаних з оптимальним розміщенням виробничих об'єктів. Отут може виявитися економічно більш вигідним доставляти сировину з більш віддалених пунктів, але при меншій її собівартості. У таких задачах за критерій оптимальності приймають суму витрат на виробництво й транспортування продукції.

3. Ряд транспортних маршрутів, по яких необхідно доставити вантажі, мають обмеження за пропускною здатністю. Якщо, наприклад, по маршруту A_iB_j можна провезти не більше q одиниць вантажу, то B_j-й стовпець матриці розбивається на два стовпці – B'_j і B''_j. У першому стовпці попит приймається рівним різниці між дійсним попитом b_j і обмеженням q: $b'_j = b_j - q$, в іншому – рівним обмеженню q, тобто $b''_j = q$. Витрати c_{ij} в обох стовпцях однакові й дорівнюють даним, але в першому стовпці B'_j, у клітці, що відповідає обмеженню i, замість існуючого тарифу c_{ij} ставиться штучно завищений тариф M (клітка блокується). Потім задача вирішується звичайним способом.

4. Поставки за певними маршрутами обов'язкові й повинні ввійти в оптимальний план незалежно від того, вигідно це чи ні. У цьому випадку

зменшують запас вантажу в постачальників і попит споживачів і вирішують задачу щодо тих поставок, які необов'язкові. Отримане рішення коригують із урахуванням обов'язкових поставок.

5. Економічна задача не є транспортною, але в математичному відношенні подібна транспортній, тому що описується аналогічною моделлю, наприклад розподіл виробництва виробів між підприємствами, оптимальне закріплення механізмів за певними видами роботи.

6. Необхідно максимізувати цільову функцію задачі транспортного типу. У цій ситуації при складанні опорного плану в першу чергу намагаються заповнити клітки з найбільш високими значеннями показників c_{ij}. Вибір клітки, що підлягає заповненню при переході від одного припустимого плану до іншого, повинен проводитися не за мінімальною негативною різницею $[c_{ij} - (u_i + v_j)]$, а за максимальною позитивною різницею $[c_{ij} - (u_i + v_j)]$. Оптимальним буде план, якому в останній таблиці супроводжують вільні клітки з від’ємними елементами: всі різниці $[c_{ij} - (u_i + v_j)] \leq 0$. Або в модель замість шуканої ЦФ $f(X)$ вводиться ЦФ $f_1(X) = -f(X)$, у якій тарифи множаться на (–1). Таким чином, максимізація $f(X)$ буде відповідати мінімізації.

7. Необхідно одночасно розподілити вантаж різного роду за споживачами. Задачі даного типу називаються багатопродуктовими транспортними задачами. У цих задачах постачальники m видів вантажів розбиваються на m умовних постачальників, а споживачі n типів вантажів розбиваються на n умовних споживачів. З урахуванням цієї розбивки представляють повну транспортну таблицю. При цьому помітимо, що деякі маршрути A_iB_j повинні бути блоковані (закриті), оскільки в даній постановці задачі вантажі різного роду не можуть заміняти один одного. Цим маршрутам A_iB_j повинна відповідати дуже висока вартість перевозу. Багатопродуктову задачу не завжди обов'язково описувати однією моделлю. Наприклад, якщо поставки вантажів різного роду незалежні, то задачу можна представити у вигляді комплексу транспортних задач по кожному виду вантажу. Однак, якщо між вантажами різного виду існує зв'язок (наприклад, одні з вантажів можна замінити іншими), то в загальному випадку вихідну модель (задачу) не вдається розбити на комплекс простих транспортних задач.

Розглянемо приклади розв’язання задач транспортного типу.

Приклад №8.1. Одне фермерське господарство (A_1) має продовольче зерно двох видів: 3 тис. т – III класу й 4 тис. т – IV класу. Друге фермерське господарство (A_2) також має зерно двох видів: 5 тис. т – III класу й 2 тис. т – IV класу. Зерно повинно вивозитися на два елеватори: на перший елеватор (B_1) необхідно поставити 2 тис. т зерна III класу, 3 тис. т зерна IV класу та ще 2 тис. т зерна будь-якого класу.

Аналогічно другий елеватор (B_2) повинен одержати 8,25 тис. т, з них зерна – 1 тис. т III класу й 1,5 тис. т IV класу.

Вартість перевозу в гр. од. 1 т зерна становить: з пункту A_1 у пункти B_1 і B_2 – 1 і 1,5 відповідно; з пункту A_2 у пункти B_1 і B_2 – 2 і 1 гр. од. відповідно.

Скласти оптимальний план перевозок.

Рішення

Кожного постачальника умовно розбиваємо на дві частини відповідно до двох видів зерна (A_1^3 і A_1^4; A_2^3 і A_2^4), аналогічно споживачів розбиваємо на три частини (зерно III класу, IV класу й будь-який клас): B_1^3, B_1^4 і B_1^0, а також B_2^3, B_2^4 і B_2^0. Споживання перевищує запаси, тому вводимо фіктивного постачальника A_3. Частину кліток у таблиці заповнюємо більшими числами M; наприклад, у клітці (1; 2) стоїть велике число. Це значить, що постачальник A_1^3 не може задовольнити споживача B_1^4 зерном IV класу за рахунок наявного зерна III класу.

З урахуванням зроблених зауважень складемо першу таблицю (табл. 8.1).

Таблиця 8.1 – Вихідні дані до задачі №8.1

Споживачі / Постачальники		B_1			B_2			Запас, тис. т
		B_1^3	B_1^4	B_1^0	B_2^3	B_2^4	B_2^0	
A_1	A_1^3	1	M	1	1,5	M	1,5	3
	A_1^4	M	1	1	M	1,5	1,5	4
A_2	A_2^3	2	M	2	1	M	1	5
	A_2^4	M	2	2	M	1	1	2
A_3		0	0	0	0	0	0	1,25
Попит, тис. т		2	3	2	1	1,5	5,75	15,25

Перевезення від фіктивного постачальника не проводяться, тому $c_{51} = c_{52} = c_{53} = c_{54} = c_{55} = c_{56} = 0$. Величина M набагато більша c_{ij}. Застосовуючи метод потенціалів, у підсумку одержимо таблицю з оптимальним рішенням (табл. 8.2).

Таблиця 8.2 – Оптимальне рішення

Споживачі / Постачальники		B_1			B_2			Запас, тис. т
		B_1^3	B_1^4	B_1^0	B_2^3	B_2^4	B_2^0	
A_1	A_1^3	1 2	*M*	1 1	1,5	*M*	1,5	3
	A_1^4	*M*	1 3	1 1	*M*	1,5	1,5	4
A_2	A_2^3	*2*	*M*	2	1 1	*M*	1 4	5
	A_2^4	*M*	*2*	2	*M*	1 1,5	1 0,5	2
A_3		0	0	0	0	0	0 1,25	1,25
Попит, тис. т		2	3	2	1	1,5	5,75	15,25

Аналіз рішення

Перший постачальник перевезе на перший елеватор (B_1) зерно III класу (x_{12} = 2); зерно IV класу (x_{22} = 3), а також зерно будь-якого класу (III або IV) (x_{13}= 1; x_{23} = 1).

Другий постачальник (A_2) перевезе на другий елеватор (B_2) зерно III класу (x_{31} = 1), зерно IV класу (x_{45} =1,5) і частково будь-яке зерно (x_{36} = 4; x_{46} = 0,5). Потреба елеватора в будь-якому зерні не задоволена на 1,25 тис. т (x_{56} = 1,25). Мінімальні витрати на перевіз склали: $f_{\min}$ = 14 гр. од.

Приклад №8.2. *Модель виробництва із запасами.*

Фірма переводить свій головний завод на виробництво певного виду виробів, які будуть випускатися протягом чотирьох місяців. Величини попиту протягом цих чотирьох місяців становить 100, 200, 180 і 300 виробів відповідно. Щомісяця попит можна задовольнити за рахунок:

- запасів виробів, вироблених минулого місяця, що зберігаються для реалізації в майбутньому;
- виробництва виробів протягом поточного місяця;
- надлишку вироблених виробів у більш пізні місяці за рахунок невиконаних замовлень.

Витрати на один виріб у кожному місяці становлять 4 гр. од. Виріб, зроблений для більше пізньої реалізації, спричиняє додаткові витрати на зберігання в 0,5 гр. од. на місяць. З іншого боку, кожний виріб, що випускається за рахунок невиконаних замовлень, накладається штрафом у розмірі 2 гр. од. на місяць.

Обсяг виробництва виробів змінюється щомісяця залежно від випуску інших виробів. У розглянутих чотирьох місяцях передбачається випуск 50, 180, 280 і 270 виробів відповідно.

Потрібно скласти план, що має мінімальну вартість виробництва й зберігання виробів.

Рішення

Задачу можна сформулювати як транспортну. Еквівалентність між елементами виробничої й транспортної систем установлюється в такий спосіб:

Транспортна система	Виробнича система
1. Вихідний пункт i 2. Пункт призначення j 3. Пропозиція в пункті i 4. Попит у пункті j 5. Вартість перевозок з i і j	1. Період виробництва i 2. Період споживання j 3. Обсяг виробництва за період i 4. Реалізація за період j 5. Вартість виробництва й зберігання за період i і j

Перед нами структура транспортної моделі. Для розглянутої задачі вартість перевозок виробу з періоду i у період j виражається як:

c_{ij} =
- вартість виробництва у i-му періоді, $i = j$;
- вартість виробництва у i-му періоді плюс вартість затримки від i до j, $i < j$;
- вартість виробництва у i-му періоді плюс штраф за порушення терміну, $i > j$.

З визначення c_{ij} виходить, що витрати у періоді i при реалізації продукції в той же період i ($i = j$) оцінюються тільки вартістю виробництва. Якщо у періоді i виробляється продукція, що буде споживатися пізніше ($i < j$), то мають місце додаткові витрати, пов'язані зі зберіганням. Аналогічно виробництво у i-му періоді за рахунок невиконаних замовлень $i > j$ спричиняє додаткові витрати у вигляді штрафу. Наприклад,

c_{11} = 4 гр. од.;

$c_{24} = 4 + (0{,}5 + 0{,}5) = 5$ гр. од.;

$c_{41} = 4 + (2 + 2 + 2) = 10$ гр. од.

