Министерство транспорта и связи Украины
Государственный департамент по вопросам связи и информатизации
Одесская национальная академия связи им. А.С. Попова

Кафедра управления проектами и системного анализа

Математическое программирование

МОДУЛЬ №1 “Математическое моделирование экономических исследований и методы решения ЗЛП”

Учебное пособие
часть 1

Специальность: 7.050107, 7.050201
(для студентов всех форм обучения)

Одесса – 2008

Учебное пособие разработано: доц. ***Щуровской А. Ю.***

Учебное пособие рассмотрено и одобрено на заседании кафедры
Управления проектами и системного анализа.

Протокол № 2 от „ 28 ” октября 2007 г.

Зав. кафедрой доц. ***Бобровничая Н. С.***

Учебное пособие рассмотрено и одобрено на заседании Совета Института экономики и менеджмента

Протокол № 6 от « 28 » февраля 2008 г.

Директор ИЭМ доц. ***Захарченко Л. А.***

Редактор ***Кодрул Л. А.***

Компьютерная верстка
и макетирование ***Корнейчук Е. С.***

ВВЕДЕНИЕ

Выработка и принятие решений является важным звеном процесса управления и личной функцией руководителей и специалистов в области экономики. Для повышения эффективности управленческих решений требуется глубокое изучение экономических (производственных) процессов различными методами.

Очень важно в условиях расширения прав предприятий в области производственно-хозяйственной деятельности, их самостоятельности в принятии управленческих решений приобретает глубокое знание специалистами новейших достижений экономической науки, методов математического моделирования и прогнозирования экономических процессов на основе информационных технологий оптимальных решений.

Эти обстоятельства предъявляют повышенные требования к качеству подготовки экономистов, которые должны владеть новейшими достижениями науки и уметь, используя их богатый арсенал методов, находить наиболее эффективные управленческие решения, а это, в свою очередь, определяет роль и место математических методов оптимизации в учебном процессе.

Методы математического программирования, будучи мощным инструментом исследования экономических процессов, играют довольно важную роль в анализе и синтезе экономического развития, обеспечивают многоуровневую оптимизацию, которая охватывает взаимосвязи областей, регионов и предприятий.

Место курса "Математическое программирование" среди других дисциплин определяется его важностью для обогащения экономической науки точными методами количественного анализа, которые оказывают содействие ее переходу на новую, более высокую ступень, а также необходимостью применения, как мощного инструмента в экономико-математическом моделировании экономических процессов.

Освоение курса "Математическое программирование" допускает знание основ теории множеств, дифференциального и интегрального вычисления, линейной алгебры, теории вероятностей и математической статистики, а также основ экономической теории.

В свою очередь, изучение студентами данного курса дает им возможность успешно овладеть курсом экономико-математического моделирования оптимизации экономических процессов.

Данное учебно-методическое пособие разработано для улучшения освоения учебного материала дисциплины “Математическое программирование”, что изучается в ОНАС им. А.С. Попова в виде курса лекций и практических занятий.

Предлагаемое учебно-методическое пособие рекомендуется для использования в изучении курса "Математическое программирование" для студентов всех форм обучения экономическим специальностям.

В учебном пособии даны рекомендации по построению математических моделей и решения задач математического программирования в области линейного программирования. В учебном пособии приведены методические рекомендации относительно построения математических моделей и решения задач математического программирования, рассмотрены примеры решения задач, предложены задачи для самостоятельного решения.

С целью более эффективного освоения учебного материала, каждая тема содержит краткое теоретическое введение, подробные методические указания с описанием решения конкретных задач, контрольные вопросы, варианты задач для самостоятельного решения, включая задачи повышенной сложности.

Особое внимание в учебном пособии было уделено вопросам построения математических моделей как основному и наиболее творческому этапу решения задач.

Общая характеристика дисциплины «Математическое программирование»

Учебная дисциплина излагается для студентов по специальностям 7.050.107 - Экономика предприятия и 7.050.201 - Менеджмент организаций.

Для специальности 7.050.107 - Экономика предприятия:

Количество кредитов ECTS - 1,5; модулей - 1; содержательных модулей - 6; общее количество часов - 81, в том числе: лекций - 32 ч., практических занятий -16 ч., самостоятельная работа - 33 ч., вид контроля - зачет.

Для специальности 7.050.201 - Менеджмент организаций:

Количество кредитов ECTS - 3; модулей - 2; содержательных модулей - 6; общее количество часов - 108, в том числе: лекций - 32 ч., практических занятий -32 ч., самостоятельная работа - 44 ч., вид контроля - зачет.

Цель изучения дисциплины

Целый комплекс экономических задач на разных уровнях управления народным хозяйством имеет много вариантов решений, среди которых нужно найти наиболее эффективный, т.е. оптимальный.

Математическое программирование – курс, который принадлежит к разделу прикладной математики и формально объединяет методы нахождения экстремума функций от многих переменных, на которые накладываются ограничения.

Математическое программирование часто называют дисциплиной, изучающей методы оптимизационного планирования, т.е. именно методы нахождения наиболее эффективного (оптимального) плана (решения) среди многих допустимых планов той или другой экономической задачи.

Предметом изучения курса "Математическое программирование" являются способы математической формализации экономических систем и методы нахождения оптимальных планов их деятельности. В данном курсе под математической формализацией понимается: определение цели, которую преследуют субъекты управления; выявление множества управляемых параметров экономической системы; выявление основных отношений между управляемыми параметрами; представление этих отношений в математической форме; разработка методов получения оптимальных решений, которые приводят к достижению поставленной цели.

Цель изучения курса – получение базовых знаний и основных навыков: по построению наиболее распространенных математических моделей экономических систем; по использованию методов поиска оптимальных решений. Данная цель достигается путем изучения следующих задач: распознавание типа математической модели, которая наилучшим образом отвечает конкретной экономической ситуации; построение математической модели на основе словесного описания экономической ситуации; поиск оптимального решения на основе построенной модели.

Задача курса – научить студентов моделированию производственных систем, усвоить основные экономические категории и концепцию оптимизации, овладеть методами и алгоритмами решения задач оптимизации, методологию построения разных типов модулей для разнообразных областей экономики.

Цель дисциплины научить студентов математически формулировать и составлять экономико-математические задачи, решать их методами математического программирования, находить наиболее эффективные решения, готовить исходную информацию, анализировать оптимальные результаты и на их основе формулировать конкретные выводы и предложения, давать рекомендации по усовершенствованию производства с целью повышения его эффективности.

Студентам необходимо усвоить основную методологию и методы математического программирования и экономико-математического моделирования производственных систем в отраслях экономики, тенденции развития дисциплины с целью внедрения в практику экономического анализа, прогнозирование, вычисление экономического риска, маркетинга и менеджмента.

Для изучения дисциплины необходима подготовка из высшей математики: математического анализа, линейной алгебры, аналитической геометрии, теории вероятностей, математической статистики, численных методов; технологий производства и предоставления услуг, статистики, экономики и анализа народнохозяйственной деятельности отрасли, организации отрасли.

Изучению дисциплины «Математическое программирование», которая связывает дисциплины математического цикла с экономическими науками, предшествует изучение курсов „Исследование операций", „Эконометрия" и „Автоматизированное рабочее место менеджера”.

Содержание дисциплины

Модуль 1: *Математическое моделирование экономических исследований и методы решения ЗЛП (1,5 кредита)*

Структура зачетного модуля 1

Содержательный модуль	Лекции (часов)	Занятия		Самостоятельная работа (Инд. задание)	Индивидуальная работа
		практические	лабораторные		
Модуль 1: *Математическое моделирование экономических исследований и методы решения ЗЛП* (1,5 кредита; 54 ч.)					
1. Математическое моделирование в математических исследованиях. Двумерные задачи линейного программирования и методы их решения	8	8		10	
2. Симплексный метод решения ЗЛП, случаи и условия применения М-Метода	8	8		12	
Всего 1 модуль, ч.	**16**	**16**		**22**	

Содержание содержательных модулей (лекционных часов**)**

1. Математическое моделирование в математических исследованиях. Двумерные задачи линейного программирования и методы их решения. (8 ч.)
   - 1.1. Метод математического моделирования в экономических исследованиях. Исторический очерк применения математики в экономической науке. Моделирование как метод научного познания. Экономико-математическое моделирование. Понятие оптимизационной задачи. Классификация оптимизационных задач. Примеры линейных оптимизационных задач.
   - 1.2. Теория линейного программирования. Определение канонического вида задачи линейного программирования (ЗЛП). Теорема о замене неравенств уравнениями. Формы записи ЗЛП. Основные определения. Свойства множества планов. Основная теорема линейного программирования.
   - 1.3. Методы решения ЗЛП. Графоаналитический метод. Характеристика и область применения. Способ полного перебора. Способ направленного перебора.
2. Симплексный метод решения ЗЛП, случаи и условия применения М-Метода. (8 ч.)

2.1. Симплексный метод. Теоретическое предисловие и этапы решения. Построение начального опорного плана. Оценка оптимальности опорного плана.
2.2. Переход от одного опорного плана к другому. Алгоритм симплексного метода (на примере задачи рационального использования ресурсов).
2.3. Метод искусственного базиса (М-Метод). Построение начального опорного плана (составление М-Задачи). Теорема о связи оптимальных планов М-Задачи и исходной задачи.
2.4. Экономическая интерпретация симплексного метода.

Темы практических занятий модуля 1

№ п/п	Тема	Часов
1	Метод математического моделирования в экономических исследованиях. Понятие оптимизационной задачи	2
2	Построение оптимизационных моделей для решения экономических задач	2
3	Графоаналитический метод (ГАМ) решение ЗЛП	2
4	Анализ чувствительности оптимального решения ЗЛП	2
5	Приведение ЗЛП к канонической форме и получению исходного базисного решения	2
6	Симплексный метод (СМ) решения ЗЛП	4
7	М- Метод (ММ)	2
	Всего	**16**

Исходные знания и умения из модуля 1

Для успешной сдачи контрольных мероприятий зачетного модуля 1, студенты должны овладеть следующими знаниями: классификацией оптимизационных задач, определением видов и форм ЗЛП, основной теоремой линейного программирования, принципами применения и алгоритмом графоаналитического метода решения ЗЛП, алгоритмом симплексного метода и метода искусственного базиса решения ЗЛП. А также уметь: строить оптимизационные модели для экономических задач и решать ЗЛП разными методами, согласно условиям их применения.

Модуль 2: *Экономико-математический анализ и нелинейное программирование (1,5 кредита)*

Структура зачетного модуля 2

Содержательный модуль	Лекции (часов)	Занятия		Самостоятельная работа (Инд. задание)	Индивидуальная работа
		практические	лабораторные		
Модуль 2: *Экономико-математический анализ и нелинейное программирование* (1,5 кредита; 54 ч.)					
1. Двойственность в линейном программировании. Экономико-математический анализ результатов решения ЗЛП	4	4		4	
2. Транспортная задача	4	4		10	
3. Целочисленное линейное программирование	4	4		4	
4. Теория игр	4	4		4	
Всего 2 модуль, ч.	**16**	**16**		**22**	

Содержание содержательных модулей (лекционных часов**)**

1. Двойственность в линейном программировании. Экономико-математический анализ результатов решения ЗЛП. (4 ч.)
   1.1. Двойственность в линейном программировании. Понятие двойственности. Виды двойственных пар задач. Первая и вторая теоремы двойственности.
   1.2. Двойственный симплексный метод.
   1.3. Экономико-математический анализ (ЭМА) результатов решения ЗЛП. Содержание ЭМА. Общая характеристика оценок оптимального плана.
   1.4. Применение оценок для ЭМА (на примере задачи рационального использования ресурсов).
2. Транспортная задача. (4 ч.)
   2.1. Транспортная задача (ТЗ). Постановка и математическая модель (закрытой и открытой).
   2.2. Свойства планов и метод решения ТЗ. Случаи вырождения планов и не единства решения ТЗ.
3. Целочисленное линейное программирование. (4 ч.)
   3.1. Целочисленное линейное программирование. Постановка задачи целочисленного линейного программирования.

3.2. Классические методы решения задач целочисленного линейного программирования: метод отсечения, комбинаторные и приближенные методы.
3.3. Метод Гомори. Метод ветвей и границ.

4. Теория игр. (4 ч.)
4.1. Основные понятия теории игр.
4.2. Игра двух человек с нулевой суммой и их решение. Принцип минимакса.
4.3. Сведение игры $m \times n$ к задачам линейного программирования.

Темы практических занятий модуля 2

№ з/п	Тема	Часов
1	Экономическая интерпретация симплексного метода	2
2	Двойственный метод решения задачи ЛП	2
3	Экономико-математический анализ (ЕМА) результатов решения ЗЛП	2
4	Транспортная задача (ТЗ): Построение моделей транспортных задач	2
5	Решение транспортных задач	2
6	Метод Гомори: решение целочисленных задач	2
7	Метод ветвей и границ	2
8	Матричные игры двух человек. Сведение задачи игры двух человек к задаче линейного программирования	2
	Всего	**16**

Исходные знания и умения из модуля 2

Для успешной сдачи контрольных мероприятий зачетного модуля 2 студенты должны овладеть следующими знаниями: основами теории двойственности, общей характеристикой и содержанием ЭМА результатов решения ЗЛП, постановкой и математической моделью транспортной задачи, методом решения ТЗ, понятием о целочисленном программировании. А также уметь: проводить ЭМА результатов решения ЗЛП, решать двойственные задачи и ТЗ методом потенциалов, решать задачи целочисленного линейного программирования.

Методы оценки

Оценивание проводится по национальной шкале ESNS и по шкале ОНАС (100 балл.)

1. ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

1.1 Постановка задачи линейного программирования

Математическое программирование ("планирование") – это раздел математики, который занимается разработкой методов нахождения экстремальных значений функции, на аргументы которой наложены ограничения. Методы математического программирования используются в экономических, организационных, военных и др. системах для решения так называемых **распределительных задач.** Распределительные задачи (РЗ) возникают в случае, когда ресурсов, которые есть в наличии, не хватает для выполнения каждой из намеченных работ эффективным образом и необходимо наилучшим образом распределить ресурсы по роботам согласно выбранному критерию оптимальности.

Линейное программирование (ЛП) является наиболее простым и лучше всего изученным разделом математического программирования.

Возникновение и развитие линейного программирования связывают с экономикой. В экономике задачи математического программирования, и в частности линейного, возникают в связи с многочисленностью вариантов создания или функционирования определенной экономической системы, с возможностью применения разнообразного сырья, материалов, технологии для производства одной и той же продукции. Среди этих вариантов необходимо выбрать по определенному критерию, отраженному в функции цели, *наилучший (оптимальный) вариант.* Нужно также иметь в виду, что большое количество вариантов функционирования конкретной экономической системы ограничено с точки зрения количества и качества используемого сырья, технологии и т.д.

Линейное программирование есть наиболее развитым и широко используемым на практике разделом математического программирования. Предположение о линейности экономических зависимостей несколько ограничивает возможности линейного программирования, тем не менее простота и наглядность линейных моделей, которые с достаточной степенью точности описывают экономические процессы, разрешает применять эти модели в разнообразных видах экономической деятельности.

Основы линейного программирования были заложены советским математиком Л. В. Канторовичем в конце 30-х годов [15]. В США линейное программирование зародилось во время второй мировой войны в связи с необходимостью планирования деятельности и обеспечения вооруженных сил, которые вели боевые действия в других частях мира. Со временем эта область науки приобрела широкое распространение в промышленности.