Вихідна транспортна таблиця виглядає (табл. 8.3):

Таблиця 8.3 – Вихідні дані

Період \ Період	1	2	3	4	Обсяг виробництва
1	4	4,5	5	5,5	50
2	6	4	4,5	5	180
3	8	6	4	4,5	280
4	10	8	6	4	270
Попит	100	200	180	300	

Задача вирішується звичайним методом потенціалів на мінімум витрат по виробництву й зберіганню продукції.

Приклад №8.3. Є три сорти паперу в кількості 10, 8 і 5 т, який можна використовувати на видання чотирьох книг тиражем 8000, 6000, 15 000, 10 000 примірників. Витрати паперу на одну книгу становлять: 0,6; 0,8; 0,4; 0,5 кг, а собівартість тиражу книги при використанні *i*-го сорту паперу задається наступною матрицею (гр. од.):

$$c_{ij} = \begin{pmatrix} 24 & 16 & 32 & 25 \\ 18 & 24 & 24 & 20 \\ 30 & 24 & 16 & 20 \end{pmatrix}.$$

Визначити оптимальний розподіл паперових резервів.

Рішення

Задача за своїм економічним змістом не є транспортною, у той же час можна побудувати математичну модель, аналогічну транспортній задачі.

Потреби в папері легко визначити, знаючи тираж і витрати на одну книгу:

$$8000 \cdot 0{,}6 = 4{,}8 \text{ т};$$
$$15\,000 \cdot 0{,}4 = 6 \text{ т};$$
$$6000 \cdot 0{,}8 = 4{,}8 \text{ т};$$
$$10\,000 \cdot 0{,}5 = 5 \text{ т}.$$

Загальні запаси паперу становлять 23 т, а загальні потреби – 20,5 т, тому необхідно в таблицю ввести фіктивний тираж $B_5^{ф}$ з нульовими витратами. У зв'язку з тим, що ми складаємо модель щодо паперу, а матриця c_{ij} характеризує собівартість друкування книги, необхідно вихідну матрицю перетворити щодо одиниці паперу (кожний стовпець матриці c_{ij} розділимо на кількість паперу, що витрачається на одну книгу).

Відповідно до викладеного складемо першу таблицю (табл. 8.4):

Таблиця 8.4 – Вихідні дані

Споживачі / Постачальники	B_1	B_2	B_3	B_4	$B_5^{ф}$	Запаси, т
A_1	40	20	80	50	0	10
A_2	30	30	60	40	0	8
A_3	50	30	40	40	0	5
Потреба, т	4,8	4,8	6	5	2,4	23

Використовуючи метод потенціалів, одержимо оптимальне рішення (табл. 8.5).

Таблиця 8.5 – Оптимальне рішення

Споживачі / Постачальники	B_1	B_2	B_3	B_4	$B_5^ф$	Запаси, т
A_1	40	20 4,8	80	50 2,8	0 2,4	10
A_2	30 4,8	30	60 1	40 2,2	0	8
A_3	50	30	40 5	40	0	5
Потреба, т	4,8	4,8	6	5	2,4	23

Аналіз рішення

Паперу 1-го сорту в кількості 4,8 т витрачено на видання другої книги; 2,8 т – на видання четвертої книги; 2,4 т – не використано. Паперу 2-го сорту витрачено: на першу книгу – 4,8 т; на видання третьої книги 1,0 т; на видання четвертої книги – 2,2 т; папір 3-го сорту використаний на видання третьої книги в кількості 5 т.

Контрольні питання

1. Для рішення яких економічних задач застосовується модель транспортної задачі?
2. Чим відрізняється модель задачі про призначення від моделі транспортної задачі?
3. У якому випадку виходять відкриті моделі задач про призначення? Як їх привести до закритих?
4. Яка сутність методу заборони перевозок і як ідея цього методу реалізується в задачі про призначення?

Варіанти задач для самостійного розв'язання

Задача №8.1. Розв'яжіть задачу по розподілу верстатів чотирьох різних типів за шістьма типами робіт. Нехай є 30; 45; 25 і 20 станків відповідних типів. Шість типів робіт характеризуються 30; 20; 10; 40; 10 і 10 операціями відповідно. На верстаті 3 не може виконуватися робота 6. Виходячи з коефіцієнтів вартості операції, представлених у наступній таблиці, побудуйте модель і виконайте оптимальний розподіл верстатів за роботами:

Тип верстатів	Тип робіт					
	1	2	3	4	5	6
1	10	1	3	7	14	8
2	4	8	12	2	10	7
3	12	3	14	6	2	–
4	11	12	9	5	1	3

Задача №8.2. У даній транспортній задачі сумарний попит перевершує сумарний обсяг виробництва. Нехай штрафи за недопоставку одиниці продукції в пункти призначення 1, 2 і 3 дорівнюють відповідно 5, 3 і 2. Вихідні дані наступні:

Заводи	Споживачі			Обсяг виробництва, шт.
	1	2	3	
A_1	3	2	4	50
A_2	5	4	5	75
A_3	1	6	7	30
Потреба, шт.	60	40	70	

Знайдіть оптимальне рішення.

Задача №8.3. Нехай у задачі № 8.2 не введені штрафи, а попит пункту призначення 1 повинен бути повністю задоволений. Сформулюйте нову задачу й знайдіть оптимальне рішення.

Задача №8.4. У таблиці представлена незбалансована транспортна задача, у якій призначається плата за зберігання кожної одиниці невивезеного вантажу з вихідного пункту *i*. Нехай коефіцієнти вартості зберігання вантажу у вихідних пунктах 1, 2 і 3 відповідно дорівнюють 5, 6 і 2.

Пункти зберігання (склади)	Споживачі			Запаси продукції, т
	1	2	3	
1	1	0	4	300
2	3	1	2	400
3	1	2	1	250
Попит, т	280	320	200	

Знайдіть оптимальне рішення, якщо весь обсяг вантажу із пункту 2 повинен бути вивезений для того, щоб звільнити місце для нової продукції.

9. ІНДИВІДУАЛЬНЕ ДОМАШНЄ ЗАВДАННЯ

Індивідуальне домашнє завдання служить основним матеріалом, за яким викладач оцінює активність самостійної роботи студентів і якість засвоєного курсу.

Індивідуальне домашнє завдання містить три задачі, посилання на літературу, яка повинна бути опрацьована при виконанні індивідуального домашнього завдання.

Індивідуальне домашнє завдання виконується в учнівському зошиті (або на окремих аркушах). Завдання повинне бути акуратно оформлено, розбірливо написане на правій сторінці розгорнутого зошита. Ліва сторінка залишається чистою для внесення студентами виправлень і доповнень за результатами рецензування.

У індивідуальному домашньому завданні повинні бути наведені умови задач, потім представлені їх рішення.

При рішенні задач на визначення оптимального плану виробництва продукції, оптимального плану перевезення поштових відправлень, а також розподільної задачі необхідно:

1. Скласти змістовне формулювання й математичну модель задачі, що відповідає заданому варіанту вихідних даних.
2. Скласти таблицю вихідних даних задачі й визначити початкове припустиме базисне рішення (опорний план). Знайти відповідне йому значення цільової функції.
3. Послідовно одержати нові базисні рішення.
4. Найменування й коротке пояснення операцій, виконуваних на кожному кроці алгоритму.
5. Результати рішення задачі.
6. Необхідні пояснення й висновки.

Наприкінці роботи додається список використаної літератури. Виконане індивідуальне домашнє завдання направляється на перевірку. Після одержання «допуску до співбесіди» робота повинна бути захищена перед заліком. Під час захисту індивідуального домашнього завдання студент повинен дати пояснення по суті питань, які вирішуються в завданні, представити внесені виправлення в розрахунках з урахуванням зауважень рецензента, якщо такі є.

Вибір варіанта вихідних даних проводиться за вказівкою викладача. Варіанти вихідних даних до задач наведені в Додатках 1 і 2.

9.1 Умови задач індивідуального домашнього завдання

Задача №9.1

Підприємство випускає n видів продукції з використанням m видів обмежених ресурсів. Відомі наступні величини:

$b_i\left(i = \overline{1, m}\right)$ – запас ресурсу i-го виду;

$a_{ij}\left(i = \overline{1, m}; \quad j = \overline{1, n}\right)$ – кількість ресурсу i-го виду, що йде на виготовлення одиниці продукції j-го виду;

$c_j\left(j = \overline{1, n}\right)$ – доход від реалізації одиниці продукції j-го виду.

Потрібно скласти такий план випуску продукції, щоб при її реалізації одержати максимальний доход.

Вихідні дані наведені у Додатку 1.

Задача №9.2

Є n типів спеціалізованих автомобілів для перевезення поштових відправлень. Необхідно за певним маршрутом перевезти m видів поштових відправлень (контейнери, посилки, мішки). Відомі наступні величини:

$b_i\left(i = \overline{1, m}\right)$ – кількість поштових відправлень i-го виду, які необхідно перевезти;

$a_{ij}\left(i = \overline{1, m}; \quad j = \overline{1, n}\right)$ – місткість поштових відправлень i-го виду, за один рейс автомобіля j-го типу;

$c_j\left(j = \overline{1, n}\right)$ – витрати на один рейс автомобіля j-го типу.

Потрібно скласти такий план перевезення поштових відправлень, щоб при їхньому перевозі витрати були мінімальні.

Вихідні дані наведені у Додатку 1.

Задача №9.3

На території міста є m станцій A_1, A_2, ..., A_n вільною ємністю a_1, a_2, ..., a_m номерів. У місті також є n районів нової забудови B_1, B_2, ..., B_n потреби яких у телефонах становлять відповідно b_1, b_2, ..., b_n номерів.

Потрібно вибрати такий варіант розподілу вільних ємностей телефонних станцій між районами, який забезпечував би мінімальні витрати як на будівництво, так і на експлуатацію лінійних споруд міської телефонної мережі.

Вихідні дані наведені у Додатку 2.

Середні відстані від станцій до районів для усіх варіантів однакові і задані в табл. 9.5.

9.2 Методичні вказівки щодо виконання індивідуального домашнього завдання

9.2.1 Визначення оптимального плану виробництва продукції

Ключові положення.

Симплекс-метод (або метод послідовного поліпшення плану) дає можливість, почавши з вихідного опорного плану задачі, одержати послідовність нових її опорних планів, що завершується оптимальним планом, якщо він існує.

Процедура симплекс-методу містить три істотних елементи:

- указує спосіб знаходження вихідного базисного плану або встановлює неможливість його побудови (тобто встановлює суперечливість умов задачі);
- установлює ознаку, що дає можливість перевірити, чи є базисний план оптимальним;
- формулюються правила, за якими неоптимальний план можна поліпшити.

Розглянемо алгоритм симплекс-методу на конкретному прикладі.

Формулювання задачі планування виробництва (задача про використання ресурсів).

Для виготовлення різних виробів *A*, *B* і *C* підприємство використовує три різних види сировини. Норми витрат сировини на виробництво одного виробу кожного виду, ціна одного виробу *A*, *B* і *C*, а також загальна кількість сировини кожного виду, що може бути використана підприємством, наведені в табл. 9.1.

Таблиця 9.1 – Вихідні дані

Вид сировини	Норми витрат сировини на один виріб, (кг)			Загальна кіл-ть сировини, (кг)
	A	*B*	*C*	
I	12	10	9	220
II	15	18	20	400
III	6	4	4	100
Ціна одного виробу, (гр.од.)	30	32	30	–

Вироби *A*, *B* і *C* можуть виготовлятися в будь-яких співвідношеннях (збут забезпечений), але виробництво обмежене виділеною підприємству сировиною кожного виду.

Скласти план виробництва виробів, при якому загальна вартість всієї виготовленої підприємством продукції є максимальною.

Складання математичної моделі задачі.

Шуканий випуск виробів A позначимо через x_1, виробів B – через x_2, виробів C – через x_3.

Оскільки є обмеження на виділений підприємству фонд сировини кожного виду, змінні x_1, x_2, x_3 повинні задовольняти наступній системі нерівностей:

$$\begin{cases} 12x_1 + 10x_2 + 9x_3 \le 220, \\ 15x_1 + 18x_2 + 20x_3 \le 400, \\ 6x_1 + 4x_2 + 4x_3 \le 100. \end{cases} \tag{9.1}$$

Загальна вартість виготовленої підприємством продукції за умови випуску x_1 виробів A, x_2 виробів B і x_3 виробів C становить:

$$f = 30x_1 + 32x_2 + 30x_3. \tag{9.2}$$

За своїм економічним змістом змінні x_1, x_2, x_3 можуть приймати лише невід’ємні значення:

$$x_1, x_2, x_3 \ge 0. \tag{9.3}$$

Таким чином, приходимо до наступної математичної задачі: серед всіх невід’ємних рішень (9.3) системи нерівностей (9.2) потрібно знайти таке, при якому функція цілі (9.1) приймає максимальне значення.

Приведення математичної моделі задачі до канонічного виду й одержання вихідного базисного плану.

Перш ніж вирішувати задачу ЛП симплекс-методом, її необхідно привести до канонічної форми.

Для цього перейдемо від обмежень-нерівностей до обмежень-рівностей. Введемо три додаткові змінні x_4, x_5, x_6, у результаті чого обмеження запишуться у вигляді системи рівнянь

$$f = 30x_1 + 32x_2 + 30x_3 + 0\,x_4 + 0\,x_5 + 0x_6 \to \max;$$

$$\begin{cases} 12x_1 + 10x_2 + 9x_3 + x_4 = 220, \\ 15x_1 + 18x_2 + 20x_3 + x_5 = 400, \\ 6x_1 + 4x_2 + 4x_3 + x_6 = 100, \end{cases}$$

$$x_j \ge 0, \quad \left(j = \overline{1,6}\right).$$

Ці додаткові змінні за економічним змістом означають невикористовувану при даному плані виробництва кількість сировини того або іншого виду. Наприклад, x_4 – це невикористовувана кількість сировини I виду.

Розглянута задача відноситься до таких ЗЛП, для яких можна отримати вихідний базисний план.

Для того, щоб це було можливо, виділяють змінні, які присутні тільки в одному рівнянні з коефіцієнтом одиниця й приймають їх у якості базисних. Якщо в обмеженні таку змінну виділити не можна, то вводять штучну базисну змінну. Потім визначається вихідний базисний план і значення цільової функції для цього плану.

У першому обмеженні базисною є додаткова змінна x_4, у другому – додаткова змінна x_5, у третьому – додаткова змінна x_6.

Для одержання вихідного базисного рішення прирівняємо до нуля небазисні змінні: $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ і одержимо значення базисних змінних: $x_4 = 220$, $x_5 = 400$, $x_6 = 100$. Значення цільової функції $f = 0$.

Ітерація 1

Крок 1. Складання вихідної симплексної таблиці.

При виконанні розрахунків вручну обчислення зручно проводити за допомогою спеціальних таблиць, які називаються симплексними таблицями.

Дослідження базисного плану на оптимальність, а також подальший обчислювальний процес зручніше проводити, якщо умова задачі й вихідні дані, отримані після визначення вихідного базисного плану, записати так, як показано в табл. 9.2.

Таблиця 9.2 – Вихідна симплекс-таблиця

Базис	*C*	*B*	30	32	30
			x_1	x_2	x_3
x_4	0	220	12	10^*	9
x_5	0	400	15	18	20
x_6	0	100	6	4	4
	Δ	0	–30	–32	–30

Складемо вихідну симплекс-таблицю таким чином. У стовпці «Базис» записуються базисні змінні, у стовпці «*C*» – коефіцієнти при базисних змінних у цільовій функції (c_i), у стовпці «*B*» – вільні члени обмежень (b_i), тобто значення базисних змінних.

У верхньому рядку записані коефіцієнти при всіх небазисних змінних у ЦФ; рядком нижче записані всі небазисні змінні x_j ($j = \overline{1, n}$).

У стовпцях під x_j ($j = \overline{1, n}$) відображені коефіцієнти при небазисних змінних в обмеженнях (a_{ij}).

Рядок «Δ» у стовпці «*B*» містить значення цільової функції, що розраховується за формулою $f = \sum c_i b_i$, а стовпці x_j цього ж рядка – значення відносних оцінок (Δ_j), що розраховуються за формулою $\Delta_j = \sum c_i a_{ij} - c_j$.

Далі визначимо значення ЦФ і оцінок:

$$f = \sum c_i b_i = c_4 b_4 + c_5 b_5 + c_6 b_6 = 0 \cdot 220 + 0 \cdot 400 + 0 \cdot 100 = 0 \text{ гр.од.}$$

Визначаємо оцінки Δ_j для стовпців x_1, x_2 і x_3 які не входять до базису:

$$\Delta_1 = \sum c_i a_{i1} - c_1 = 0 \cdot 12 + 0 \cdot 15 + 0 \cdot 6 - 30 = -30;$$

$$\Delta_2 = \sum c_i a_{i2} - c_2 = 0 \cdot 10 + 0 \cdot 18 + 0 \cdot 4 - 32 = -32;$$

$$\Delta_3 = \sum c_i a_{i3} - c_3 = 0 \cdot 9 + 0 \cdot 20 + 0 \cdot 4 - 30 = -30.$$

Записуємо знайдені значення оцінок у Δ_j -ий рядок таблиці.

З табл. 9.2 видно, що значення всіх основних x_1, x_2, x_3 дорівнюють нулю, а додаткові змінні приймають свої значення відповідно до обмежень задачі.

Ці значення змінних відповідають такому «плану», при якому нічого не виготовляється, сировина не використовується й значення цільової функції дорівнює нулю (тобто вартість виготовленої продукції відсутня). Цей план, звичайно, не є оптимальним.

Поліпшення плану досягається за рахунок включення в базис змінної, котра входить у множину небазисних, і виключення однієї зі змінних, яка входить в базис.

Крок 2. Перевірка отриманого плану на оптимальність.

Ознаки оптимальності опорного плану ЗЛП для задачі на максимум:

Якщо при деякому опорному плані для всіх змінних x_j $(j = \overline{1, n})$ *виконується умова* $\Delta_j \geq 0$ $(j = \overline{1, n})$, *то даний план є оптимальним.*

У рядку «Δ_j» є три негативні оцінки. Це означає, що даний план не оптимальний і його можна поліпшити.

Негативні числа не тільки свідчать про можливість збільшення загальної вартості виготовленої продукції, але й показують, на скільки збільшується ця сума при введенні в план одиниці того або іншого виду продукції.

Так, число –30 означає, що при включенні в план виробництва однієї одиниці виробу *A* забезпечується збільшення вартості продукції на 30 гр.од. Якщо включити в план виробництва по одній одиниці виробів *B* і *C*, то загальна вартість продукції, що виготовляється, зросте відповідно на 32 і 30 гр.од.

Тому з економічної точки зору доцільним є включення в план виробництва виробів *B*. Це ж необхідно зробити й на підставі формальної ознаки симплексного методу, оскільки максимальне за абсолютною величиною негативне число стоїть в 4-му рядку змінної x_3 (див. крок 3).

Крок 3. Визначення змінної, що вводиться в базис.

У базис вводиться змінна, якій відповідає найбільша за абсолютною величиною негативна оцінка:

max $\{|\Delta_j|\}$ = max {|–30|; |–32|; |–30|} = 32. Це буде змінна x_2, стовпець при цій змінній – *ведучий.* У базис вводиться змінна x_2.

Крок 4. Визначення змінної, що виключається з базису.