В 1941 г. в США Ф. Хитчкок осуществил постановку и построил модель одной из центральных задач линейного программирования – *транспортной задачи* [19]. Большую роль в развитии линейного программирования сыграло создание в 1947 г. американским ученым Дж. Данцигом универсального метода решения задач, который получил название "*симплекс-метод*".

В 1949 г. Л. В. Канторович и М. К. Гавурин предложили первый точный метод для решения транспортной задачи – *метод потенциалов.* В следующие года взнос в развитие теории линейного программирования внесли ученые многих стран мира.

Характерные особенности задач линейного программирования (ЛП) следующие:

1) показатель оптимальности $f(X)$ представляет собой ***линейную*** функцию от элементов решения $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$;

2) ограничительные условия, которые накладываются на возможные решения, имеют вид ***линейных*** равенств или неравенств.

Общая задача линейного программирования (ЛП) математически может быть сформулирована таким способом:

Целевая функция (ЦФ)

$$f(X) = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n \rightarrow \max (\min), \tag{1.1}$$

при ограничениях

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n\ (\leq, =, \geq,)\ b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n\ (\leq, =, \geq)\ b_2, \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n\ (\leq, =, \geq)\ b_m, \\ x_j \geq 0,\ \left(j = \overline{1, n}\right). \end{cases} \tag{1.2}$$

В компактном виде, используя знак суммы $\sum$, задачи (1.1) – (1.2) можно записать так:

$$f = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \rightarrow \max (\min), \tag{1.3}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j\ (\leq, =, \geq) b_i,\ \left(i = \overline{1, m}\right), \quad x_j \geq 0,\ \left(j = \overline{1, n}\right). \tag{1.4}$$

Здесь x_j – искомые неизвестные, выражение (1.3) задает функцию цели, а выражение (1.4) – ограничение задачи ЛП.

Воображением, нужно так выбрать значение переменных x_j, чтобы:

1) некоторая линейная функция f тех же переменных (1.1, 1.3) оборачивалась на максимум (минимум);

2) выполнялись ограничение (1.2, 1.4), которые представлены как линейные неравенства или равенства относительно переменных x_j $\left(j = \overline{1, n}\right)$.

Задачи (1.1) – (1.4) можно представить в матричной форме записи. Для этого введем следующие обозначения:

$C = \left(c_1, c_2, \ldots, c_n\right)$ – матрица-строка коэффициентов при неизвестных в функции f;

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$ – матрица системы ограничений;

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_m \end{pmatrix}$$ – матрица-столбец свободных членов ограничений;

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix}$$ – матрица-столбец неизвестных.

Тогда задачи (1.1) – (1.4) в матричной форме записи будут иметь вид:

$$\begin{gathered} f = CX \to \max\ (\min), \\ AX\ (\le, =, \ge)\ B, \\ X \ge 0. \end{gathered} \tag{1.5}$$

Задачи (1.5) представляют собой частные виды задач линейного программирования. Особенность этих задач заключается в том, что они содержат только один вид ограничений. Однако рядом с этими задачами широко распространены задачи линейного программирования со смешанными ограничениями, которые содержат два или три вида рассмотренных ограничений (≤, =, ≥).

Математический аппарат линейного программирования предназначен специально для решения таких задач.

Может возникнуть вопрос: а нужен ли такой специальный аппарат? Или нельзя, как это заведено в математике, просто продифференцировать f по аргументам x_j, приравнять производную к нулю и решить полученную систему уравнений?

Оказывается, сделать это нельзя! Потому что функция *f линейная*, производные от нее по всем аргументам постоянные и нигде на нуль не оборачиваются. Максимум (или минимум) функции f, если он существует, достигается всегда где-то на границе *области* возможных значений x_j, т.е. там, где начинают действовать ограничения [6]. Математический аппарат линейного программирования разрешает последовательно обследовать границы области возможных решений и найти на этих границах решение, которое есть оптимальным, т.е. такую совокупность значений x_j, при которой линейная функция f оборачивается на максимум или минимум.

Экономическая интерпретация метода ЛП состоит вот в чем [1]. Система, которая моделируется, характеризуется наличием нескольких видов "производственной деятельности" j (j = 1, 2, ..., n), для осуществления которых нужны имеющиеся в ограниченном количестве разнообразные ресурсы b_i (i = 1, 2, ..., m). Затраты i-го ресурса на единицу продукта j-го вида производственной деятельности равно a_{ij}. В свою очередь, при таком потреблении результат j-го вида производственной деятельности для единицы соответствующего продукта (удельная стоимость или прибыль) характеризуется величиной c_j.

Цель построения модели состоит в определении *уровней* (объемов производства) каждого вида производственной деятельности x_j, при которых оптимизируется (максимизируется или минимизируется) общий результат производственной деятельности системы в целом без нарушения ограничений, которые накладываются на использование ресурсов. Обычно функцию f называют *целевой функцией*, а лимиты потребления ресурсов – *ограничениями.*

Основными допущениями, принятыми при построении линейных моделей, есть: 1) пропорциональность, 2) аддитивность и 3) неотрицательность.

Пропорциональность означает, что затраты ресурсов на какой-либо вид производственной деятельности, а также взнос этого вида производственной деятельности в целевую функцию прямо пропорциональны его уровню. Например, если, продавая j-ый товар в общем случае по цене 100 грн., фирма будет делать скидку при определенном уровне закупки к уровню цены 95 грн., то будет отсутствовать прямая пропорциональность между доходом фирмы и величиной переменной x_j, т.е. в разных ситуациях *одна* единица j-го товара будет приносить *разный* доход.

С другой стороны, *аддитивность* указывает на то, что общий объем ресурсов, потребляемых в системе всеми видами производственной деятельности, равняется сумме затрат ресурсов на отдельные виды производственной деятельности. Примером нарушения аддитивности служит ситуация, когда увеличение сбыта одного из конкурирующих видов продукции, произведенных одной фирмой, влияет на объем реализации другого. Аналогично интерпретируется и целевая функция.

Допущение о пропорциональности и аддитивности обеспечивают строгую линейность соответствующих функций. В практических ситуациях истинный характер зависимостей редко бывает линейным. Тем не менее допущение о линейности разрешает разработать исключительно эффективные вычислительные методы.

Неотрицательность означает, что ни одному из видов производственной деятельности не может быть приписан отрицательный уровень. Для большинства систем, которые встречаются на практике, это допущение есть естественным логическим следствием условий их функционирования.

Любая совокупность $x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1, n})$, что удовлетворяет ограничениям (1.2, 1.4), называется *допустимым решением (допустимым планом)* задачи. Если задача линейного программирования имеет хотя бы одно допустимое решение, то ее ограничения называются *совместными,* в противном случае – *несовместными.* Поскольку анализируемые задачи носят большей частью экономический характер, рядом с понятием «решение» применяется аналогичное ему в данном случае понятие «план».

Все допустимые решения образовывают *область определения* задачи линейного программирования, или, иначе, *область допустимых решений.* Допустимое решение, которое максимизирует или минимизирует целевую функцию f, называется *оптимальным решением (оптимальным планом)* задачи. Если через $X^* = (x^*_1, x^*_2, ..., x^*_n)$ обозначить оптимальное решение задачи линейного программирования, а через $X = (x_1, x_2, ... , x_n)$ – любое допустимое решение, то справедливы такие соотношения:

$f(X^*) \geq f(X)$ – для задачи на max;

$f(X^*) \leq f(X)$ – для задачи на min.

Задача ЛП необязательно должна иметь решения. Может произойти так, что уравнения (1.2, 1.4) противоречат одно другому; может оказаться, что они имеют решение, но в области отрицательных значений $x_1, x_2, ... , x_n$. Тогда задача ЛП не имеет допустимых решений. В конце концов, может оказаться, что допустимые решения задачи ЛП существуют, но среди них нет оптимального: функция f области допустимых решений неограниченна снизу.

Интерес прежде всего представляет вопрос о существовании допустимых решений общей задачи ЛП. Наличие допустимых решений определяется только уравнениями (1.2, 1.4).

Итак, пусть есть система уравнений (1.2, 1.4). Существуют ли нетрицательные *значения* x_j, которые удовлетворяют этой системе? Этот вопрос рассматривается в специальном разделе математики – линейной алгебре.

В линейной алгебре доказывается, что *для совместности системы линейных уравнений* (1.2, 1.4) *необходимо и достаточно, чтобы ранг матрицы системы был равен рангу ее расширенной матрицы* [6].

Напомним, что матрицей системы уравнений (1.2, 1.4) называется таблица, составленная из коэффициентов при $x_1, x_2, ... , x_n$:

$$\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{Vmatrix}$$

Расширенной матрицей системы линейных уравнений называется та самая матрица, дополненная столбиком свободных членов:

$$\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} & b_2 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} & b_m \end{Vmatrix}$$

Рангом r матрицы называется наибольший порядок отличного от нуля определителя, который можно получить, вычеркивая из матрицы какие-то строки и какие-то столбцы.

Очевидно, что $r \leq m$ и $r \geq n$.

В случае, когда $r = n$, система уравнений-ограничений (1.2, 1.4) имеет единое решение. Если в этом решении хотя бы одна из величин x_j отрицательна, это означает, что полученное решение недопустимое и задача ЛП не имеет решения. Если же все $x_j \geq 0$, решение есть допустимым. Оно же есть и оптимальным. Случай единого решения (при $r = n$) есть тривиальным. В общем случае $r < n$, т.е., когда число независимых уравнений, которым должны удовлетворять переменные, меньше числа самих переменных. Тогда, если система совместна, у нее существует бесчисленное множество решений. При этом $n - r$ переменным можно придавать произвольное значение (так называемые *свободные переменные*), а другие r переменных выразятся через них (эти r переменные мы будем называть *базисными*).

Вообще, если ранг системы уравнений задачи ЛП (т.е. число линейно независимых уравнений, которые входят в систему ограничений) равняется r, то всегда можно выразить некоторые r базисных переменных через $n - r$ других (свободных) и, предоставляя свободным переменным любые значения, получить бесчисленное количество решений системы.

В дальнейшем для простоты, записывая уравнения задачи ЛП, мы будем считать их линейно независимыми, при этом ранг системы r *будет* равен числу уравнений m.

Итак, если число уравнений задачи ЛП $r = m$ меньше, чем число переменных n, то система линейных уравнений имеет бесчисленное множество решений, т.е. совокупностей значений x_1, x_2, ..., x_n, что удовлетворяют уравнениям-ограничениям (1.2, 1.4).

Данное множество содержит все соединения переменных x_j, что удовлетворяют системе ограничений. Потом из этого множества необходимо выбрать одно (или несколько) решение, которое оптимизирует функцию цели.

Для определения множества допустимых решений и выбора оптимального решения разработаны специальные методы – графический и численные.

1.2 Построение оптимизационных моделей для решения экономических задач

Процесс построения оптимизационных экономико-математических моделей условно можно разделить на следующие основные этапы.

Первый этап — выбор объекта исследования. Объектом исследования могут быть разные производственно-экономические процессы: перевозка грузов, размещение производства, загрузка производственных мощностей, раскрой промышленных материалов и т.д.

Второй этап — определение цели исследования. Цель исследования формулируется на основе задач, поставленных при изучении данного объекта. Например, при планировании перевозок грузов можно поставить следующую цель: составить план перевозок грузов, который обеспечивает минимальные транспортные затраты.

Третий этап — выбор критерия оптимальности. Отличительной особенностью оптимизационных моделей есть наличие условия нахождения оптимального решения (критерия оптимальности), что записывается в виде функционала. Критериями оптимальности обычно служат: минимальная стоимость перевозки грузов, максимальный доход, минимальная стоимость исходных материалов, минимальные затраты производства и др. К выбору критерия следует подходить очень осторожно, так как неправильно избранный критерий может привести к решению, которое не отвечает цели поставленной задачи.

Четвертый этап — выявление основных ограничений. При построении моделей необходимо выявить основные ограничения задачи и включить их в модель. Реальные задачи обычно содержат большое количество ограничений. Часть из них вытекает из условия задачи, другие можно выявить лишь после решения, которое по каким-то причинам не устраивает.

Содержание ограничений, которые вводятся, может быть разным. Практически каждая экономическая задача содержит ограничение по ресурсам, так как выбор вариантов решения производится в условиях ограниченных ресурсов (сырье, материалы, машины, оборудование, рабочая сила и др.). Кроме ограничений по ресурсам в модель включаются дополнительные условия, обусловленные постановкой задачи. К ним относятся, например, обязательное соблюдение сроков выпуска продукции, ее ассортимента и качества, удовлетворение спроса на определенную продукцию и др. Для получения правильного решения система ограничений должна быть довольно полной. В то же время не следует загружать модель большим числом несущественных ограничений. Ограничения в модели отражаются в виде системы уравнений и неравенств.

Сформулируем простые экономические задачи, построим математические модели для решения этих задач и покажем, что данные задачи относятся к задачам линейного программирования.

Пример №1.1. *Определение оптимального ассортимента продукции.*

Предприятие изготовляет два вида продукции – $П_1$ и $П_2$, которая поступает в оптовую продажу. Для производства продукции используются два вида сырья – А и В. Максимально возможные суточные запасы сырья составляют 9 и 13 единиц соответственно. Затраты сырья на единицу продукции вида $П_1$ и вида $П_2$ приведены в табл. 1.1.

Таблица 1.1 – Затраты сырья

Сырье	Затраты сырья на 1 ед. продукции		Запас сырья, ед.
	$П_1$	$П_2$	
А	2	3	9
В	3	2	13

Изучение рынка сбыта показало, что суточный спрос на продукцию $П_1$ никогда не превышает спроса на продукцию $П_2$ более, чем на 1 ед. Кроме того, установлено, что спрос на продукцию $П_2$ никогда не превышает 2 ед. в сутки.

Оптовые цены единицы продукции равны: 3 ден.ед. – для $П_1$ и 4 ден.ед. – для $П_2$.

Необходимо построить математическую модель, которая разрешает установить, какое количество продукции каждого вида нужно изготовить, чтобы доход от реализации продукции был максимальным.

Решение

Прежде чем построить математическую модель задачи, т.е. записать ее с помощью математических символов, необходимо четко разобраться с экономической ситуацией, описанной в условии. Для этого необходимо с точки зрения ***экономики,*** а не математики, ответить на следующие вопросы:

1) Что является ***искомыми величинами*** задачи?

2) Какая ***цель*** решения? Какой ***параметр*** задачи служит критерием эффективности (оптимальности) решения, например, прибыль, себестоимость, время и т.д. В каком ***направлении*** должно изменяться значение этого параметра (к max или к min) для достижения наилучших результатов?

3) Какие ***условия*** относительно искомых величин и ресурсов задачи должны быть выполнены?

Эти условия устанавливают, как должны соотноситься один с другим разные параметры задачи, например, количество ресурса, израсходованного при производстве, и его запас на складе; количество продукции что изготовляется и емкость склада, где она будет сохраняться; количество продукции, которая изготовляется и рыночный спрос на эту продукцию и т.д.

Только после экономического ответа на все эти вопросы можно приступать к записи этих ответов в ***математическом*** виде, т.е. к записи математической модели.

1) Искомые величины являются ***переменными*** задачи, которые, как правило, обозначаются малыми латинскими буквами с индексами, например, однотипные переменные удобно представлять в виде $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$.

2) Цель решения записывается в виде ***целевой функции,*** обозначаемой, например, $f(X)$. Математическая формула ЦФ $f(X)$ отображает способ расчета значений параметра – критерия эффективности задачи.