Для цього складемо відношення елементів стовпця «*B*» до *позитивних елементів* ведучого стовпця й виберемо мінімум:

$$\min\left(\frac{b_4}{a_{42}} = \frac{220}{10} = 22; \quad \frac{b_5}{a_{52}} = \frac{400}{18} = 22{,}2; \quad \frac{b_6}{a_{62}} = \frac{100}{4} = 25\right) = 22\,.$$

Так як найменша частка (22) відповідає базисній змінній x_4, то ця змінна підлягає заміні змінною x_2. Рядок при базисній змінній x_4 – *ведучий.*

На перетинанні ведучого рядка й ведучого стовпця знаходиться *ведучий елемент* $a_{42} = 10$.

Знайшовши число 220/10 = 22, ми тим самим з економічної точки зору визначили, яку кількість виробів *B* підприємство може виготовляти з урахуванням норм витрат й наявних обсягів сировини кожного виду. Так як сировини одного виду є відповідно 220, 400 і 100 кг, а на один виріб *B* потрібно затратити сировини кожного виду відповідно 10, 18 і 4 кг, то максимальне число виробів *B*, що може бути виготовлено підприємством, дорівнює min (220/10, 400/18, 100/4) = 220/10 = 22, тобто обмежуючим фактором виробництва виробів *B* є наявний обсяг сировини II виду. З урахуванням його наявності підприємство може виготовити 22 од. виробів *B*.

Отже, змінна x_4 підлягає виключенню з базису. Стовпець змінної x_2 – ведучий, перший рядок – ведучий; елемент 10 – ведучий (відзначимо в табл. 9.2 „*”).

Крок 5. Складання симплексної таблиці для другої ітерації.

Для визначення нового базисного плану робимо перерахування елементів таблиці й результати заносимо в нову симплексну таблицю (табл. 9.3).

Обрані змінні в новій симплексній таблиці міняються місцями разом зі своїми коефіцієнтами в цільовій функції, тобто в стовпці "БАЗИС" заміняємо x_4 на x_2, і відповідно в стовпці «*C*» заміняємо $c_4 = 0$ на $c_2 = 32$. Інші змінні переписуються без змін зі своїми коефіцієнтами.

Потім робимо перерахування елементів таблиці й результати заносимо в нову симплексну таблицю.

Проведемо перерахування елементів симплексної таблиці, починаючи із ведучого рядка. Всі елементи цього рядка діляться на ведучий елемент, тобто на 10:

$$b_2 = \frac{b_4}{a_{42}} = \frac{220}{10} = 22; \quad a_{21} = \frac{a_{41}}{a_{42}} = \frac{12}{10} = \frac{6}{5}; \quad a_{23} = \frac{a_{43}}{a_{42}} = \frac{9}{10}.$$

Значення ведучого елемента прийме:

$$a_{24} = \frac{1}{a_{42}} = \frac{1}{10}.$$

Елементи ведучого стовпця приймуть такі значення:

$$a_{54} = -\frac{a_{52}}{a_{42}} = -\frac{18}{10} = -\frac{9}{5}; \quad a_{64} = -\frac{a_{62}}{a_{42}} = -\frac{4}{10} = -\frac{2}{5}; \quad \Delta_4 = -\frac{\Delta_2}{a_{42}} = -\frac{(-32)}{10} = \frac{16}{5}.$$

Таблиця 9.3 – Симплекс-таблиця на ітерації 1

Базис	*C*	*B*	30	0	0
			x_1	x_4	x_3
x_2	32	22	6/5	1/10	9/10
x_5	0	4	33/5	–9/5	19/5*
x_6	0	12	6/5	–2/5	2/5
	Δ	704	42/5	16/5	–6/5

Далі обчислимо інші елементи нової симплекс-таблиці за *правилом прямокутника.*

Для того, щоб застосувати правило прямокутника, у симплексній таблиці потрібно намітити чотири числа:

- перелічуваний елемент;

- ведучий елемент;

- елемент, що знаходиться на перетинанні ведучого рядка й стовпця з перелічуваним елементом;

- елемент, що знаходиться на перетинанні ведучого стовпця й рядка з перелічуваним елементом.

Намічені чотири елементи утворюють прямокутник.

Назвемо діагональ, що з'єднує ведучий і перераховуваний елемент головною, а іншу – допоміжною.

Правило прямокутника полягає в наступному:

(нове значення) = (старе значення) –
(добуток елементів допоміжної діагоналі/ведучий елемент)

При обчисленні за правилом прямокутника всі дані беруться з таблиці попередньої ітерації (у нашому прикладі табл. 9.2).

Проведемо розрахунок елементів рядка, що відповідає базисній змінній x_5:

$$b_5' = b_5 - \frac{b_4 \cdot a_{52}}{a_{42}} = 400 - \frac{220 \cdot 18}{10} = 4;$$

$$a_{51}' = a_{51} - \frac{a_{41} \cdot a_{52}}{a_{42}} = 15 - \frac{12 \cdot 18}{10} = -\frac{33}{5};$$

$$a_{53}' = a_{53} - \frac{a_{43} \cdot a_{52}}{a_{42}} = 20 - \frac{9 \cdot 18}{10} = \frac{19}{5}.$$

Проведемо розрахунок елементів рядка, що відповідає базисній змінній x_6:

$$b_6' = b_6 - \frac{b_4 \cdot a_{62}}{a_{42}} = 100 - \frac{220 \cdot 4}{10} = 12;$$

$$a_{61}' = a_{61} - \frac{a_{41} \cdot a_{62}}{a_{42}} = 6 - \frac{12 \cdot 4}{10} = \frac{6}{5};$$

$$a_{63}' = a_{63} - \frac{a_{43} \cdot a_{62}}{a_{42}} = 4 - \frac{9 \cdot 4}{10} = \frac{2}{5}.$$

Проведемо розрахунок елементів рядка, що відповідає цільовій функції й відносних оцінок Δ_j:

$$f' = f - \frac{b_4 \cdot \Delta_2}{a_{42}} = 0 - \frac{220 \cdot (-32)}{10} = 704;$$

$$\Delta_1' = \Delta_1 - \frac{a_{41} \cdot \Delta_2}{a_{42}} = -30 - \frac{12 \cdot (-32)}{10} = \frac{42}{5};$$

$$\Delta_3' = \Delta_3 - \frac{a_{43} \cdot \Delta_2}{a_{42}} = -30 - \frac{9 \cdot (-32)}{10} = -\frac{6}{5}.$$

Крок 6. Перевірка правильності розрахунків цільової функції й оцінок.

Перевіряємо правильність розрахунку значень цільової функції f і оцінок Δ_j за формулами, наведеними у кроці 1.

Визначимо значення цільової функції для першої ітерації (табл. 9.3).

$$f = \sum c_i b_i = c_2 b_2 + c_5 b_5 + c_6 b_6 = 32 \cdot 22 + 0 \cdot 4 + 0 \cdot 12 = 704 \text{ гр.од.}$$

Визначимо значення відносних оцінок для першої ітерації.

$$\Delta_1 = \sum c_i a_{i1} - c_1 = (32 \cdot 6/5 + 0 \cdot 33/5 + 0 \cdot 6/5) – 30 = 42/5;$$

$$\Delta_4 = \sum c_i a_{i4} - c_4 = (32 \cdot 1/10 + 0 \cdot (–9/5) + 0 \cdot (–2/5)) – 0 = 16/5;$$

$$\Delta_3 = \sum c_i a_{i3} - c_3 = (32 \cdot 9/10 + 0 \cdot 19/5 + 0 \cdot 2/5) – 30 = – 6/5.$$

По закінченні розрахунку всіх елементів табл. 9.3 отримано новий базисний план. Як видно із цієї таблиці, новим опорним планом задачі є план:

небазисні змінні $x_1 = x_4 = x_3 = 0$;

значення базисних змінних $x_2 = 22$, $x_5 = 4$, $x_6 = 12$;

значення цільової функції $f = 704$.

При даному плані виробництва виготовляється 22 од. виробу *B* і залишаються невикористаними 4 кг сировини ІІ виду та 12 кг сировини ІІІ виду.

Вартість всієї виготовленої при цьому плані продукції дорівнює 704 гр. од.

Переходимо до кроку 2 (Ітерація 2).

Ітерація 2

З викладеного економічного змісту даних виходить, що знайдений на другій ітерації план задачі не є оптимальним. Це видно і з 4-го рядка, оскільки в стовпці небазисної змінної x_3 присутнє негативне число –6/5 . Значить у базис варто ввести змінну x_3, тобто в новому плані варто передбачити випуск виробів *C*.

Процес знаходження нового базисного плану продемонстрований у табл. 9.4.

Таблиця 9.4 – Симплекс-таблиця на ітерації 2

Базис	*C*	*B*	30	0	0
			x_1	x_4	x_5
x_2	32	400/19	– 69/190	10/19	– 9/38
x_3	30	20/19	33/19	– 9/19	5/19
x_6	0	220/19	48/95	–4/19	– 2/19
	Δ	13400/19	996/95	50/19	6/19

Після заповнення таблиці другої ітерації перевіримо, чи є даний план оптимальним.

Переглядаємо рядок Δ_j. У цьому рядку немає негативних оцінок. Це означає, що знайдений опорний план є оптимальним.

Як видно із табл. 9.4, новим опорним планом задачі є план:

небазисні змінні $x_1 = x_4 = x_5 = 0$;

значення базисних змінних $x_2 = 400/19$, $x_3 = 20/19$, $x_6 = 220/19$.

Значення цільової функції $f = 13400/19$.

Отже, план випуску продукції, що включає виготовлення $400/19 \approx$ $\approx 21{,}05$ од. виробів *B* і $20/19 \approx 1{,}05$ од. виробів *C*, є оптимальним.

При даному плані випуску виробів повністю використовується сировина I і II видів і залишається невикористаним $220/19 \approx 11{,}58$ кг сировини III виду, а максимальна вартість виготовленої продукції дорівнює 705,26 гр. од.

Оптимальним планом виробництва продукції не передбачається виготовлення виробів *A*. Введення в план випуску продукції виробів виду *A* привело б до зменшення загальної вартості. Це видно з $\Delta_1 = 996/95 \approx 10{,}48$, де число 10,48 показує, що при даному плані включення в нього випуску одиниці виробу *A* приводить лише до зменшення загальної величини вартості на 10,48 гр. од.

Правила контролю обчислень у симплекс-методі.

1. Алгоритм симплекс-методу побудований таким чином, що в стовпці «*B*» ніколи не можуть з'явитися негативні елементи. Якщо в результаті розрахунків у стовпці «*B*» з'явиться негативний елемент, то це може означати, що:

- при обчисленні цього елемента допущена арифметична помилка;
- невірно обраний ведучий рядок – не по мінімуму відносин; у дійсності мінімум відносин у тім рядку, де з'явився мінус.

2. Значення ЦФ від ітерації до ітерації повинно поліпшуватися (збільшуватися в задачі на максимум, зменшуватися в задачі на мінімум). Воно може залишитися без зміни в тому випадку, коли план вироджений (у стовпці «*B*» є нулі).

9.2.2 Визначення оптимального плану розвитку міської телефонної мережі

Змістовна постановка задачі.

На території міста є m станцій $А_1$, $А_2$, ..., $А_n$ вільною ємністю a_1, a_2, ..., a_m номерів. У місті також є n районів нової забудови $В_1$, $В_2$, ..., $В_n$, потреби яких у телефонах становлять відповідно b_1, b_2, ..., b_n номерів.

Потрібно вибрати варіант розподілу вільних ємностей телефонних станцій між районами, що забезпечував би мінімальні витрати як на будівництво так і на експлуатацію лінійних споруд міської телефонної мережі.

Різні варіанти розподілу ємностей станцій між районами міста будуть відрізнятися загальною довжиною абонентських ліній між станціями й районами міста, яку позначимо через L. Природно, що варіантом, який забезпечує мінімум зазначених в умові задачі витрат, буде, за інших рівних умов, такий розподіл ємностей, при якому L буде мінімальна.

Подальший розгляд задачі проведемо для наступних вихідних даних:

- кількість станцій $m = 3$, їхні вільні ємності відповідно становлять 3000, 4000 і 5000 номерів;
- кількість районів $n = 4$, їхні потреби в номерах відповідно

становлять 1000, 1500, 2500 і 3000 номерів;

- середні відстані від станцій до районів задані в табл. 9.5.

Як виходить з розгляду вихідних даних задачі, сумарна потреба всіх районів становить 7000 номерів, а загальна вільна ємність станцій становить 12000 номерів.

Задача *незбалансована*, тому що сумарна ємність станцій, що може бути використана на розвиток, перевищує сумарну потребу районів у номерах на 4000 номерів.

Для приведення задачі до збалансованого виду введемо 5-й (фіктивний) район з потребою в номерах, рівною зазначеній різниці:

$$B_5 = \sum_{i=1}^{3} A_i - \sum_{j=1}^{4} B_j = 12000 - 8000 = 4000 \text{ номерів.}$$

Середні відстані від станцій до фіктивного району приймемо рівними нулю, тому що лінії прокладатися не будуть.

Складання математичної моделі задачі.

Дана задача представлена на рис. 9.1 у вигляді мережі з m вихідними пунктами (станціями) і n пунктами призначення (районами).

Через x_{ij} позначимо число номерів, наданих i-ою станцією j-му району, а через c_{ij} – середню відстань між i-ою станцією та j-им районом.

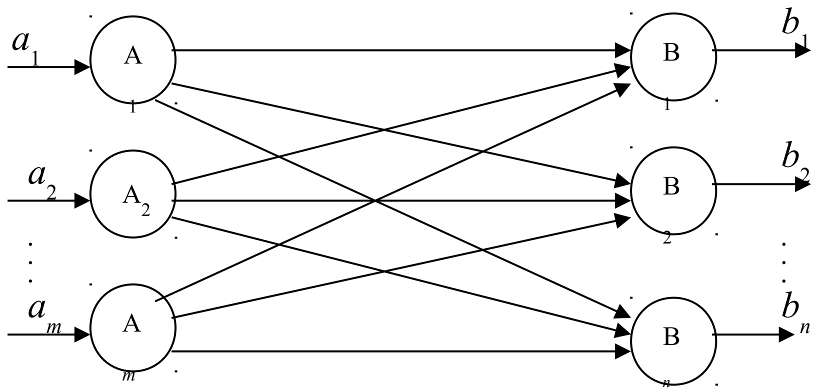

Рисунок 9.1 – Мережа зв'язку з вихідними пунктами (станціями) і пунктами призначення (районами)

Оптимізаційні математичні моделі містять систему обмежень (умов) і цільову функцію.

У задачі потрібно знайти варіант розподілу ємностей станцій між районами, що забезпечує мінімальне значення L.

Вираз для визначення L буде мати вигляд:

$$L = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} ,$$

що являє собою цільову функцію моделі.

Обмежуючі умови задачі запишемо, припускаючи *рівність* суми вільних ємностей станцій і сумарної потреби районів у номерах.

Система обмежень буде містити дві групи обмежень. Перша група обмежуючих умов, кількість яких дорівнює m (кількість станцій) відображає той факт, що вся вільна ємність кожної станції повинна бути використана. Друга група обмежень, кількість яких дорівнює n (кількість районів), відображає ту обставину, що потреба кожного району в номерах повинна бути повністю задоволена. Модель необхідно також доповнити умовами невід'ємності змінних.

З врахуванням всіх зроблених зауважень, математичну модель задачі представимо у вигляді:

$$L = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij};$$

$$\begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{n} x_{ij} = A_i, & \left(i = \overline{1,m}\right); \\ \sum\limits_{i=1}^{m} x_{ij} = B_j, & \left(j = \overline{1,n}\right); \\ x_{ij} \geq 0, \left(i = \overline{1,m};\ j = \overline{1,n}\right). \end{cases}$$

Переходимо до побудови математичної моделі задачі стосовно до вихідних даних.

Запишемо спочатку обмежуючі умови для станцій. Ця група обмежень, кількість яких дорівнює 3, відображає той факт, що вся вільна ємність кожної станції повинна бути повністю використана:

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} = 3000, \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} + x_{25} = 4000, \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} + x_{35} = 5000. \end{cases}$$

Друга група обмежень, кількість яких дорівнює 5, відображає той факт, що потреба кожного району в номерах повинна бути повністю задоволена:

$$\begin{cases} x_{11} + x_{21} + x_{31} = 1000, \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} = 1500, \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} = 2500, \\ x_{14} + x_{24} + x_{34} = 3000, \\ x_{15} + x_{25} + x_{35} = 4000. \end{cases}$$

Загальна довжина абонентських ліній між станціями й районами буде дорівнювати:

$$\begin{gathered} L = c_{11}x_{11} + c_{12}x_{12} + c_{13}x_{13} + c_{14}x_{14} + c_{15}x_{15} + \\ + c_{21}x_{21} + c_{22}x_{22} + c_{23}x_{23} + c_{24}x_{24} + c_{25}x_{25} + \\ + c_{31}x_{31} + c_{32}x_{32} + c_{33}x_{33} + c_{34}x_{34} + c_{35}x_{35} \rightarrow \min. \end{gathered}$$

Останній вираз являє собою цільову функцію, що мінімізує довжину абонентських ліній між станціями й районами міста.

Математичну модель варто доповнити умовою невід'ємності змінних:

$$x_{ij} \geq 0,\ \left(i = \overline{1,3};\quad j = \overline{1,5}\right).$$

Для розв'язання розподільної задачі розроблені методи, що дозволяють знайти опорний і оптимальний плани як ручним способом, так і з застосуванням ЕОМ.

Рішення розподільної задачі включає два етапи:

- визначення опорного плану;
- визначення оптимального плану.

При проведенні розрахунків вручну використовуються таблиці встановленої форми й змісту, в які заносяться вихідні дані задачі і за допомогою яких знаходимо рішення задачі (табл. 9.5). Центральна частина (крім рядків і стовпців зовнішньої частини таблиці) містить кількість рядків і стовпців, що дорівнюють кількості станцій і районів відповідно. У виділених верхніх правих кутах кліток таблиці вказуються середні довжини абонентських ліній між станціями та районами.

Таблиця 9.5 – Вихідні дані транспортної задачі

Райони Станції	B_1	B_2	B_3	B_4	B^{ϕ}_5	a_i
A_1	8 x_{11}	7 x_{12}	6 x_{13}	10 x_{14}	0 x_{15}	3000
A_2	6 x_{21}	15 x_{22}	11 x_{23}	6 x_{24}	0 x_{25}	4000
A_3	4 x_{31}	7 x_{32}	10 x_{33}	10 x_{34}	0 x_{35}	5000
b_j	1000	1500	2500	3000	4000	12000

Визначення опорного плану.

Визначення оптимального плану розподільної задачі починають зі знаходження якого-небудь її опорного плану. Цей план може бути знайдений одним з наступних методів:

- методом північно-західного кута (діагональний метод);
- методом мінімального елемента;
- методом апроксимації Фогеля.

Методика складання опорного плану цими методами розглянута у п. 7.4.

У нашому прикладі складемо опорний план методом північно-західного кута (див. табл. 9.6). З метою скорочення записів, у цій і наступній таблицях, значення ємностей приводяться в сотнях номерів.

Одержаний в табл. 9.6 опорний план необхідно перевірити на виродженість. План не вироджений так як кількість заповнених кліток дорівнює $m + n - 1 = 3 + 5 - 1 = 7$.

Таблиця 9.6 – Опорний план, складений методом північно-західного кута

u_i \ v_j	$v_1 = 8$	$v_2 = 7$	$v_3 = 6$	$v_4 = 1$	$v_5 = -9$	a_i
$u_1 = 0$	8 – **10**	7 **15**	6 + **5**	10	0	30
$u_2 = 5$	6	15	11 – **20**	6 + **20**	0	40
$u_3 = 9$	4 + *	7	10	10 – **10**	0 **40**	50
b_j	10	15	25	30	40	120

Визначимо загальну довжину абонентських ліній за даним варіантом. Для цього для кожної x_{ij}-ої заповненої клітки знайдемо добуток $c_{ij}x_{ij}$ і результати складемо:

$$L = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{5} c_{ij}x_{ij} = c_{11}x_{11} + c_{12}x_{12} + c_{13}x_{13} + c_{23}x_{23} + c_{24}x_{24} + c_{34}x_{34} + c_{35}x_{35} =$$

$$= 8 \cdot 10 + 7 \cdot 15 + 6 \cdot 5 + 11 \cdot 20 + 6 \cdot 20 + 10 \cdot 10 + 0 \cdot 40 = 66500 \text{ км}.$$

(в останньому результаті враховано, що ємність приводилася в сотнях номерів).