3) Условия, которые накладываются на переменные и ресурсы задачи, записываются в виде системы равенств или неравенств, т.е. ***ограничений.*** Левые и правые части ограничений отображают способ получения (расчет или численные значения из условия задачи) значений тех параметров задачи, на которые были наложены соответствующие условия.

В процессе записи математической модели необходимо указывать единицы измерения переменных задачи, целевой функции и всех ограничений. Построим модель задачи №1.1, используя описанную методику.

Переменные задачи

В задаче нужно установить, сколько продукции каждого вида необходимо изготовить. Поэтому искомыми величинами, а значит, и переменными задачи являются *суточные объемы производства* каждого вида продукции:

x_1 – суточный объем производства продукции $П_1$, [ед./сут.];

x_2 – суточный объем производства продукции $П_2$, [ед./сут.].

Целевая функция

В условии задачи сформулирована цель – достичь максимального дохода от реализации продукции. Т.е. критерием эффективности служит параметр *суточного дохода,* который должен стремиться к *максимуму.* Чтобы рассчитать величину суточного дохода от продажи продукции обеих видов, необходимо знать объемы производства продукции, т.е. x_1 и x_2 единиц в сутки, а также оптовые цены на продукцию $П_1$ и продукцию $П_2$. Таким образом, доход от продажи суточного объема производства продукции $П_1$ равняется $3x_1$ ден. ед. в сутки, а от продажи продукции $П_2$ – $2x_2$ ден. ед. в сутки. Поэтому запишем ЦФ в виде суммы дохода от продажи продукции $П_1$ и $П_2$ (при допущении независимости объемов сбыта каждой из продукций)

$$f(X) = 3x_1 + 4x_2 \to \max \text{ [ден.ед./сут]}.$$

Ограничения

Возможные объемы производства продукции x_1 и x_2 ограничиваются следующими условиями:

- количество сырья А и В, израсходованное на протяжении суток на производство продукции обеих видов, не может превышать суточного запаса этого сырья на складе;
- согласно результатам изучения рыночного спроса суточный объем производства продукции $П_1$ может превышать объем производства продукции $П_2$, но не более, чем на 1 ед. продукции;
- объем производства продукции $П_2$ не должен превышать 2 ед. в сутки, что также следует из результатов изучения рынков сбыта;
- объемы производства продукции не могут быть отрицательными.

Таким образом, все ограничения задачи делятся на 3 группы, обусловленные:

1) затратами сырья;
2) рыночным спросом на продукцию;
3) не отрицательностью объемов производства.

Ограничения **на затраты** каждого из видов сырья имеют следующую *содержательную* форму записи

$$\begin{pmatrix} \text{З}\textit{атраты} \text{ конкретного сырья} \\ \text{на п}\textit{роизводство} \text{ обоих видов продукции} \end{pmatrix} \le \begin{pmatrix} \text{Максимально } \textit{возможны}\text{й} \\ \text{запас даного с}\textit{ырья} \end{pmatrix}.$$

Запишем эти ограничения в *математической* форме.

Левая часть ограничения – это формула расчета суточных затрат конкретного сырья на производство продукции. Так, из условия известны затраты сырья А на производство 1 ед. продукции $П_1$ и 1 ед. продукции $П_2$ (см. табл. 1.1). Тогда на производство x_1 ед. продукции $П_1$ и x_2 ед. продукции $П_2$ нужно $2x_1 + 3x_2$ ед. сырья А.

Правая часть ограничения – это величина суточного запаса сырья на складе, например, 9 ед. сырья А в сутки (см. табл. 1.1). Таким образом, ограничение на затраты А имеет вид

$$2x_1 + 3x_2 \le 9.$$

Аналогичная математическая запись ограничения на затраты В

$$3x_1 + 2x_2 \le 13.$$

Примечание №1.1. Следует всегда проверять размерность левой и правой части каждого из ограничений, поскольку их расхождение свидетельствует о принципиальной ошибке при составлении ограничений.

Ограничение относительно суточного **объема производства** продукции $П_1$ в сравнении с объемом производства продукции $П_2$ имеет ***содержательную*** форму

$$\begin{pmatrix} \text{Превышение объема } \textit{производства} \text{ продукции } П_1 \\ \text{над объемом } \textit{производства} \text{ продукции } П_2 \end{pmatrix} \le \left(1 \frac{\text{ед. продукции}}{\text{сутки}} \right)$$

и ***математическую*** форму

$$x_1 - x_2 \le 1.$$

Ограничение относительно суточного **объема производства** продукции $П_2$ имеет ***содержательную*** форму

$$\left(\text{Спрос на продукцию } П_2 \right) \le \left(2 \frac{\text{ед.продукции}}{\text{сутки}} \right)$$

и ***математическую*** форму

$$x_2 \le 2.$$

Неотрицательность объемов производства задается как

$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0.$$

Таким образом, ***математическая модель*** этой задачи имеет вид

$$f(X) = 3x_1 + 4x_2 \to \max,$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \le 9, \\ 3x_1 + 2x_2 \le 13, \\ x_1 - x_2 \le 1, \\ x_2 \le 2, \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0.$$

Пример №1.2. *Задача использования фонда рабочего времени.*

Выполнить заказ на производство 32 изделий $В_1$ и 4 изделий $В_2$ взялись бригады $Б_1$ и $Б_2$. Производительность бригады $Б_1$ на производство изделий $В_1$ и $В_2$ составляет соответственно 4 и 2 изделия за час, фонд рабочего времени этой бригады 9,5 ч. Производительность бригады $Б_2$ – соответственно 1 и 3 изделия за час, а ее фонд рабочего времени – 4 ч. Затраты, связанные с производством единицы изделия, для бригады $Б_1$ равны соответственно 9 и 20 ден.ед., для бригады $Б_2$ – 15 и 30 ден.ед.

Составьте математическую модель задачи, которая разрешает найти оптимальный объем выпуска изделий, который обеспечивает минимальные затраты на выполнение заказа.

Решение

Переменные задачи

Искомыми величинами в задаче есть объемы выпуска изделий. Изделия $В_1$ будут выпускаться двумя бригадами $Б_1$ и $Б_2$. Поэтому необходимо *различать* количество изделий $В_1$, сделанных бригадой $Б_1$, и количество изделий $В_1$ сделанных бригадой $Б_2$. Аналогично, объемы выпуска изделий $В_2$ бригадой $Б_1$ и бригадой $Б_2$ также являются разными величинами. Вследствие этого в данной задаче 4 переменные. Для удобства восприятия будем использовать двухиндексную форму записи x_{ij} – количество изделий $В_j$ (j=l, 2), что изготовляются бригадой $Б_i$ (i=l, 2), а именно:

x_{11} – количество изделий $В_1$, что изготовляются бригадой $Б_1$, [ед.];
x_{12} – количество изделий $В_2$, что изготовляются бригадой $Б_1$, [ед.];
x_{21} – количество изделий $В_1$, что изготовляются бригадой $Б_2$, [ед.];
x_{22} – количество изделий $В_2$, что изготовляются бригадой $Б_2$, [ед.].

Примечание №1.2. В данной задаче нет необходимости привязываться к какому-либо временному интервалу (в задаче №1.1 была привязка к суткам), поскольку здесь нужно найти не объем выпуска за определенное время, а способ распределения известной плановой величины заказа между бригадами.

Целевая функция

Целью решения задачи есть выполнение плана с *минимальными* затратами, т.е. критерием эффективности решения служит показатель *затрат на выполнение всего заказа.* Поэтому ЦФ должна быть представлена формулой расчета этих затрат. Затраты каждой бригады на производство одного изделия $В_1$ и $В_2$ известны с условия. Таким образом, ЦФ имеет вид

$$f(X) = 9x_{11} + 20x_{12} + 15x_{21} + 30x_{22} \rightarrow \min, \left[\frac{\text{ден.ед.}}{\text{ед.}} \cdot \text{ед.} = \text{ден.ед.}\right].$$

Ограничения

Возможные объемы производства изделий бригадами ограничиваются следующими условиями:

- общее количество изделий $В_1$, выпущенное обеими бригадами, должно равняться 32 ед., а общее количество изделий $В_2$ – 4 ед.;
- время, отпущенное на работу над данным заказом, составляет для бригады $Б_1$–9,5 ч., а для бригады $Б_2$ – 4 ч.;
- объемы производства изделий не могут быть отрицательными величинами.

Таким образом, все ограничения задачи №1.2 делятся на 3 группы обусловленные:

1) величиной заказа на производство изделий;
2) фондом времени, выделенным бригадам;
3) неотрицательностью объемов производства.

Для удобства составления ограничений запишем исходные данные в виде табл. 1.2.

Таблица 1.2 – Исходные данные задачи №1.2

Бригада	Производительность бригад, ед./ч.		Фонд рабочего времени, ч.
	$В_1$	$В_2$	
$Б_1$	4	2	9,5
$Б_2$	1	3	4
Заказ, ед.	32	4	–

Ограничения на производство изделий имеют следующую ***содержательную*** форму записи

$$\begin{pmatrix} \text{Количество изделий } В_1, \\ \text{изготовленных бригадами } Б_1 \text{ и } Б_2 \end{pmatrix} = (32 \text{ ед.}),$$

$$\begin{pmatrix} \text{Количество изделий } В_2, \\ \text{изготовленных бригадами } Б_1 \text{ и } Б_2 \end{pmatrix} = (4 \text{ ед.}).$$

Математическая форма записи имеет вид

$$x_{11} + x_{12} = 32, \quad x_{21} + x_{22} = 4.$$

Ограничения относительно **фонда времени** имеют содержательную форму

$$\begin{pmatrix} \text{Общее время, истраченное бригадой } Б_1, \\ \text{на изготовление изделий } В_1 \text{ и } В_2 \end{pmatrix} \le (9{,}5 \text{ ч.}),$$

$$\begin{pmatrix} \text{Общее время, истраченное бригадой } Б_2, \\ \text{на изготовление изделий } В_1 \text{ и } В_2 \end{pmatrix} \le (4 \text{ ч.}).$$

Проблема состоит в том, что в условии задачи прямо не задано время, которое тратят бригады на выпуск одного изделия $В_1$ или $В_2$, т.е. не задана трудоемкость производства. Но есть информация о производительности каждой бригады, т.е. о количестве произведенных изделий за 1 час. Трудоемкость Тр и производительность Пр являются обратными величинами, т.е.

$$\text{Тр} = \frac{1}{\text{Пр}}.$$

Поэтому, используя табл. 1.2, получаем следующую информацию:

→ $\frac{1}{4}$ ч. тратит бригада $Б_1$ на производство одного изделия $В_1$;

→ $\frac{1}{2}$ ч. тратит бригада $Б_1$ на производство одного изделия $В_2$;

→ $\frac{1}{1}$ ч. тратит бригада $Б_2$ на производство одного изделия $В_1$;

→ $\frac{1}{3}$ ч. тратит бригада $Б_2$ на производство одного изделия $В_2$;

Запишем ограничения относительно фонда времени в ***математическом*** виде:

$$\frac{x_{11}}{4}+\frac{x_{12}}{2}\le 9{,}5\,;$$

$$\frac{x_{21}}{1}+\frac{x_{22}}{3}\le 4\,.$$

Неотрицательность объемов производства задается как

$$x_{ij}\ge 0,\left(i=1,2;\ j=1,2\right).$$

Таким образом, ***математическая модель*** этой задачи имеет вид:

$$f(X) = 9x_{11} + 20x_{12} + 15x_{21} + 30x_{22} \to \min,$$

$$\begin{cases} x_{11}+x_{12}=32, \\ x_{21}+x_{22}=4, \\ \dfrac{x_{11}}{4}+\dfrac{x_{12}}{2}\le 9{,}5\,, \\ \dfrac{x_{21}}{1}+\dfrac{x_{22}}{3}\le 4\,, \end{cases}$$

$$x_{ij}\ge 0,\left(i=1,2;\ j=1,2\right).$$

Пример №1.3*. *Задача о раскрое или о минимизации обрезков.*

Для пошива одного изделия нужно выкроить из ткани 6 деталей. На швейной фабрике были разработаны два варианта раскроя ткани. В табл. 1.3 приведены характеристики вариантов раскроя 10 м^2 ткани и комплектность, т.е. количество деталей определенного вида, которые необходимые для пошива одного изделия. Ежемесячный запас ткани для пошива изделий данного типа составляет 405 м^2. В ближайший месяц планируется сшить 90 изделий.

Постройте математическую модель задачи, которая позволяет в ближайший месяц выполнить план по пошиву с минимальным количеством отходов.

Таблица 1.3 – Характеристики вариантов раскроя отрезов ткани по 10 м^2

Вариант раскроя	Количество деталей, шт./отрез						Отходы, $м^2$/отрез
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	
1	60	0	90	40	70	90	0,5
2	80	35	20	78	15	0	0,35
Комплектность, шт./изделие	1	2	2	2	2	2	

Решение

Переменные задачи

В данной задаче искомые величины явным образом не указаны, но сказано, что должен быть выполнен ежемесячный план по пошиву 90 изделий. Для пошива 90 изделий на месяц нужно раскроить строго определенное количество деталей. Крой проводится из отрезов ткани по 10 $м^2$ двумя разными способами, которые позволяют получить разное число деталей. Поскольку заранее неизвестно, сколько ткани будет раскроено первым способом и сколько – вторым, то искомые величины можно задать как *количество отрезов ткани по* 10 $м^2$, раскроенных каждым из способов:

x_1 – количество отрезов ткани по 10 $м^2$, раскроенных первым способом на протяжении месяца, [отрез/мес.];

x_2 – количество отрезов ткани по 10 $м^2$, раскроенных вторым способом на протяжении месяца, [отрез/мес.].

Целевая функция

Целью решения задачи является выполнение плана при минимальном количестве отходов. Поскольку количество изделий строго запланировано (90 ед./мес.), то этот параметр не описывает ЦФ, а относится к ограничению, невыполнение которого означает, что задача не решена. А критерием эффективности выполнения плана служит параметр "количество отходов", который необходимо свести к минимуму. Поскольку при раскрое одного отреза (10 $м^2$) ткани по 1-му варианту выходит 0,5 $м^2$ отходов, а по 2-му варианту – 0,35 $м^2$ (см. табл. 1.3).

Общее количество отходов при раскрое (ЦФ) имеет вид:

$$f(X)= 0{,}5x_1 + 0{,}35x_2 \rightarrow \min, \left[\frac{м^2 отрез}{отрез}\cdot\frac{отрез}{мес.} = \frac{м^2 отрез}{мес.}\right].$$

Ограничения

Количество раскроя ткани разными способами ограничивается следующими условиями:

• должен быть выполнен план по пошиву изделий, иначе говоря, общее количество выкроенных деталей должно быть таким, чтобы из них можно было пошить 90 изделий в месяц, а именно: деталей 1-го вида должно быть как минимум 90 и деталей других видов – как минимум по 180 (см. комплектность в табл. 1.3);

• затраты ткани не должны превышать месячного запаса ее на складе;

• количество отрезов раскроенных тканей не может быть отрицательным.

Ограничения по **плану пошива** изделий имеют следующую *содержательную* форму записи

$$\begin{pmatrix}\text{Общее количество деталей №1,}\\ \text{раскроенных по всем вариантам}\end{pmatrix} \geq (90\ \text{штук});$$

$$\begin{pmatrix}\text{Общее количество деталей №2,}\\ \text{раскроенных по всем вариантам}\end{pmatrix} \geq (180\ \text{штук});$$

$$\ldots$$

$$\begin{pmatrix}\text{Общее количество деталей №6,}\\ \text{раскроенных по всем вариантам}\end{pmatrix} \geq (180\ \text{штук}).$$

Математически эти ограничения записываются в виде

$$60x_1 + 80x_2 \geq 90,$$
$$35x_2 \geq 180,$$
$$90x_1 + 20x_2 \geq 180,$$
$$40x_1 + 78x_2 \geq 180,$$
$$70x_1 + 15x_2 \geq 180,$$
$$90x_1 \geq 180,$$
$$\left[\frac{\text{шт.}}{\text{отрез}} \cdot \frac{\text{отрез}}{\text{мес.}}\right] \geq \left[\frac{\text{шт.}}{\text{мес.}}\right].$$

Ограничения относительно **затрат ткани** имеют следующие формы записи:

содержательную

$$\begin{pmatrix}\text{Общее количество ткани,}\\ \text{раскроенной за месяц}\end{pmatrix} \leq \left(405\ \text{м}^2\right),$$

и математическую

$$x_1 + x_2 \leq \frac{405}{10},$$
$$\left[\frac{\text{отрез}}{\text{мес.}}\right] \leq \left[\frac{\text{м}^2 \cdot \text{отрез}}{\text{мес.} \cdot \text{м}^2}\right].$$

Неотрицательность количества раскроенных отрезов задается в виде

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0.$$

Таким образом, ***математическая модель*** задачи №1.3 имеет вид:

$$f(X) = 0{,}5x_1 + 0{,}35x_2 \to \min,$$

$$
\begin{cases}
60x_1 + 80x_2 \geq 90, \\
35x_2 \geq 180, \\
90x_1 + 20x_2 \geq 180, \\
40x_1 + 78x_2 \geq 180, \\
70x_1 + 15x_2 \geq 180, \\
90x_1 \geq 180, \\
x_1 + x_2 \leq 40{,}5,
\end{cases}
$$
$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0.$$

Контрольные вопросы

1. Что такое математическое программирование?
2. Сформулируйте задачу линейного программирования.
3. Какие характерные особенности задач математического программирования?
4. Опишите структуру общей задачи линейного программирования.
5. Дайте определение для следующих понятий: план, допустимый план, оптимальный план, решение задачи.
6. Какие ограничения называются совместными, а какие несовместными?
7. Какое решение задачи называется допустимым, а какое оптимальным?
8. Назовите основные этапы процесса построения моделей математического программирования и дайте характеристику каждому этапу.

Варианты задач для самостоятельного решения

Задача №1.1

Инвестор принимает решение относительно вложения имеющегося у него капитала. Набор характеристик потенциальных объектов для инвестирования, которые имеют названия от *A* до *F*, задается табл. 1.4.

Таблица 1.4 – Характеристики потенциальных объектов для инвестирования

Название	Прибыльность, (в %)	Срок выкупа, (год)	Надежность, (в баллах)
A	5,5	2009	5
B	6,0	2013	4
C	8,0	2018	2
D	7,5	2010	3
E	5,5	2008	5
F	7,0	2011	4

Предположим, что при принятии решения о приобретении активов должны быть соблюдены условия:

а) суммарный объем капитала, который должен быть вложен, составляет 100 000 ден.ед.;

б) доля средств, вложенная в один объект, не может превышать четверти от всего объема;

в) больше половины всех средств должны быть вложены в долгосрочные активы (допустим, на рассмотренный момент к таким относятся активы со сроком погашения после 2012 г.);

г) часть активов, которые имеют надежность менее чем 4 балла, не может превышать трети от суммарного объема.

Постройте математическую модель, позволяющую получить максимальную суммарную прибыль от размещения активов, которую получит инвестор.

Задача №1.2

В институте проводится конкурс на лучшую стенгазету.

Одному студенту дано следующее поручение:

1) купить акварельный краски по цене 30 ден.ед. за коробку, цветные карандаши по цене 20 ден.ед. за коробку, линейки по цене 12 ден.ед., блокноты по цене 10 ден.ед.;

2) красок нужно купить не менее трех коробок, блокнотов – столько, сколько коробок карандашей и красок вместе, линеек не больше пяти. На покупки выделяется не менее 300 ден.ед.

В каком количестве студент должен купить указанные предметы, чтобы общее число предметов было наибольшим?

Задача №1.3

Фирма выпускает три вида изделий. В процессе производства используются три технологических операции. На рис. 1.1 показана технологическая схема производства изделий.

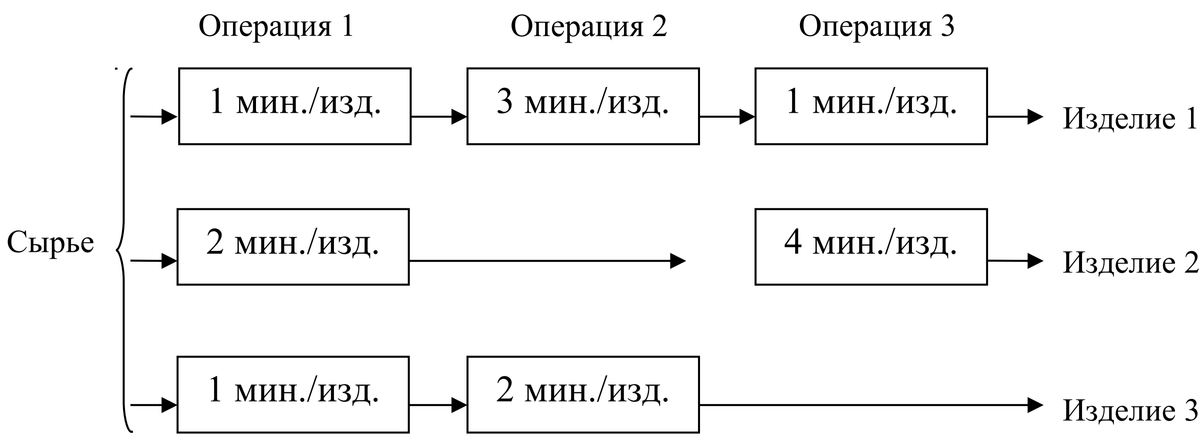

Рисунок 1.1 – Технологическая схема производства

Фонд рабочего времени ограничен следующими предельными значениями: для первой операции – 430 мин.; для второй операции – 460 мин.; для третьей операции – 420 мин. Изучение рынка сбыта показало, что ожидаемая прибыль от продажи одного изделия видов 1, 2 и 3 составляет 3, 2 и 5 ден.ед. соответственно.

Постройте математическую модель, которая позволяет найти наиболее удобный суточный объем производства каждого вида продукции?

Задача №1.4

При изготовлении изделий B_1 и B_2 используются сталь и цветные металлы, а также токарные и фрезерные станки. По технологическим нормам на производство единицы изделия B_1 нужно 300 и 200 станко-часов соответственно токарного и фрезерного оборудования, а также 10 и 20 кг соответственно стали и цветных металлов. Для производства единицы изделия B_2 нужно 400, 100, 70 и 50 соответствующих единиц тех же ресурсов.

Цех располагает 12400 и 6800 станко-часов соответственно токарного и фрезерного оборудования и 640 и 840 кг соответственно стали и цветных металлов. Прибыль от реализации единицы изделия B_1 составляет 6 ден.ед. и от единицы изделия B_2 – 16 ден.ед.

Постройте математическую модель задачи, используя как показатель эффективности прибыль и учитывая то, что время работы фрезерных станков должно использоваться полностью.

Задача №1.5

Из вокзала можно отправлять каждый день курьерские и быстрые поезда. Вместительность вагонов и имеющийся парк вагонов на станции указаны в табл. 1.5.

Таблица 1.5 – Вместительность вагонов и имеющийся парк вагонов на станции

Характеристики парка вагонов	Тип вагона				
	Багажный	Почтовый	Плацкартный	Купейный	Мягкий
Число вагонов в поезде, шт.:					
курьерском	1	–	5	6	3
быстром	1	1	8	4	1
Вместительность вагонов, чел.	–	–	58	40	32
Имеющийся парк вагонов, шт.	12	8	81	70	27

Постройте математическую модель задачи, на основании которой можно найти такое соотношение между числом курьерских и быстрых поездов, чтобы число пассажиров, которые отправляются каждый день, достигло максимума.

Задача №1.6

Три типа автомобилей необходимо распределить между четырьмя маршрутами перевозки почтовых отправлений. Данные об организации процесса перевозок приведенные в табл. 1.6.

Таблица 1.6 – Данные об организации процесса перевозок

Тип автомобиля	Количество автомобилей, ед.	Месячный объем перевозок одним автомобилем по одному маршруту, ед.				Эксплуатационные затраты на один автомобиль по маршрутам, ден.ед.			
		I	II	III	IV	I	II	III	IV
1	50	15	10	20	50	15	20	25	40
2	20	20	25	10	10	70	28	15	45
3	30	35	50	30	45	40	70	50	65

Распределите автомобили по маршрутам перевозки почтовых отправлений так, чтобы при минимальных суммарных эксплуатационных затратах перевезти по каждому из четырех маршрутов соответственно не менее 300, 200, 1000, 500 ед. почтовых отправлений.

2. ГРАФИЧЕСКИЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

2.1 Геометрическая интерпретация задач линейного программирования

Графическим методом можно решать, в основном, задачи линейного программирования, которые имеют две переменные. В случае трех переменных графический метод становится менее наглядным, а при большем числе переменных – невозможным. Он основан на *геометрическом* представлении допустимых решений и ЦФ задачи.

Запишем задачу линейного программирования с двумя переменными:

- целевая функция:

$$f(X) = c_1x_1 + c_2x_2 \to \max; \tag{2.1}$$

- ограничения:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \le b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \le b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 \le b_m, \end{cases} \tag{2.2}$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0. \tag{2.3}$$

Каждое из неравенств (2.2) – (2.3) системы ограничений задачи геометрически на координатной плоскости (x_1, x_2) определяет некоторую полуплоскость соответственно с предельными прямыми $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 = b_i$ $\left(i = \overline{1, m}\right)$; $x_1 = 0$; $x_2 = 0$ (рис. 2.1), а система неравенств в целом – пересечение соответствующих плоскостей. Множество точек пересечения данных полуплоскостей называется **областью допустимых решений** (ОДР). ОДР всегда представляет собой **выпуклую** фигуру, которая обладает следующим свойством: если две точки A и B принадлежат этой фигуре, то и весь отрезок AB принадлежит ей. В случае несовместимости системы ограничений задачи (2.2) – (2.3) ОДР является пустым множеством.

Областью допустимых решений системы неравенств (2.2) – (2.3) *может быть:*

– выпуклый многоугольник;

– выпуклая многоугольная неограниченная область;

– пустая область;

– луч;

– отрезок;

– единственная точка.

Примечание №2.1. Все вышесказанное относится и к случаю, когда система ограничений (2.2) включает равенства, поскольку любое равенство

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 = b_i$$

можно представить в виде системы двух неравенств (см. рис. 2.1)

$$\begin{cases} a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 \le b_i, \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 \ge b_i. \end{cases}$$

ЦФ $f(X) = c_1x_1 + c_2x_2$ при фиксированном значении $f(X) = f$ определяет на плоскости прямую линию $c_1x_1 + c_2x_2 = f$. Изменяя значение f, мы получим семейство параллельных прямых, которые называют **линиями уровня.**

Это связанно с тем, что изменение значения f послужит причиной изменения лишь длины отрезка, которая отсекается линией уровня на оси $0x_2$ (начальная ордината), а угловой коэффициент прямой $\text{tg}\alpha = \frac{-c_1}{c_2}$ останется постоянным (см. рис. 2.1).

Поэтому для решения будет достаточно построить одну из линий уровня, произвольно выбрав значение f.

Вектор $\vec{C} = (c_1, c_2)$ с координатами из коэффициентов ЦФ при x_1 и x_2 перпендикулярный к каждой из линий уровня (см. рис. 2.1). ***Направление вектора*** $\vec{C}$ ***совпадает*** с направлением ***роста*** ЦФ, что является важным моментом для решения задач. Направление ***убывания*** ЦФ ***противоположно*** *направлению вектора* $\vec{C}$.

Если в одной и той же системе координат изобразить область допустимых решений системы неравенств (2.2) – (2.3) и семейство параллельных прямых (2.1), то задача определения максимума функции f сведется к нахождению в допустимой области точки, через которую проходит прямая из семейства $f = \text{const}$, и которая соответствует наибольшему значению параметра f.

Эта точка существует тогда, когда многоугольник решений не пустой и на нем целевая функция ограничена сверху. При указанных условиях в одной из вершин многоугольника решений целевая функция принимает максимальное значение.

Для определения данной вершины необходимо построить линию уровня

$$c_1x_1 + c_2x_2 = 0, \tag{2.4}$$

которая проходит через начало координат и перпендикулярную вектору $\vec{C} = (c_1, c_2)$. Эта линия уровня строится следующим образом. В левой части уравнения (2.4) стоит скалярное произведение двух векторов $\vec{C} = (c_1, c_2)$ и $\vec{X} = (x_1, x_2)$. Если скалярное произведение векторов равно нулю, то векторы перпендикулярны.

Построим вектор $\vec{C}$ [он проходит через начало координат и точку (c_1, c_2)] и перпендикулярно ему через начало координат провести прямую – это и будет прямая (2.4).

Суть графического метода заключается в следующем. По направлению (против направления) вектора $\vec{C}$ в ОДР проводится поиск оптимальной точки $X^* = (x_1^*, x_2^*)$. Оптимальной считается точка, через которую проходит линия уровня $f_{\max}$ ($f_{\min}$), что соответствует наибольшему (наименьшему) значению функции $f(X)$. Оптимальное решение всегда находится на границе ОДР, например, в последней вершине многоугольника ОДР, через которую пройдет целевая прямая, или на всей ее стороне.