Визначення оптимального плану.

Для визначення оптимального плану розподільної задачі розроблено кілька методів. Одним з найбільш часто використовуваних методів є *метод потенціалів,* за допомогою якого знайдений опорний план (наприклад, методом північно-західного кута) послідовно поліпшується до одержання оптимального плану. Оптимальне рішення знаходять шляхом здійснення ряду повторюваних обчислювальних процедур і ітерацій. Основна особливість ітераційної процедури полягає в тому, що на кожному кроці виходить рішення більш близьке до оптимального, ніж попереднє рішення. Метод потенціалів забезпечує монотонне убування значення цільової функції й дозволяє за кінцеве число ітерацій знайти її мінімум. Розглянемо алгоритм методу потенціалів.

Ітерація 1

Крок 1. Визначення потенціалів.

Потенціалами називаються числа, приписані відповідно до кожного рядка й кожного стовпця. Потенціал, що визначається для кожного рядка, позначимо u_i ($i = \overline{1,3}$), а потенціал для кожного стовпця v_j ($j = \overline{1,5}$).

Для кожної заповненої клітки, тобто для кожної базисної змінної, будується співвідношення:

$$u_i + v_j = c_{ij}.$$

Отримана система повинна містити $m + n - 1$ рівнянь (тому що кількість базисних змінних дорівнює $m + n - 1$) із $m + n$ невідомими. Як відомо, така система має множину рішень і кожна з них буде містити шукані потенціали. Щоб знайти одне з рішень, значення одного потенціалу в системі задається довільно. Звичайно приймають $u_1 = 0$ і знаходять значення інших потенціалів.

Запишемо співвідношення й визначимо потенціали:

x_{11}: $u_1 + v_1 = 8$, $u_1 = 0$, $v_1 = 8$,
x_{12}: $u_1 + v_2 = 7$, $u_2 = 5$, $v_2 = 7$,
x_{13}: $u_1 + v_3 = 6$, $u_3 = 9$, $v_3 = 6$,
x_{23}: $u_2 + v_3 = 11$, $v_4 = 1$,
x_{24}: $u_2 + v_4 = 6$, $v_5 = -9$.
x_{34}: $u_3 + v_4 = 10$,
x_{35}: $u_3 + v_5 = 0$,

Значення потенціалів заносимо в табл. 9.6.

Крок 2. Визначення оцінок.

Для кожної незаповненої клітки, тобто для кожної небазисної змінної, розраховується величина оцінки за формулою: $\bar{c}_{ij} = u_i + v_j - c_{ij}$.

Розрахуємо величини оцінок

$x_{14} \Rightarrow \bar{c}_{14} = u_1 + v_4 - c_{14} = 0 + 1 - 10 = -9$,
$x_{15} \Rightarrow \bar{c}_{15} = u_1 + v_5 - c_{15} = 0 - 9 - 0 = -9$,
$x_{21} \Rightarrow \bar{c}_{21} = u_2 + v_1 - c_{21} = 5 + 8 - 6 = 7$,
$x_{22} \Rightarrow \bar{c}_{22} = u_2 + v_2 - c_{22} = 5 + 7 - 15 = -3$,
$x_{25} \Rightarrow \bar{c}_{25} = u_2 + v_5 - c_{25} = 5 - 9 - 0 = -4$,
$x_{31} \Rightarrow \bar{c}_{31} = u_3 + v_1 - c_{31} = 9 + 8 - 4 = \mathbf{13}$**,**
$x_{32} \Rightarrow \bar{c}_{32} = u_3 + v_2 - c_{32} = 9 + 7 - 7 = 9$,
$x_{33} \Rightarrow \bar{c}_{33} = u_3 + v_3 - c_{33} = 9 + 6 - 10 = 5$.

Крок 3. Перевіряємо отриманий план на оптимальність.

Якщо для кожної незаповненої клітки виконується умова $\bar{c}_{ij} \le 0$, то план є оптимальним. У противному випадку план не оптимальний і необхідно переходити до нового базисного плану.

Крок 4. Визначення змінної, що вводиться в базис.

Розглядаємо всі вільні клітки, для яких $\bar{c}_{ij} > 0$, і серед оцінок вибираємо ту, яка має максимальне значення. Змінна, що відповідає цій клітці, вводиться в базис. У нашому випадку це змінна x_{31}. Якщо максимальні однакові оцінки мають дві й більше кліток, то обирається перша за порядком. Обрана клітка позначається в табл. 9.6 „*”.

***Крок 5. Побудова циклу*.**

Для правильного розподілу вільної ємності станцій будується цикл. Правила побудови циклу розглянуті у п. 7.5 (крок 4).

Крок 6. Визначення змінної, що виводиться із базису.

При правильній побудові опорного плану для будь-якої вільної клітки можна побудувати лише один цикл. Після того як для обраної вільної клітки він побудований, варто перейти до нового базисного плану. Для цього необхідно змінити значення базисних змінних у межах кліток, пов'язаних з обраною кліткою. Ці значення змінних знаходяться за наступними правилами:

1) в кожній клітці циклу, починаючи із клітки, що відповідає змінній, яка вводиться у базис (x_{31}), проставляються по черзі знаки «+» і «–» (будемо називати ці клітки плюсовими і мінусовими);

2) у клітках зі знаком „мінус” обирають мінімальну величину. У нашому прикладі ця величина 10. Змінні, що входять до циклу, коригуються на цю величину в залежності від знаків „+” та „–”, що стоять у клітках циклу (це число додають до відповідних чисел, що знаходяться у плюсових клітках, і віднімають від чисел, що знаходяться у мінусових клітках);

3) обрана клітка стає зайнятою, а мінусова клітка, у якій було мінімальне із чисел x_{ij} вважається вільною. Змінна, що відповідає цій клітці виводиться з базису. У нашім випадку це змінна x_{11}. При цьому, якщо в мінусових клітках є два або більше однакових мінімальних числа x_{ij}, то звільняють лише одну з таких кліток, а інші залишають зайнятими (з нульовими значеннями базисних змінних).

Значення змінних, включених у цикл, після описаного коригування переносяться в нову таблицю. Значення змінних, які не входять до циклу, переносяться у новий базисний план без змін. Новий базисний план відображено у табл. 9.7.

Таблиця 9.7 – Опорний план на ітерації 1

v_j / u_i	$v_1 = -5$	$v_2 = 7$	$v_3 = 6$	$v_4 = 1$	$v_5 = -9$	a_i
$u_1 = 0$	8	7 – **15**	6 + **15**	10	0	30
$u_2 = 5$	6	15	11 – **10**	6 + **30**	0	20
$u_3 = 9$	4 **10**	7 + *	10	10 – **0**	0 **40**	50
b_j	10	15	25	30	40	100

Одержаний в табл. 9.7 новий базисний план перш за все необхідно перевірити на виродженість. План не вироджений, так як кількість заповнених кліток дорівнює $m + n - 1 = 3 + 5 - 1 = 7$.

Значення базисних змінних:

$x_{12} = 15$, $x_{13} = 15$, $x_{23} = 10$, $x_{24} = 30$, $x_{31} = 10$, $x_{34} = 0$, $x_{35} = 40$.

Загальна довжина абонентських ліній за даним варіантом:

$$L = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{5} c_{ij}x_{ij} = c_{12}x_{12} + c_{13}x_{13} + c_{23}x_{23} + c_{24}x_{24} + c_{31}x_{31} + c_{34}x_{34} + c_{35}x_{35} =$$

$$= 7 \cdot 15 + 6 \cdot 15 + 11 \cdot 10 + 6 \cdot 30 + 4 \cdot 10 + 10 \cdot 0 + 0 \cdot 40 = 58500 \text{ км.}$$

Крок 7. Перехід до кроку 1 наступної ітерації

Процес одержання оптимального плану ілюструється табл. 9.7 – 9.9 і немає потреби в подальших поясненнях. На кожній ітерації визначається значення цільової функції і монотонне її убування свідчить про правильність виконання розрахунків.

Таблиця 9.8 – Опорний план на ітерації 2

u_i \ v_j	$v_1 = 4$	$v_2 = 7$	$v_3 = 6$	$v_4 = 1$	$v_5 = 0$	a_i
$u_1 = 0$	8	7 – **15**	6 + **15**	10	0	30
$u_2 = 5$	6	15	11 – **10**	6 **30**	0 + *	40
$u_3 = 0$	4 **10**	7 + **0**	10	10	0 – **40**	50
b_j	10	15	25	30	40	100

Одержаний в табл. 9.8 базисний план не вироджений.

Значення базисних змінних:

$x_{12} = 15$, $x_{13} = 15$, $x_{23} = 10$, $x_{24} = 30$, $x_{31} = 10$, $x_{32} = 0$, $x_{35} = 40$.

Загальна довжина абонентських ліній за даним варіантом:

$$L = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{5} c_{ij}x_{ij} = c_{12}x_{12} + c_{13}x_{13} + c_{23}x_{23} + c_{24}x_{24} + c_{31}x_{31} + c_{34}x_{34} + c_{35}x_{35} =$$

$$= 7 \cdot 15 + 6 \cdot 15 + 11 \cdot 10 + 6 \cdot 30 + 4 \cdot 10 + 7 \cdot 0 + 0 \cdot 40 = 58500 \text{ км}.$$

Таблиця 9.9 – Оптимальний план

u_i \ v_j	$v_1 = 4$	$v_2 = 7$	$v_3 = 6$	$v_4 = 6$	$v_5 = 0$	a_i
$u_1 = 0$	8	7 **5**	6 **25**	10	0	30
$u_2 = 0$	6	15	11	6 **30**	0 **10**	40
$u_3 = 0$	4 **10**	7 **10**	10	10	0 **30**	50
b_j	10	15	25	30	40	100

Значення базисних змінних в оптимальному плані (табл. 9.9):

$x_{12} = 5$, $x_{13} = 25$, $x_{24} = 30$, $x_{25} = 10$, $x_{31} = 10$, $x_{32} = 10$, $x_{35} = 20$.