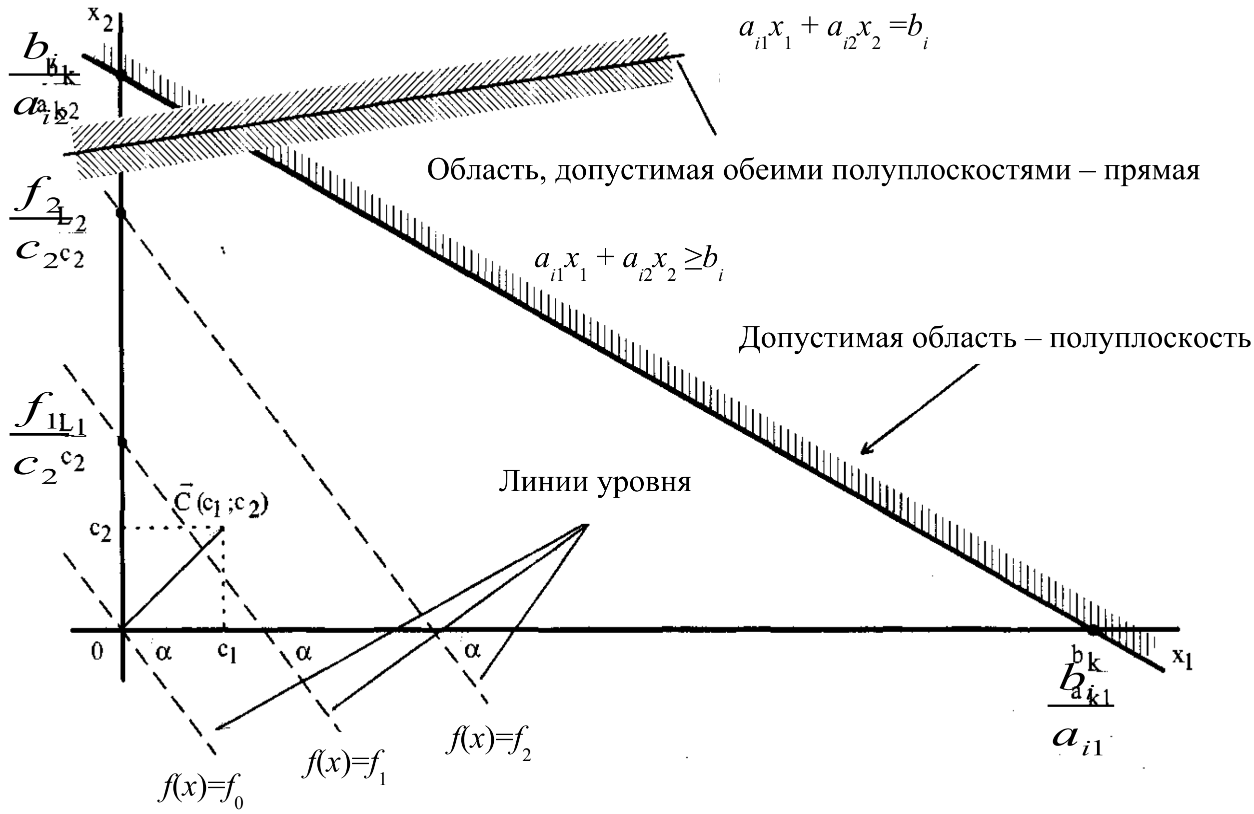

Рисунок 2.1 – Геометрическая интерпретация ограничений и ЦФ задачи ЛП

При поиске оптимального решения задачи ЛП возможны следующие ситуации: существует единое решение задачи; существует бесконечное множество решений (**альтернативный оптимум**); ЦФ не ограничена; область допустимых решений – единственная точка; задача не имеет решений.

Рис. 2.2 характеризует такой случай, когда целевая функция принимает максимальное значение в единственной точке *A*. Из рис. 2.3 видно, что целевая функция принимает максимальное значение в любой точке отрезка *AB*.

На рис. 2.4 изображен случай, когда максимум недостижимый, а на рис. 2.5 – случай, когда система ограничений задачи несовместна. Отметим, что нахождение минимального значения f при данной системе ограничений отличается от нахождения ее максимального значения при тех же ограничениях лишь тем, что линия уровня f передвигается не в направлении вектора $\vec{C} = (c_1, c_2)$, а в противоположном направлении. Таким образом, отмеченные выше случаи, которые встречаются при нахождении максимального значения целевой функции, имеют место и при определении ее минимального значения.

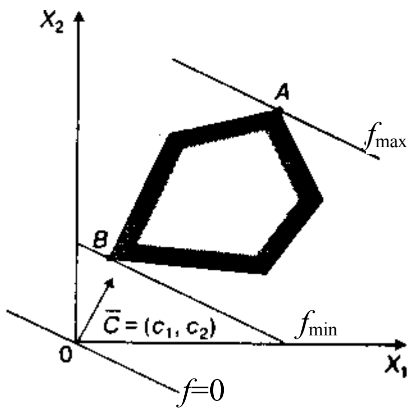

Рисунок 2.2 – Оптимум функции f достижим в точке A

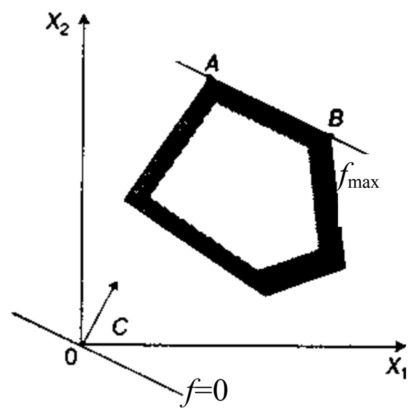

Рисунок 2.3 – Оптимум функции f достигается в любой точке $|AB|$

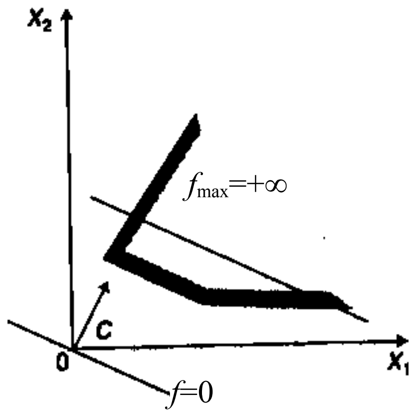

Рисунок 2.4 – Оптимум функции f не достижим

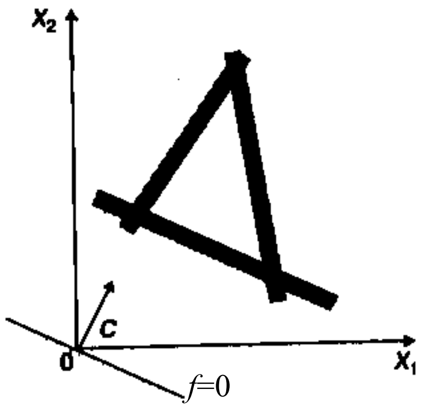

Рисунок 2.5 – Область допустимых решений – пустая область

2.2 Методика решения задач линейного программирования графическим методом

Для практического решения задачи линейного программирования (2.1) – (2.3) на основе ее геометрической интерпретации необходимо:

1. Построить прямые, уравнения которых получают в результате замены в ограничениях (2.2) – (2.3) знаков неравенств на знаки равенств.

2. Найти полуплоскости, обусловленные каждым из ограничений задачи. Для этого подставьте в конкретное неравенство координаты какой-нибудь точки [например, (0;0)], и проверьте истинность полученного неравенства.

Если неравенство истинно,
то необходимо заштриховать полуплоскость, которая содержит данную точку;
иначе (неравенство ошибочно) нужно заштриховать полуплоскость, которая не содержит данную точку.

Поскольку x_1 и x_2 должны быть неотрицательными, то их допустимые значения всегда будут находиться выше оси $0x_1$ и правее оси $0x_2$, т.е. в I-ом квадранте.

3. Определить многоугольник решений. Определить ОДР как часть плоскости, которая принадлежит одновременно всем разрешенным областям, и выделить ее. При отсутствии ОДР задача ***не имеет решений,*** о чем делается соответствующий вывод.

4. Построить вектор $\vec{C} = (c_1, c_2)$, который начинается в точке (0;0) и заканчивается в точке (c_1, c_2).

5. Если ОДР не пустое множество, то построить целевую прямую $f = c_1x_1 + c_2x_2 = L$, где L – произвольное число, например, кратное c_1 и c_2, т.е. удобное для проведения расчетов. Способ построения аналогичный построению прямых ограничений.

6. При поиске max ЦФ необходимо передвигать целевую прямую ***в направлении*** вектора $\vec{C}$, при поиске min ЦФ – ***против направления*** вектора $\vec{C}$. Последняя по ходу движения вершина ОДР буде точкой max или min ЦФ. Если такой точки (точек) не существует, то делается вывод о ***неограниченности ЦФ на множестве планов*** сверху (при поиске max) или снизу (при поиске min).

7. Определить координаты точки max (min) ЦФ $X^* = (x_1^*, x_2^*)$ и вычислить значение ЦФ $f(X^*)$. Для вычисления координат оптимальной точки X^* решается система уравнений прямых, на пересечении которых находится X^*.

Пример №2.1. Рассмотрим решение задачи об ассортиментах продукции (пример №1.1) геометрическим способом, модель которой имеет вид:

$$f(X) = 3x_1 + 4x_2 \to \max,$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \le 9, \\ 3x_1 + 2x_2 \le 13, \\ x_1 - x_2 \le 1, \\ x_2 \le 2, \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0.$$

Решение

Построим многоугольник решений (рис. 2.6). Для этого вычислим координаты точек пересечения прямых ограничений с осями координат и на плоскости $x_1 0 x_2$ изобразим эти предельные прямые:

$$2x_1 + 3x_2 = 9 \qquad (L_1);$$
$$3x_1 + 2x_2 = 13 \qquad (L_2);$$
$$x_1 - x_2 = 1 \qquad (L_3);$$
$$x_2 = 2 \qquad (L_4).$$

$$L_1: \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 4{,}5 \\ x_2 = 0 \end{cases}; \quad L_2: \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 6{,}5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 4{,}3 \\ x_2 = 0 \end{cases}; \quad L_3: \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 0 \end{cases};$$

Прямая (L_4) проходит через точку $x_2 = 2$ параллельно оси $0x_1$.

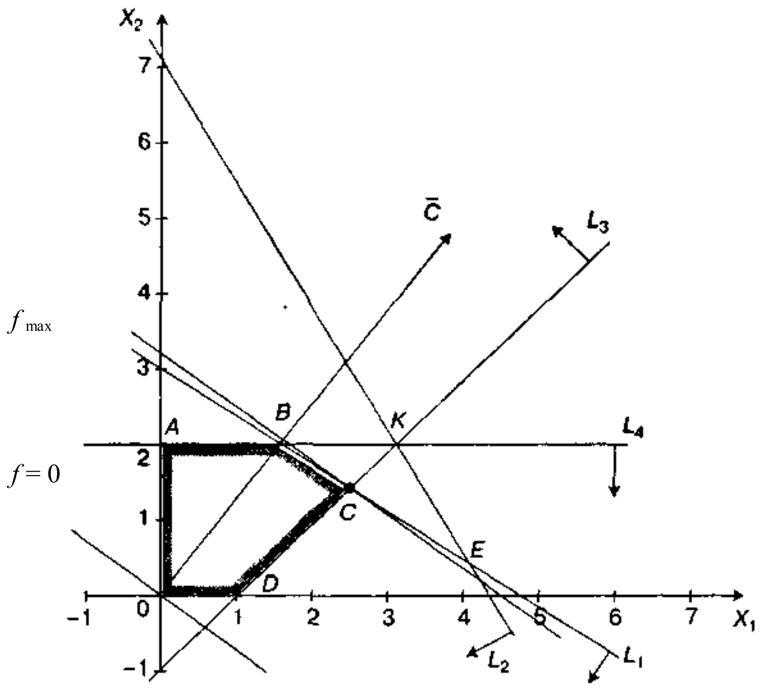

Рисунок 2.6 – Решение задачи линейного программирования геометрическим способом

Определим ОДР. Взяв какую-нибудь точку, например начало координат, установим, какую полуплоскость определяет соответствующее неравенство. Например, подставим точку (0;0) в исходное ограничение (L_1), получим $0 < 9$, что является истинным неравенством, поэтому стрелкой (или штрихованием) обозначим полуплоскость, которая ***содержит*** точку (0;0), т.е. расположенную левее и ниже прямой (L_1). Аналогично определим допустимые полуплоскости для остальных ограничений и укажем их стрелками у соответствующих прямых ограничений (см. рис. 2.6). Областью допустимых решений является многоугольник $0ABCD$.

Для построения прямой $f = 3x_1 + 4x_2 = 0$ строим вектор-градиент $\vec{C} = (3; 4)$ и через точку 0 проводим прямую, перпендикулярную ему. Построенную прямую $f = 0$ перемещаем параллельно самой себе в направлении вектора $\vec{C}$. Из рис. 2.6 следует, что относительно многоугольника решений опорной эта прямая становится в точке C, где функция принимает максимальное значение. Точка C лежит на пересечении прямых L_1 и L_3. Для определения ее координат решим систему уравнений:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 9, \\ x_1 - x_2 = 1, \end{cases}$$

$$C(2{,}4; 1{,}4), \text{ [ед. продукции/сутки].}$$

Оптимальный план задачи $x_1 = 2{,}4$; $x_2=1{,}4$. Подставляя значение x_1 и x_2 в линейную функцию, получим:

$$f_{\max} = 3 \cdot 2{,}4 + 4 \cdot 1{,}4 = 12{,}8 \text{ [ден.ед./сутки].}$$

Полученное решение означает, что объем производства продукции $П_1$, должен быть равен 2,4 ед.продукции в сутки, а продукции $П_2$ – 1,4 ед.продукции в сутки. Доход, получаемый в этом случае, составит $f = 12{,}8$ ден.ед. в сутки.

Пример №2.2. Решим задачу геометрическим способом, модель которой имеет вид:

$$f(X) = -2x_1 - x_2 \to \max(\min),$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 \le 16, \\ -4x_1 + 2x_2 \le 8, \\ x_1 + 3x_2 \ge 9, \\ 6x_1 + 5x_2 = 30, \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$$

Решение

Построим многоугольник решений (рис. 2.7). Для этого вычислим координаты точек пересечения прямых ограничений с осями координат и на плоскости x_10x_2 изобразим эти предельные прямые:

$$2x_1 + 4x_2 = 16 \qquad (L_1);$$
$$-4x_1 + 2x_2 = 8 \qquad (L_2);$$
$$x_1 + 3x_2 = 9 \qquad (L_3);$$
$$6x_1 + 5x_2 = 30 \qquad (L_4).$$

Построим ограничения (рис. 2.7):

$$L_1: \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 8 \\ x_2 = 0 \end{cases}; \qquad L_2: \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2 \\ x_2 = 0 \end{cases};$$

$$L_3: \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 9 \\ x_2 = 0 \end{cases}; \qquad L_4: \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -5 \\ x_2 = 0 \end{cases}.$$

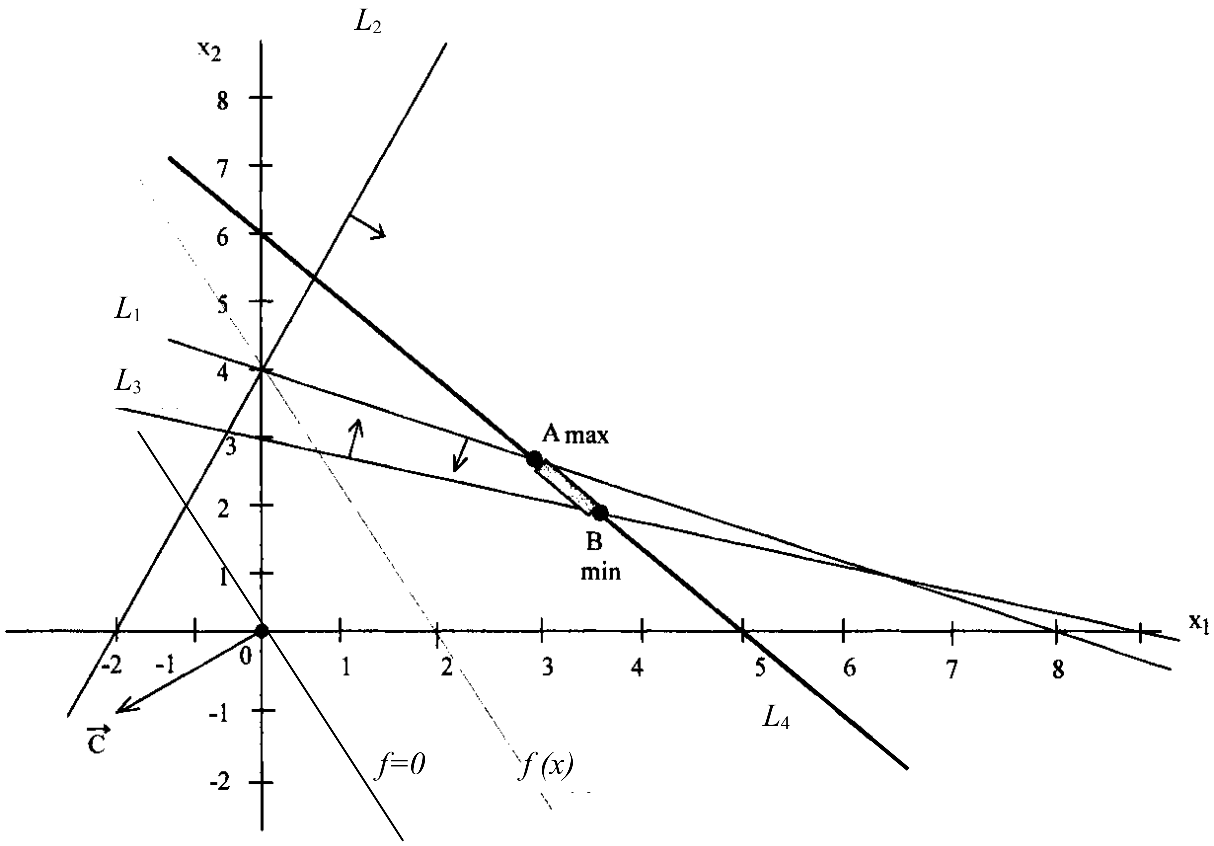

Рисунок 2.7 – Решение задачи линейного программирования геометрическим способом

Определим ОДР. Ограничение-равенство (4) допускает только точки, которые лежат на прямой (L_4). Подставим точку (0;0) в ограничение (L_3) и получим $0 > 9$, что является ошибочной неравностью, поэтому стрелкой (или штрихованием) обозначим полуплоскость, которая ***не содержит*** точку (0;0), т.е. расположенную выше прямой (L_3). Аналогично определим и укажем допустимые полуплоскости для остальных ограничений (см. рис. 2.7). Анализ полуплоскостей, допустимых остальными ограничениями-неравенствами, позволяет определить, что ОДР – это отрезок *AB*.

Для построения прямой $f = -2x_1 - x_2 = 0$ строим вектор-градиент $\vec{C} = (-2; -1)$ и через точку 0 проводим прямую, перпендикулярную ему. Для поиска минимума ЦФ построенную прямую $f = 0$ перемещаем параллельно самой себе ***против направления*** вектора $\vec{C}$. Точка B – это последняя точка отрезка AB, через которую проходит целевая прямая, т.е. B – точка минимума ЦФ.

Определим координаты точки B из системы уравнений прямых ограничений (L_3) и (L_4):

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \ge 9, \\ 6x_1 + 5x_2 = 30, \end{cases}$$

$$B(3{,}46; 1{,}85).$$

Минимальное значение ЦФ равняется:

$$f(B) = –2 \cdot 3,46 – 1 \cdot 1,85 = –8,77.$$

При поиске точки максимума ЦФ будем двигать целевую прямую ***по направлению*** вектора $\vec{C}$. Последней точкой отрезка AB, а значит и точкой максимума будет точка A. Определим координаты точки A из системы уравнений прямых ограничений (L_1) и (L_4):

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 \le 16, \\ 6x_1 + 5x_2 = 30, \\ A(2,86; 2,57). \end{cases}$$

Максимальное значение ЦФ равняется:

$$f(A) = –2 \cdot 2,86 – 1 \cdot 2,57 = –8,29.$$

Таким образом, $B(3,46; 1,85)$ – точка минимума, $F_{\min}(B) = –8,77$; $A(2,86; 2,57)$ – точка максимума, $F_{\max}(A) = –8,29$.

Пример № 2.3. Решим задачу геометрическим способом, модель которой имеет вид:

$$f(X) = x_1 – 3x_2 \to \min (\max),$$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \ge 3, \\ x_1 + x_2 \ge 5, \\ x_1 \le 4, \\ –2x_1 + x_2 \ge 2, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Решение

Построим многоугольник решений (рис. 2.8). Для этого вычислим координаты точек пересечения прямых ограничений с осями координат и на плоскости x_10x_2 изобразим эти предельные прямые:

$x_1 + 3x_2 = 3$ (L_1);
$x_1 + x_2 = 5$ (L_2);
$x_1 = 4$ (L_3);
$–2x_1 + x_2 = 2$ (L_4).

Построим ограничения (рис. 2.8):

$$L_1: \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = 0 \end{cases}; \quad L_2: \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 5 \\ x_2 = 0 \end{cases}; \quad L_4: \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = 0 \end{cases}.$$

Прямая (L_3) – проходит через точку $x_1 = 4$ параллельно оси $0x_2$.

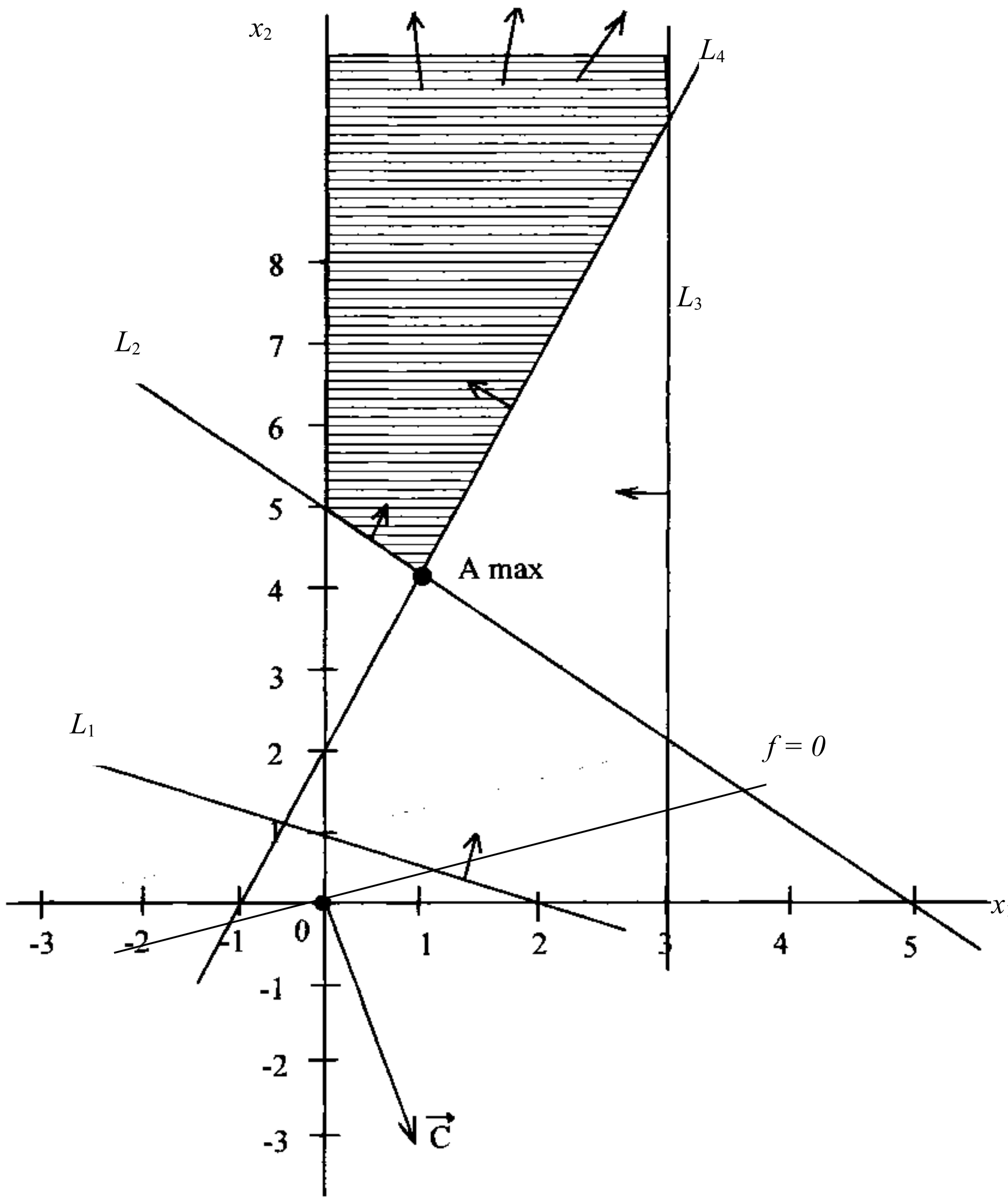

Рисунок 2.8 – Решение задачи линейного программирования геометрическим способом

Определим ОДР. Подставим точку (0;0) в ограничение (L_2), получим $0 > 5$, что является ошибочным неравенством, поэтому стрелкой (или штрихованием) обозначим полуплоскость, которая ***не содержит*** точку (0;0), т.е. расположенную правее и выше прямой (L_2).

Аналогично определим и укажем допустимые полуплоскости для остальных ограничений (см. рис. 2.8). Анализ допустимых полуплоскостей позволяет определить, что ОДР – это незамкнутая область, ограниченная прямыми (L_2), (L_3), (L_4) и осью $0x_2$.

Для построения прямой $f = x_1 - 3x_2 = 0$ строим вектор-градиент $\vec{C} = (1; -3)$ и через точку 0 проводим прямую, перпендикулярную ему. Для поиска минимума ЦФ построенную прямую $f = 0$ перемещаем параллельно самой себе ***против направления*** вектора $\vec{C}$. Поскольку в этом направлении ОДР не ограничена, то невозможно в этом направлении найти последнюю точку ОДР. Отсюда следует, что ЦФ не ограничена на множестве планов ***снизу*** (поскольку идет поиск минимума).

При поиске максимума ЦФ будем двигать целевую прямую ***по направлению*** вектора $\vec{C}$ до пересечения с вершиной A – последней точкой ОДР в этом направлении. Определим координаты точки A из системы уравнений прямых ограничений (L_2) и (L_4):

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \geq 5, \\ -2x_1 + x_2 \geq 2, \end{cases}$$

$$A(1;4).$$

Максимальное значение ЦФ равняется:

$$F(A) = 1 \cdot 1 - 3 \cdot 4 = -11.$$

Таким образом, в данной задаче ЦФ не ограничена на множестве планов ***снизу,*** а $A(1;4)$ является точкой максимума ЦФ, $F_{\max}(A) = -11$.

Контрольные вопросы

1. Условия графического решения ЗЛП.
2. Основные этапы графического решения ЗЛП.
3. Графическое толкование возможных ситуаций в решении ЗЛП.
4. Альтернативный оптимум и его графическое толкование.
5. Какую область образовывают допустимые решения ЗЛП и что она собой представляет?
6. Что такое линия уровня функции двух переменных?
7. Характерные особенности линии уровня целевой функции.
8. Где целевая функция ЗЛП достигает своего оптимального значения?

Варианты задач для самостоятельного решения

Решите задачи линейного программирования (2.1 – 2.8) графическим методом.

Задача №2.1

$$f(X) = 4x_1 - 3x_2 \to \max\ (\min),$$

$$\begin{cases} 5x_1 - 2x_2 \leq 20, \\ x_1 + 2x_2 \geq 10, \\ -7x_1 + 10x_2 \leq 80, \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Задача №2.2

$$f(X) = 5x_1 + 2x_2 \to \max\ (\min),$$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 \geq 6, \\ x_1 + 2x_2 \geq 5, \\ 4x_1 + 2x_2 \geq 8, \\ -x_1 + 2x_2 \geq 6, \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Задача №2.3

$$f(X) = x_1 + 2x_2 \to \max\ (\min),$$

$$\begin{cases} -x_1 + 3x_2 \geq 10, \\ x_1 + x_2 \leq 6, \\ x_1 + 4x_2 \geq 3, \\ -x_1 + 4x_2 \leq 6, \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Задача №2.4

$$f(X) = -2x_1 + 5x_2 \to \max\ (\min),$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \leq 12, \\ x_1 + 2x_2 = 8, \\ x_1 + x_2 \geq 5, \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Задача №2.5

$$f(X) = x_1 + 6x_2 \to \max\ (\min),$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 10, \\ 3x_1 - 3x_2 \geq 6, \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 6, \\ 3x_1 + x_2 \geq 4, \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Задача №2.6

$$f(X) = -3x_1 - 2x_2 \to \max\ (\min),$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \geq 3, \\ 2x_1 + 2x_2 \geq 2, \\ x_1 + x_2 \geq 6, \\ -2x_1 + 6x_2 \leq 20, \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Задача №2.7*

$$f(X) = x_1 + 6x_2 \to \max\ (\min),$$

$$\begin{cases} -2x_1 + 12x_2 \geq 8, \\ 4x_1 + 2x_2 \leq 10, \\ 3x_1 - 4x_2 \geq 2, \\ 4x_1 + 5x_2 \geq 8, \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Задача №2.8*

$$f(X) = 4x_1 + 2x_2 \to \max\ (\min),$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \geq 7, \\ 2x_1 + x_2 \geq 8, \\ -x_1 + 2x_2 \leq 6, \\ -2x_1 + 8x_2 \geq 4, \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0. \end{cases}$$

3. АНАЛИЗ ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТИ ОПТИМАЛЬНОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

3.1 Теоретическое введение

Неминуемые колебания значений таких экономических параметров, как цены на продукцию и сырье, запасы сырья, спрос на рынке и т.д. может привести к неоптимальности или непригодности бывшего режима работы. Для учета подобных ситуаций проводится **анализ чувствительности,** т.е. анализ того, как возможные изменения параметров исходной модели повлияют на полученное ранее оптимальное решение задачи ЛП.

При таком анализе всегда рассматривается комплекс линейных оптимизационных моделей. Это придает модели определенную динамичность, которая позволяет исследователю проанализировать влияние возможных изменений исходных условий на полученное ранее оптимальное решение. Динамические характеристики моделей фактически отображают аналогичные характеристики, присущие реальным процессам. Отсутствие методов, которые разрешают обнаруживать влияние возможных изменений параметров модели на оптимальное решение, может привести к тому, что полученное (статическое) решение устареет еще до своей реализации. Для проведения анализа модели на чувствительность с успехом могут быть использованные графические методы (табл. 3.1).

Таблица 3.1 – Возможные ситуации графического решения задач ЛП

<table>
<tr><th>№</th><th>Вид ОДР</th><th>Вид оптимального решения</th><th>Примечания</th></tr>
<tr><td rowspan="3">1.1
1.2
1.3</td><td rowspan="3">Многоугольная замкнутая</td><td>Единое решение</td><td>ЦФ(X) → max</td></tr>
<tr><td>Единое решение</td><td>ЦФ(X) → min</td></tr>
<tr><td>Бесконечное множество решений</td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="4">2.1
2.2
2.3
2.4</td><td rowspan="4">Многоугольная незамкнутая</td><td>ЦФ не ограниченная снизу</td><td></td></tr>
<tr><td>ЦФ не ограниченная сверху</td><td></td></tr>
<tr><td>Единое решение</td><td>ЦФ(X) → max</td></tr>
<tr><td>Бесконечное множество решений</td><td>ЦФ(X) → min</td></tr>
<tr><td rowspan="3">3.1
3.2
3.3</td><td rowspan="3">Луч</td><td>Единое решение</td><td rowspan="3">Количество ограничений больше одного</td></tr>
<tr><td>ЦФ не ограниченная сверху</td></tr>
<tr><td>ЦФ не ограниченная снизу</td></tr>
<tr><td rowspan="2">4.1
4.2</td><td rowspan="2">Отрезок</td><td>Единое решение</td><td></td></tr>
<tr><td>Бесконечное множество решений</td><td></td></tr>
<tr><td>5</td><td>Единственная точка</td><td>Единое решение</td><td>Все ограничения – неравенства</td></tr>
<tr><td>6</td><td></td><td>Решений нет</td><td>Все ограничения – неравенства</td></tr>
<tr><td>7</td><td></td><td>Решений нет</td><td>Все ограничения – неравенства</td></tr>
<tr><td>8</td><td></td><td>Решений нет</td><td>Ограничение в виде равенств и неравенств</td></tr>
</table>

Для решения задачи анализа чувствительности, ограничения линейной модели классифицируются таким способом. **Связывающие (активные)** ограничения проходят через оптимальную точку. **Несвязывающие (неактивные)** ограничения не проходят через оптимальную точку. Аналогично ресурс, который представляется связывающим ограничением, называют **дефицитным,** а ресурс, который представляется несвязывающим ограничением – **недефицитным.** Ограничения называют **избыточным** в том случае, если его исключение не влияет на ОДР и на оптимальное решение. Выделяют следующие три задачи анализа на чувствительность.