Загальна довжина абонентських ліній за даним варіантом:

$$L = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{5} c_{ij}x_{ij} = c_{12}x_{12} + c_{13}x_{13} + c_{24}x_{24} + c_{25}x_{25} + c_{31}x_{31} + c_{32}x_{32} + c_{35}x_{35} =$$

$$= 7 \cdot 5 + 6 \cdot 25 + 6 \cdot 30 + 0 \cdot 10 + 4 \cdot 10 + 7 \cdot 10 + 0 \cdot 30 = 57500 \text{ км}.$$

На цьому розгляд рішення задачі закінчується. Слід зазначити, що при заданих умовах не існує іншого варіанта розподілу ємностей станцій між районами, при якому загальна довжина абонентських ліній була б меншою і, отже, витрати на їхню прокладку будуть мінімальними.

Одержані результати задачі можна інтерпретувати таким чином:

- першому району надає 1000 номерів третя станція;
- другому району надає 500 номерів перша станція та 1000 номерів третя станція;
- третій район одержить 2500 номерів від першої станції;
- четвертий район одержить 3000 номерів від другої станції.

Таким чином, вся потреба районів у номерах задоволена, повністю розподілена вільна ємність першої станції, залишаються нерозподіленими 1000 номерів на другій станції та 3000 номерів на третій станції.

Додаток 1. – Вихідні дані до задач №9.1 і №9.2

№ варіанту	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{31}	a_{32}	a_{33}	b_1	b_2	b_3	c_1	c_2	c_3
1	8	20	14	16	10	13	12	9	21	360	250	350	16	14	13
2	9	10	21	14	13	20	14	15	10	400	270	360	17	16	8
3	10	11	16	10	12	19	15	13	9	380	280	370	20	9	14
4	11	12	10	11	15	17	16	14	7	360	280	380	15	10	17
5	12	13	11	12	13	10	17	12	8	510	420	390	5	13	16
6	13	14	12	13	9	12	19	10	12	490	410	400	7	11	12
7	14	15	13	14	11	7	20	17	13	470	400	430	9	12	13
8	11	16	14	16	10	9	18	15	10	450	390	420	11	13	14
9	10	17	15	18	9	17	16	13	11	430	370	410	13	14	11
10	2	18	16	20	7	17	14	11	16	410	350	390	15	15	8
11	7	19	17	19	8	16	12	10	11	390	330	400	17	16	9
12	8	20	18	18	9	15	9	12	19	370	310	340	19	17	10
13	9	21	19	17	10	9	11	13	9	350	200	350	21	18	11
14	10	18	16	16	13	18	13	14	8	330	210	360	20	19	13
15	11	17	19	15	14	6	15	18	7	310	230	370	19	20	15
16	12	8	20	14	16	7	17	19	9	320	250	356	18	8	17
17	13	14	8	13	20	9	19	17	11	340	270	290	17	9	19
18	14	9	16	12	22	8	10	15	8	360	290	260	16	10	6
19	15	10	20	11	21	14	12	13	9	380	290	330	15	12	7
20	16	12	19	10	20	11	14	11	15	400	300	320	14	14	8
21	17	13	18	9	19	12	16	10	16	420	320	310	13	16	9
22	18	14	17	8	18	15	18	9	14	440	340	300	12	18	16
23	19	15	16	7	17	15	22	8	12	460	360	290	11	21	15
24	18	17	15	6	16	14	9	16	13	480	380	280	10	20	14
25	21	16	14	5	15	13	12	14	9	500	400	270	9	19	13
26	22	9	10	4	14	12	11	12	17	520	420	260	8	18	12
27	14	20	7	21	9	16	19	17	15	280	410	380	14	12	9
28	20	17	8	20	8	15	18	9	12	290	420	390	13	11	10
29	19	24	9	19	7	14	17	10	8	300	400	400	9	14	12
30	18	23	10	18	19	13	16	13	10	310	410	410	10	9	8
31	17	22	22	17	20	12	15	15	7	320	300	420	11	7	9
32	16	21	14	16	21	7	14	13	12	330	290	430	11	13	5
33	15	20	17	15	22	8	13	11	14	340	260	440	8	12	8
34	14	15	22	14	23	9	12	13	11	350	270	430	7	11	12
35	13	14	20	7	24	15	9	19	8	360	280	420	9	14	13
36	12	13	16	8	23	17	10	14	13	370	290	410	5	10	9
37	11	12	17	9	22	19	11	8	19	380	300	400	6	13	8
38	10	11	18	10	21	16	12	9	11	390	360	390	10	12	7
39	9	10	19	11	20	14	13	11	7	400	370	380	9	11	12
40	8	9	21	12	19	11	14	13	12	410	230	370	5	10	15
41	7	6	23	13	18	10	16	15	9	420	220	360	6	9	14
42	6	7	22	14	17	9	15	14	13	430	270	260	7	9	12
43	23	8	16	15	16	8	14	9	15	440	400	270	14	8	11
44	21	9	15	16	15	21	13	8	11	450	390	280	13	6	13
45	19	10	14	17	14	20	12	10	7	460	370	290	12	7	12
46	17	18	10	18	13	16	11	13	15	470	350	400	11	12	9
47	15	18	7	19	12	17	10	12	16	480	360	410	10	6	8
48	13	17	8	22	11	16	9	10	13	490	340	420	9	12	5
49	11	17	9	21	10	15	8	9	14	500	320	430	8	7	11
50	9	16	12	20	9	14	7	10	12	510	260	440	7	14	10

№ варіанту	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{31}	a_{32}	a_{33}	b_1	b_2	b_3 |c,	c_1	c_2	c_3
51	8	20	14	16	10	13	12	9	21	260	350	150	15	11	10
52	9	10	21	14	13	20	14	15	10	300	370	360	15	16	9
53	10	11	16	10	12	19	15	13	9	280	280	270	10	19	12
54	11	12	10	11	15	17	16	14	7	160	180	280	13	131	16
55	12	13	11	12	13	10	17	12	8	40	420	40	6	13	16
56	13	14	12	13	9	12	19	10	12	300	410	45	8	11	12
57	14	15	13	14	11	7	20	17	13	30	30	300	9	12	13
58	11	16	14	16	10	9	18	15	10	200	290	320	12	14	14
59	10	17	15	18	9	17	16	13	11	530	560	410	12	16	12
60	2	18	16	20	7	17	14	11	16	210	250	290	18	16	8
61	7	19	17	19	8	16	12	10	11	490	430	400	14	16	9
62	8	20	18	18	9	15	9	12	19	380	320	340	22	14	10
63	9	21	19	17	10	9	11	13	9	360	200	340	20	18	10
64	10	18	16	16	13	18	13	14	8	340	240	360	18	16	12
65	11	17	19	15	14	6	15	18	7	320	240	380	18	20	14
66	12	8	20	14	16	7	17	19	9	220	250	350	12	8	14
67	13	14	8	13	20	9	19	17	11	440	480	280	16	8	18
68	14	9	16	12	22	8	10	15	8	360	260	160	16	10	6
69	15	10	20	11	21	14	12	13	9	340	190	430	15	12	6
70	16	12	19	10	20	11	14	11	15	420	320	220	14	14	8
71	17	13	18	9	19	12	16	10	16	220	320	210	13	16	9
72	18	14	17	8	18	15	18	9	14	440	340	400	12	16	18
73	19	15	16	7	17	15	22	8	12	360	380	260	12	26	16
74	18	17	15	6	16	14	9	16	13	480	380	280	12	20	18
75	21	16	14	5	15	13	12	14	9	500	400	300	6	18	14
76	22	9	10	4	14	12	11	12	17	520	420	320	8	18	12
77	14	20	7	21	9	16	19	17	15	380	410	370	10	12	9
78	20	17	8	20	8	15	18	9	12	390	420	380	14	16	10
79	19	24	9	19	7	14	17	10	8	300	400	500	10	14	12
80	18	23	10	18	19	13	16	13	10	320	420	420	12	10	8
81	17	22	22	17	20	12	15	15	7	310	200	420	12	6	8
82	16	21	14	16	21	7	14	13	12	340	260	450	15	11	6
83	15	20	17	15	22	8	13	11	14	240	260	240	8	12	8
84	14	15	22	14	23	9	12	13	11	360	280	480	8	18	12
85	13	14	20	7	24	15	9	19	8	160	180	120	6	14	12
86	12	13	16	8	23	17	10	14	13	420	480	410	5	10	9
87	11	12	17	9	22	19	11	8	19	280	200	220	6	12	8
88	10	11	18	10	21	16	12	9	11	380	380	380	10	12	8
89	9	10	19	11	20	14	13	11	7	400	440	360	6	16	12
90	8	9	21	12	19	11	14	13	12	420	240	380	5	10	15
91	7	6	23	13	18	10	16	15	9	320	320	360	6	6	14
92	6	7	22	14	17	9	15	14	13	420	220	260	8	9	12
93	23	8	16	15	16	8	14	9	15	460	440	220	14	8	10
94	21	9	15	16	15	21	13	8	11	440	380	280	12	6	12
95	19	10	14	17	14	20	12	10	7	460	470	490	12	8	10
96	17	18	10	18	13	16	11	13	15	460	360	400	10	12	10
97	15	18	7	19	12	17	10	12	16	280	260	240	10	6	8
98	13	17	8	22	11	16	9	11	13	460	440	420	9	12	8
99	11	17	9	21	10	15	8	9	14	500	400	300	8	10	12
100	8	16	12	20	9	14	7	10	12	410	460	440	6	14	10