1. Анализ изменения запаса ресурсов:

– на сколько можно увеличить (ограничение типа ≤) запас ***дефицитного*** ресурса для улучшения оптимального значения ЦФ?

– на сколько можно уменьшить (ограничение типа ≤) запас ***недефицитного*** ресурса при сохранении оптимального значения ЦФ?

2. Определение наиболее выгодного ресурса:

– увеличение (ограничение типа ≤) запаса которого из ресурсов наиболее выгодно?

3. Определение пределов изменения коэффициентов целевой функции:

– при каком диапазоне изменения коэффициентов целевой функции не меняется оптимальное решение?

3.2 Методика графического анализа чувствительности оптимального решения

Задача 1. Анализ изменения запаса ресурсов.

После нахождения оптимального решения представляется целиком логичным выяснить, как отразится на оптимальном решении изменение запасов ресурсов. Для этого необходимо ответить на два вопроса:

1. На сколько можно увеличить запас некоторого ресурса для улучшения полученного оптимального значения целевой функции f?
2. На сколько можно снизить запас некоторого ресурса при сохранении полученного оптимального значения целевой функции f?

Прежде чем ответить на поставленные вопросы, классифицируем ограничение линейной модели как связывающие (активные) и несвязывающие (неактивные) ограничения. Прямая, которая представляет связывающее ограничение, должна проходить через оптимальную точку, в противном случае, которому отвечает ограничение будет несвязывающим. На рис. 2.6 связывающими ограничениями являются ограничения (1) и (3), представленные прямыми L_1 и L_3 соответственно, т.е. те, которые определяют запасы исходных ресурсов. Ограничение (1) определяет запасы сырья A. Ограничение (3) определяет соотношение спроса на выпускаемую продукцию.

Если некоторое ограничение является связывающим, то соответствующий ресурс относят к разряду дефицитных ресурсов, так как он используется полностью.

Таким образом, понятие ***"связывающие ограничения"*** (1) и (3) означает, что при производстве продукции в точке C(2,4; 1,4) запасы ресурсов A и B тратятся ***полностью*** и по этой причине невозможно дальнейшее наращивание производства. В этом заключается экономическое содержание понятия ***дефицитности*** ресурсов, т.е. если фирма сможет увеличить суточные запасы ресурсов, то это разрешит увеличить выпуск продукции. В связи с этим возникает вопрос: к какому уровню целесообразно увеличить запасы ресурсов и на сколько при этом увеличится ***оптимальное*** производство продукции?

Правило №3.1. **Чтобы** графически определить максимальное увеличение запаса дефицитного ресурса, который вызывает ***улучшение*** оптимального решения, **необходимо** передвигать соответствующую прямую в направлении ***улучшения*** ЦФ до тех пор, пока это ограничение не станет ***избыточным***.

Ресурс, с которым ассоциированное несвязывающее ограничение, следует отнести к разряду недефицитных ресурсов (т.е. имеющихся в некотором излишке). В нашем примере несвязывающими ограничениями есть (2) и (4). Итак, ресурс – сырье B – недефицитный, т.е. есть в излишке, а спрос на продукцию $П_2$ не будет удовлетворен полностью (в табл. 3.2 – ресурсы 2 и 4).

При анализе модели на чувствительность к правым частям ограничений определяются: 1) предельно допустимое увеличение запаса дефицитного ресурса, который разрешает улучшить найденное оптимальное решение, и 2) предельно допустимое снижение запаса недефицитного ресурса, который не изменяет найденное ранее оптимальное значение целевой функции.

В нашем примере сырье A и соотношение спроса на выпускаемую продукцию $П_1$ и $П_2$ являются дефицитными ресурсами (в табл. 3.2 – ресурсы 1, 3).

Рассмотрим сначала ресурс – сырье A. На рис. 3.1, при увеличении запаса этого ресурса, прямая L_1 перемещается вверх, параллельно самой себе, к точке K, в которой пересекаются линии ограничений L_2, L_3 и L_4.

В точке K ограничения (2), (3) и (4) становятся связывающими; оптимальному решению при этом соответствует точка K, а пространством (допустимых) решений становится многоугольник $AKD0$. В точке K ограничение (1) (для ресурса A) становится избыточным, так как любой дальнейший рост запаса соответствующего ресурса не влияет ни на пространство решений, ни на оптимальное решение.

Таким образом, объем ресурса A не следует увеличивать сверх того предела, когда соответствующее ему ограничение (1) становится избыточным, т.е. прямая (1) проходит через новую оптимальную точку K.

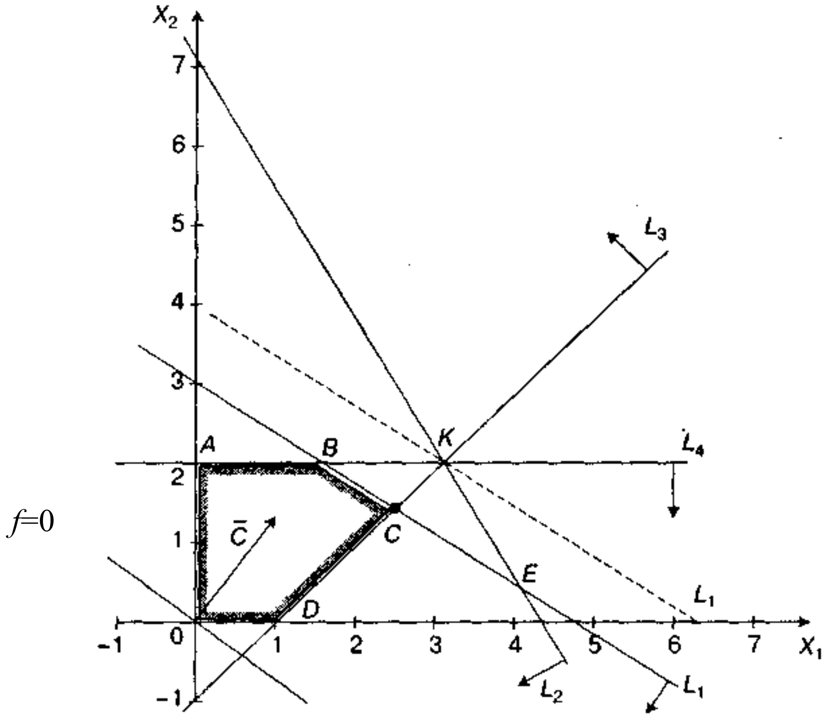

Рисунок 3.1 – Геометрическая интерпретация решения задачи линейного программирования (изменение ресурса A)

Правило №3.2. **Чтобы** *численно* определить максимальную величину запаса дефицитного ресурса, который вызывает улучшение оптимального решения, **необходимо:**

1) определить координаты точки (x_1; x_2), в которой соответствующее ограничение становится *избыточным;*

2) подставить координаты (x_1; x_2) в *левую часть* соответствующего ограничения.

Координаты точки K, в которой пересекаются прямые L_2, L_3 и L_4, находятся путем решения системы уравнений:

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = 13, \\ x_1 - x_2 = 1, \\ x_2 = 2. \end{cases}$$

В результате получается $x_1 = 3$ и $x_2 = 2$. Затем, путем подстановки координат точки K в левую часть ограничения (1), определяется максимально допустимый запас ресурса A:

$$2x_1 + 3x_2 = 2 \cdot 3 + 3 \cdot 2 = 12 \text{ [ед.сырья } A\text{/сутки]}.$$

Дальнейшее увеличение запаса сырья A нецелесообразно, так как это *не изменит* ОДР и *не приведет* к другому оптимальному решению (см. рис. 3.1). Доход от продажи продукции в объеме, который соответствует точке K, можно рассчитать, подставив ее координаты (3; 2) в выражение ЦФ:

$$3x_1 + 4x_2 = 3 \cdot 3 + 4 \cdot 2 = 17 \text{ [ден.ед./сутки]}.$$

Рассмотрим вопрос об изменении соотношения спроса на продукцию П$_1$ и П$_2$. Согласно правилу №3.1, новой оптимальной точкой становится точка *E,* где пересекаются прямые L_1 и L_2.

Рис. 3.2 иллюстрирует ситуацию, когда рассматривается вопрос об изменении соотношения спроса на продукцию П$_1$ и П$_2$.

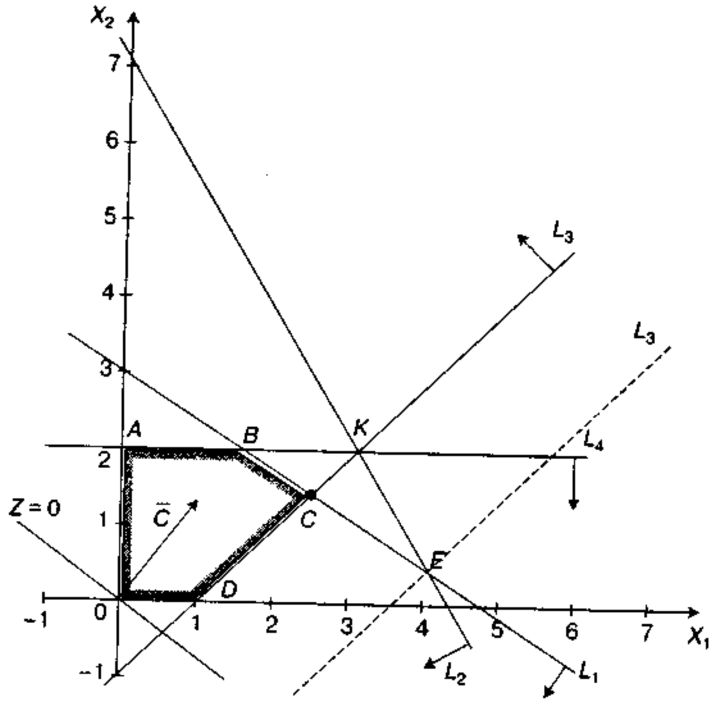

Рисунок 3.2. – Геометрическая интерпретация решения задачи линейного программирования (изменение спроса на продукцию)

Координаты данной точки (правило №3.2) находятся путем решения системы уравнений (1) и (2) следующим образом:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 9, \\ 3x_1 + 2x_2 = 13. \end{cases}$$

В результате получается $x_1 = 4{,}2$; $x_2 = 0{,}2$, причем суточный спрос на продукцию П$_1$ не должен превышать спрос на продукцию П$_2$ на величину $x_1 - x_2 = 4{,}2 - 0{,}2 = 4$ ед. продукции.

Дальнейшее увеличение разрыва в спросе на продукцию П$_1$ и П$_2$ не будет влиять на оптимальное решение. Доход от продажи продукции при этом составит:

$$3x_1 + 4x_2 = 3 \cdot 4{,}2 + 4 \cdot 0{,}2 = 13 \text{ [ден.ед./сутки]}.$$

Ограничения (2) и (4) являются ***несвязывающими,*** так как не проходят через оптимальную точку *C* (см. рис. 2.6). Соответствующие им ресурсы (запас ресурса *B* и спрос на продукцию П$_2$) являются ***недефицитными.*** С экономической точки зрения это означает, что в этот момент уровень ресурсов на продукцию *непосредственно* не определяет объемы производства. Поэтому некоторые их колебания никак не могут повлиять на оптимальный режим производства в точке C. Рассмотрим вопрос об уменьшении правой части этих несвязывающих ограничений.

Правило №3.3. **Чтобы** определить максимальное уменьшение запаса недефицитного ресурса, который *не меняет* оптимальное решение, **необходимо** передвигать соответствующую прямую *до пересечения с оптимальной* точкой.

Правило №3.4. **Чтобы** *численно* определить минимальную величину запаса недефицитного ресурса, который не меняет оптимальное решение, **необходимо** подставить координаты *оптимальной* точки в *левую часть* соответствующего ограничения.

Ограничение (4) $x_2 \le 2$ фиксирует предельный уровень спроса на продукцию $П_2$. Из рис. 2.6 следует, что, не изменяя оптимального решения, прямую L_4 (AB) можно опускать вниз до пересечения с оптимальной точкой C. Так как точка C имеет координаты $x_1 = 2{,}4$; $x_2 = 1{,}4$, уменьшение спроса на продукцию $П_2$ до величины $x_2 = 1{,}4$ никак не повлияет на оптимальность полученного ранее решения.

Рассмотрим ограничение (2) $3x_1 + 2x_2 \le 13$, что представляет собой ограничение на недефицитный ресурс – сырье B. И в этом случае правую часть – запасы сырья B – можно уменьшать до тех пор, пока прямая L_2 не достигнет точки C. При этом правая часть ограничения (2) станет равной $3x_1 + 2x_2 = 3 \cdot 2{,}4 + 2 \cdot 1{,}4 = 10{,}0$, что позволяет записать это ограничение в виде: $3x_1 + 2x_2 \le 10$. Этот результат показывает, что ранее полученное оптимальное решение не изменится, если суточный запас ресурса B уменьшить на 3 ед.

Результаты проведенного анализа можно свести в табл. 3.2:

Таблица 3.2 – Результат анализа ресурсов

Ресурс	Тип ресурса	Максимальное изменение запаса ресурса, $\max\Delta R_i$, ед.	Максимальное увеличение дохода от изменения ресурса, $\max \Delta f(X^*)$, ден. ед.
1 (A)	Дефицитный	12 – 9 = +3	17 – 12,8 = +4,2
2 (B)	Недефицитный	10 – 13 = –3	12,8 – 12,8 = 0
3	Дефицитный	4 – 1 = +3	13,4 – 12,8 = +0,6
4	Недефицитный	1,4 – 2 = –0,6	12,8 – 12,8 = 0

Задача 2. Определение наиболее выгодного ресурса.

В задаче 1 анализа на чувствительность было исследовано влияние на оптимум увеличения объема дефицитных ресурсов. При ограничениях, связанных с дополнительным привлечением ресурсов, естественно задать вопрос: какому из ресурсов следует отдать предпочтение при вложении дополнительных средств? Для этого вводится характеристика ценности каждой дополнительной единицы дефицитного ресурса, выражаемая через соответствующее приращение оптимального значения целевой функции. Такую характеристику для рассматриваемого примера можно получить непосредственно из табл. 3.2, в которой приведены результаты решения задачи

1 на чувствительность. Обозначим ценность дополнительной единицы ресурса i через y_i. Величина y_i определяется из соотношения

$$y_i = \frac{max\,\Delta f\left(X^*\right)}{max\,\Delta R_i},$$

где $\max\Delta f(X^*)$ – максимальное приращение оптимального значения ЦФ;

$\max\Delta R_i$ – максимально допустимый прирост объема i-го ресурса.