Продовження

Додаток 2. – Вихідні дані до задачі №9.3

№ варіанту	**A_1**	**A_2**	**Аз**	**B_1**	**B_2**	**B_3**	**B_4**
1	30	40	30	25	15	25	25
2	30	42	28	15	31	33	17
3	25	45	30	27	33	15	18
4	33	30	37	17	27	25	17
5	40	40	20	23	19	32	18
6	27	33	40	21	31	16	21
7	22	43	35	13	18	40	19
8	31	37	32	16	27	17	29
9	29	39	32	22	29	19	23
10	27	37	36	14	31	27	25
11	21	39	40	21	22	28	20
12	25	35	40	15	31	33	17
13	28	38	34	20	19	30	20
14	33	33	34	17	27	25	17
15	19	21	60	23	19	32	18
16	43	37	20	25	35	19	13
17	35	27	38	13	18	40	19
18	24	41	35	21	23	27	20
19	31	37	32	21	23	27	20
20	22	43	35	16	27	17	29
21	42	27	31	22	29	19	23
22	27	33	40	14	31	27	25
23	42	27	31	21	22	28	20
24	43	37	20	14	31	27	25
25	35	27	38	16	27	17	29
26	23	47	30	16	27	17	29
27	42	27	31	27	33	15	18
28	23	47	30	21	23	27	20
29	30	42	28	20	J9	30	20
30	25	45	30	17	27	25	17
31	33	30	37	23	19	32	18
32	40	40	20	21	31	16	21
33	26	24	50	13	18	40	19
34	27	33	40	21	23	27	20
35	40	36	24	16	27	17	29
36	32	33	35	22	29	19	23
37	31	37	32	14	31	27	25
38	29	39	32	21	22	28	20
39	27	37	36	15	31	33	17
40	25	50	25	25	35	19	13
41	21	39	40	27	33	15	18
42	22	34	44	20	19	30	20
43	23	47	30	17	27	25	17
44	28	38	34	23	19	32	18
45	33	33	34	21	31	16	21
46	19	21	60	13	18	40	19
47	43	37	20	21	23	27	20
48	35	27	38	16	27	17	29
49	24	41	35	22	29	19	23
50	29	43	28	14	31	27	25

Продовження

№ варіанту	A_1	A_2	A_3	B_1	B_2	B_3	B_4
51	35	40	32	25	14	25	24
52	32	42	28	12	30	32	16
53	24	45	30	26	32	25	28
54	34	30	35	18	26	25	27
55	40	40	20	24	19	34	18
56	27	35	42	21	36	16	24
57	22	43	35	15	16	40	18
58	34	37	32	14	26	16	29
59	29	38	32	22	29	18	26
60	27	38	36	14	32	28	25
61	22	38	40	21	22	26	20
62	24	35	40	25	31	33	17
63	26	38	34	20	18	32	30
64	35	33	34	17	28	35	17
65	19	21	60	25	16	32	16
66	42	37	20	25	35	20	13
67	35	27	28	13	28	40	18
68	24	40	35	20	24	27	20
69	31	35	32	22	23	27	22
70	22	48	35	18	27	15	28
71	42	27	30	20	29	19	26
72	27	36	40	14	36	27	25
73	42	28	31	26	22	26	20
74	44	37	20	14	34	27	25
75	35	25	38	16	25	17	35
76	23	48	30	16	28	17	29
77	42	25	31	25	35	15	18
78	23	45	35	25	25	28	20
79	30	45	26	20	19	35	20
80	23	45	30	15	28	26	16
81	33	30	33	23	19	39	19
82	45	40	20	21	35	16	20
83	26	24	50	13	18	40	19
84	27	32	40	22	23	28	20
85	40	36	25	15	25	15	25
86	32	35	36	22	24	19	24
87	35	37	32	15	34	24	25
88	29	35	32	21	25	28	25
89	28	37	36	15	35	33	16
90	25	50	25	25	38	19	14
91	21	39	41	28	34	16	19
92	22	44	45	20	29	33	25
93	23	48	32	18	28	24	18
94	28	35	34	20	18	34	18
95	33	30	34	20	30	16	20
96	19	20	60	12	18	42	18
97	43	37	20	22	22	28	20
98	35	22	38	16	27	17	29
99	22	42	36	22	29	19	23
100	28	43	28	12	32	28	26

РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА

Основна

1. Акоф Р. Л., Сасиени М. В. Основы исследования операций / Пер. с англ. – М.: Мир, 1971.-536 с.
2. Акулич И.Л. Математическое программирование в примерах и задачах. – М.: Высшая школа, 1986. – 317 с.
3. Акулич И.Л. Математическое программирование в примерах и задачах: Учеб. пособие - 2-е изд., испр. и доп. – М.: Высш. шк. ,1993. - 336 с.
4. Барсук В.А., Губин Н.М., Батый А.Р. Экономико-математические методы и модели в планировании и управлении в отрасли связи. – М.: Радио и связь, 1964.
5. Вагнер Г. Основы исследования операций. – М.: Мир.- Т.1, 1972, 335 с. - Т.2, 1973, 488 с. - Т.3, 1973. - 501 с.
6. Вентцель Е.С. Исследование операций. – М.: Высшая школа, 2001. – 208 с.
7. Вентцель Е.С. Исследование операций. – М.: Советское радио, 1980. – 272 с.
8. Вітлінський В.В., Наконечний С.І. Математичне програмування. Навчально-методичний посібник для самостійного вивчення дисципліни. – К.: КНЕУ, 2001. – 248 с.
9. Гетьманцев В.Д. Лінійна алгебра і математичне програмування. - К.: Либідь, 2001. - 254 с.
10. Гранберг А.Г. Математические модели социалистической экономики. Учебное пособие для экон. вузов и фак. – М.: Экономика, 1978. - 351 с.
11. Дж. Данциг. Линейное программирование, его применение и обобщения.– М.:Прогресс,1966. – 450 с.
12. Зайченко Ю.П. Дослідження операцій. – К.: Слово, 2003. - 685 с.
13. Зайченко Ю.П. Исследование операций. – К.: Высшая школа. 1988. – 550 с.
14. Калихман И.Л. Сборник задач по линейной алгебре и программированию. – М.: Высшая школа, 1969. - 160 с.
15. Канторович Л.В. Математические методы организации и планирования производства. Л.: Изд-во ЛГУ, 1939. – 68 с.
16. Карасёв А.И., Кремер Н.Ш., Савельева Т.И. Математические методы и модели в планировании. – М.: Экономика, 1987. - 240 с.
17. Конюховский П.В. Математические методы исследования операций в экономике. Серия "Краткий курс". – СПб.: Питер, 2000. - 208 с.
18. Кремер Н.Ш., Путко Б.А., Тришин И.М. и др. Исследование операций в экономике. Под ред. Кремера Н.Ш. – М.: Банки и биржи,1999. – 407 с.
19. Лотов А.В. Введение в экономико-математическое моделирование. – М.: Наука, 1984. – 392 с.

20. Математичне програмування. Методичні вказівки. // Укл.: Бурий В.В., Олешко Т.І. – К.: НАУ. 2002.
21. Мину М. Математическое программирование. Теория и алгоритмы. – М.: Наука, 1990. – 488 с.
22. Морозов В.В. и др. Исследование операций в задачах и упражнениях. - М.: Высшая школа, 1986. - 285 с.
23. Наконечний С.І., Савіна С.С. Математичне програмування. Навчальний посібник.– К.: КНЕУ, 2003. – 452 с.
24. Романюк Т.П., Терещенко Т.А., Присенко Г.В., Городкова І.М. Математичне програмування. Навчальний посібник. – К.: ІЗМН, 1996. – 312 с.
25. Цегелик Г.Г. Лінійне програмування. – Львів: Світ, 1995. - 216 с.

Додаткова

1. Васильев Ф.П. Численные методы решения экстремальных задач. Изд. 2-е, перераб. и доп. – М.: Наука, 1988. – 549 с.
2. Давыдов Э.Т. Исследование операций.- М.:Высш.шк., 1990. – 383 с.
3. Деордица Ю.С., Нефедов Ю.М. Исследование операций в планировании и управлении - К.: Вища школа 1991. – 270с.
4. Захарченко Н.В., Князева Н.А. Оптимизация и моделирование систем связи: Учеб. пособие. / ОЭИС, – Одесса, 1990. Ч. 2. – 76 с.
5. Интрилигатор М. Математические методы оптимизации и экономическая теория.– М.:Прогресс, 1975. – 604 с.
6. Исследование операций: В 2-х томах. Под. ред. Дж. Моудера, С. Элмаграби. – М.:Мир,1981.Т.1. – 712 с.
7. Исследование операций: В 2-х томах. Под. ред. Дж. Моудера, С. Элмаграби. – М.:Мир,1981.Т.2. – 677 с.
8. Калихман И.Л. Сборник задач по математическому программированию. – М.: Высш.школа, 1975. – 272 с.
9. Карлин С. Математические методы в теории игр, программировании и экономике. – М., 1964. – 839 с.
10. Ляшенко И.Н., Карагодова Е.А., Чернишова Н.В., Шор Н.Э. Линейное и нелинейное программирование. – К.: Вища школа, 1975. – 372с.
11. Морозов В.В., Сухарев А.Г., Федоров В.В. Исследование операций в задачах и упражнениях: Учебное пособие для студентов вузов, обуч. по спец. «Прикладная математика».– М.:Высш.шк.,1986. – 287с.
12. Сакович В.А. Исследование операций (детерминированные методы и. модели): Справочное пособие. – Минск: Выш. шк., 1985. – 256 с.
13. Таха Х. Введение в исследование операций: В 2-х книгах. Кн. 1. – М.: Мир, 1985.- 496 с.
14. Таха Х. Введение в исследование операций: В 2-х книгах. Кн. 2. – М.: Мир, 1985.- 479 с.
15. Уоткин Т.Дж., Параммоу К. Количественные методы в финансах – М.: Финансы, ЮНИТИ, 1999. – 527с.

16.Фомин Г.П. Математические методы и модели в коммерческой деятельности" – М.: Финансы и статистика, 2001. – 544 с.

ЗМІСТ