Результаты расчета ценности единицы каждого из ресурсов представлены в табл. 3.3:

Таблица 3.3 – Результаты расчета ценности ресурсов

Ресурс i-го вида	Тип ресурса	Значение y_i
1 (A)	Дефицитный	4,2 / 3 = 1,4
2 (B)	Недефицитный	0 / (–3) = 0
3	Дефицитный	0,6 / 3 = 0,2
4	Недефицитный	0 / (–0,6) = 0

С табл. 3.3 видно, что увеличение суточного запаса ресурса A [ограничение (1)] на 3 ед. продукции позволит получить дополнительный доход, равный y_1 = 1,4 ден.ед./сутки, а увеличение разрыва в спросе на продукцию $П_1$ и $П_2$ [ограничение (3)] принесет дополнительный доход в размере y_3 = 0,2 ден.ед./сутки.

Недефицитные ресурсы имеют нулевые ценности, поскольку изменение этих ресурсов не приводит к увеличению дохода.

Таким образом, полученные результаты свидетельствуют о том, что дополнительные вложения в первую очередь следует направить на увеличение ресурса A и лишь затем – на формирование соотношения спроса на продукцию $П_1$ и продукцию $П_2$. Что касается недефицитных ресурсов, то, как и следовало ожидать, их объем увеличивать не следует.

Задача 3. Определение пределов изменения коэффициентов целевой функции.

Изменение цен на продукцию, т.е. изменение коэффициентов целевой функции влияет на наклон прямой, которая представляет эту функцию в принятой системе координат. Так, при увеличении коэффициента ЦФ c_1 или уменьшении c_2 целевая прямая оборачивается ***за*** часовой стрелкой. При уменьшении c_1 или же увеличении c_2 целевая прямая оборачивается ***против*** часовой стрелки.

Вариация коэффициентов целевой функции может привести к изменению совокупности связывающих ограничений и, следовательно, статуса того или иного ресурса (т.е. сделать недефицитный ресурс дефицитным, и наоборот).

При анализе модели на чувствительность к изменениям коэффициентов целевой функции необходимо исследовать следующие вопросы:

1. Какой диапазон изменения того или иного коэффициента целевой функции, при котором не происходит изменение оптимального решения?

2. На сколько следует изменить тот или иной коэффициент целевой функции, чтобы сделать некоторый недефицитный ресурс дефицитным, и, наоборот, дефицитный ресурс сделать недефицитным?

Ответим на поставленные вопросы на примере.

Рассматривая первый вопрос, обозначим через c_1 и c_2 доходы предприятия от продажи единицы продукции $П_1$ и $П_2$ соответственно. Тогда целевую функцию можно представить в следующем виде:

$$f = c_1x_1 + c_1x_2.$$

На рис. 2.6 видно, что при увеличении c_1 или уменьшении c_2 прямая, представляющая целевую функцию f, вращается (вокруг точки C) по часовой стрелке. Если же c_1 уменьшается или c_2 увеличивается, эта прямая вращается в противоположном направлении – против часовой стрелки. Таким образом, точка C будет оставаться оптимальной точкой до тех пор, пока наклон прямой не выйдет за пределы, определяемые наклонами прямых для ограничений (1) и (3).

Когда наклон прямой f станет равным наклону прямой L_1, получим две альтернативные оптимальные угловые точки – C и B. Аналогично, если наклон прямой f станет равным наклону прямой для ограничения (3), будем иметь альтернативные оптимальные угловые точки C и D. Наличие альтернативных оптимумов свидетельствует о том, что одно и то же оптимальное значение f может достигаться при разных значениях переменных x_1 и x_2. Как только наклон прямой выйдет за пределы указанного выше интервала c_1, получим некоторое новое оптимальное решение.

Рассмотрим на примере, каким образом можно найти допустимый интервал изменения c_1 при котором точка C остается оптимальной. Для этого применим правило №3.5 и формулу расчета тангенса угла наклона прямой (рис. 3.3).

Правило №3.5. **Чтобы** определить границы допустимого диапазона изменения коэффициента ЦФ, например min c_1 и max c_1, **необходимо** приравнять тангенс угла наклона целевой прямой поочередно к тангенсам углов наклона прямых связывающих ограничений, например tg $\alpha_{(1)}$ и tg $\alpha_{(2)}$.

Определим тангенсы углов наклона:

1) целевой прямой $f(X) = 3x_1 + 4x_2 \rightarrow \max$, учитывая то, что $c_2 = 4$ фиксированное

$$\mathrm{tg}\alpha_{\text{ЦФ}} = \frac{c_1}{c_2} = \frac{c_1}{4};$$

2) связывающего ограничения $2x_1 + 3x_2 \leq 9$

$$\mathrm{tg}\alpha_{L_1} = \frac{2}{3};$$

3) связывающего ограничения $x_1 - x_2 \leq 1$

$$\text{tg}\alpha_{L_3} = -\frac{1}{1} = -1.$$

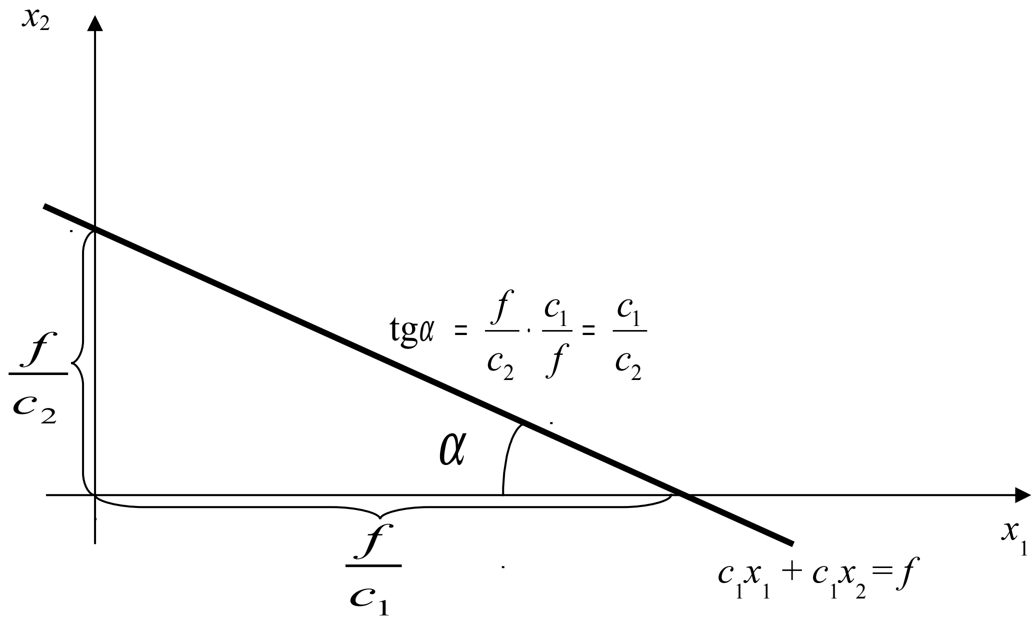

Рисунок 3.3 – Определение тангенса угла наклона tgα прямой $c_1x_1 + c_1x_2 = f$

Для нахождения min c_1 целевая прямая должна совпасть с прямой (1). Исходное значение коэффициента c_2 = 4 оставим неизменным. На рис. 2.6 видно, что значение c_1 можно уменьшать до тех пор, пока прямая f не совпадет с прямой L_1 (отрезок BC). Это крайнее минимальное значение коэффициента c_1 можно определить из равенства углов наклонов прямой f и прямой L_1 ($\text{tg}\alpha_{\text{ЦФ}} = \text{tg}\alpha_{L_1}$).

Так как тангенс угла наклона для прямой f равняется $\frac{c_1}{4}$, а для прямой (1) равняется $\frac{2}{3}$, то минимальное значение c_1 определим из равенства $\frac{c_1}{4} = \frac{2}{3}$, откуда

$$\min c_1 = \frac{8}{3} \text{ [ден. ед./ ед.].}$$

Для нахождения max c_1 целевая прямая должна совпасть с прямой (3):

$$\text{tg}\alpha_{\text{ЦФ}} = \text{tg}\alpha_{L_3},$$

$$\frac{c_1}{4} = +\infty,$$

$$\max c_1 = +\infty \text{ [ден. ед./ ед.].}$$

Из рис 2.6 видно, что значение c_1 можно увеличивать беспредельно, так как прямая f при c_2 = 4 и $c_1 \to +\infty$ не совпадает с прямой L_3 (отрезок DC) и, следовательно, точка C при всех значениях коэффициента $c_1 \geq \frac{8}{3}$ будет единственной оптимальной.

Интервал изменения c_1, в котором точка C по-прежнему остается единственной оптимальной точкой, определяется неравенством $\frac{8}{3} < c_1 < +\infty$. При $c_1 = \frac{8}{3}$ оптимальными угловыми точками будут как точка C, так и точка B. Как только коэффициент c_1 становится меньше $\frac{8}{3}$, оптимум смещается в точку B.

Можно заметить, что, как только коэффициент c_1 оказывается меньше $\frac{8}{3}$, ресурс (3) становится недефицитным, а ресурс (4) – дефицитным. Для предприятия это означает следующее: если доход от продажи единицы продукции $П_1$ станет меньше $\frac{8}{3}$ ден. ед., то наиболее удобная производственная программа предприятия должна предусматривать выпуск максимально допустимого количества продукции $П_2$ (полностью удовлетворять спрос на продукцию $П_2$).

При этом соотношение спроса на продукцию $П_1$ и $П_2$ не будет лимитировать объемы производства, что обусловит недефицитность ресурса (3). Увеличение коэффициента c_1 свыше $\frac{8}{3}$ ден. ед. не снижает проблему дефицита ресурсов (1) и (3). Точка C – точка пересечения прямых L_1 и L_3 – остается всегда оптимальной.

Контрольные вопросы

1. Какие ограничения называют связывающими и несвязывающими?
2. Выделите основные три задачи анализа чувствительности оптимального решения.
3. В чем сущность анализа изменения запасов ресурсов?
4. В чем сущность определения наиболее выгодного ресурса?
5. В чем сущность определения пределов изменения коэффициентов целевой функции?

Варианты задач для самостоятельного решения

Задача № 3.1

Проанализируйте случаи, когда цена на продукцию первого вида:

1) превысила 4 ден. ед.;
2) равняется 1 ден. ед.;
3) равняется 4 ден. ед.

Какая точка станет оптимальной, какими будут объемы производства продукции, как изменится дефицитность и объем потребления ресурсов задачи?

Задача № 3.2

Определите допустимый диапазон изменения цены на продукцию 2-го вида при неизменном значении цены на продукцию первого вида 3 ден. ед. в исходной задаче. Проанализируйте влияние изменения цены на продукцию 2-го вида на объемы производства и дефицитность ресурсов в исходной задаче (аналогично задачи №3.1).

Задача № 3.3

Пусть в задаче № 1.1 ограничение (1) для ингредиента А изменилось на $2x_1 + 3x_2 \le 10$. Определите следующие параметры задачи:

1) новое оптимальное решение X^* и $f(X^*)$;

1) максимально допустимый прирост объема ресурса *A* и соответствующее увеличение ЦФ;

2) величины y_i для всех ресурсов задачи.

Задача № 3.4

Пересчитайте виды всех ресурсов и ограничений задачи. Проведите анализ чувствительности оптимального решения для ресурсов (1), (2), (3) и цен c_1 и c_2 (табл. 3.4).

Таблица 3.4 – Параметры задачи №3.4

Модель	Координаты пересечения прямых с осями $0x_1$ и $0x_2$
$f(X) = 6x_1 + 5x_2 \to \max$ [тыс. грн.]	(2; 2,4)
$x_1 + 2x_2 \le 11$ [ед. ресурса] (1)	(11; 5,5)
$2x_1 + x_2 \le 7$ [ед. ресурса] (2)	(3,5; 7)
$2x_1 - x_2 \le 1$ [ед. ресурса] (3)	(0,5; –1)
$2x_1 + 3x_2 \ge 3$ [ед. ресурса] (4)	(1,5; 1)
$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$	$X_{\max}$ (1; 5) [ед. прод.], $f(X_{\max}) = 31$ [тыс.грн.]

*Задача № 3.5**

Используя конкретные примеры моделей задач, сформулируйте *задачи, правила, экономическую интерпретацию* анализа оптимального решения на чувствительность для следующих случаев:

1) в задаче существуют ограничения со знаком „≥”;

2) при поиске допустимого диапазона изменения цены целевая функция, вращается вокруг оптимальной точки, проходит через:

а) вертикальное положение;

б) горизонтальное положение.

*Задача № 3.6**

Некоторая фирма изготовляет продукцию двух видов с использованием трех видов ресурсов – неравенства (1), (3), (5). Неравенства (2) и (4) ограничивают соответственно минимальный суточный спрос на продукцию первого вида и максимальный суточный спрос на продукцию второго вида. ЦФ представляет собой доход от реализации продукции. Пересчитайте виды всех ресурсов и ограничений задачи и проведите полный анализ чувствительности оптимального решения (табл. 3.5).

Таблица 3.5 – Параметры задачи№3.6

Модель	Координаты пересечения прямых с осями $0x_1$ и $0x_2$
$f(X) = 5x_1 + x_2 \rightarrow \max$ [грн.]	
$-x_1 + x_2 \leq 1$ [ед. ресурса] (1)	(–1; 1)
$x_1 \geq 2$ [ед. ресурса] (2)	(2; –)
$4x_1 - 8x_2 \leq 12$ [ед. ресурса] (3)	(3; –1,5)
$x_2 \leq 6$ [ед. ресурса] (4)	(–; 6)
$3x_1 + 2x_2 \leq 21$ [ед. ресурса] (5)	(7; 10,5)
$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0$	$X_{\max}$ (6;1,5) [ед. прод.], $f(X_{\max}) = 31{,}5$ [грн.]

*Задача № 3.7**

Пересчитайте виды всех ресурсов и ограничений задачи. Проведите полный анализ чувствительности оптимального решения (табл. 3.6).

Таблица 3.6 – Параметры задачи №3.7

Модель	Координаты пересечения прямых с осями $0x_1$ и $0x_2$
$f(X) = 4x_1 + x_2 \rightarrow \max$ [грн.]	(1; 4)
$-x_1 + 4x_2 \leq 9$ [ед. ресурса] (1)	(–9; 2,3)
$3x_1 + x_2 \geq 5$ [ед. ресурса] (2)	(1,7; 5)
$x_1 + 2x_2 \leq 7$ [ед. ресурса] (3)	(7; 3,5)
$5x_1 - 8x_2 \leq -1$ [ед. ресурса] (4)	(–0,2; 0,1)
$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0$	$X_{\max}$ (3;2) [ед. прод.], $f(X_{\max}) = 14$ [грн.]

4. ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

4.1 Каноническая форма задач линейного программирования

Если задача линейного программирования имеет больше двух свободных переменных, то ее решение нуждается в применении некоторого алгебраического (численного) метода. Принцип, который лежит в основе решения задачи с множеством переменных, достаточно простой. Допускается, что оптимальному решению соответствует одна из крайних точек допустимого множества. Итак, необходимо провести оценку значений целевой функции во всех крайних точках допустимого множества и выбрать ту из них, в которой достигается оптимальное значение целевой функции. Используются методы матричной алгебры, и такой алгоритм перехода от одной крайней точки допустимого множества к другой, при котором переход осуществляется тогда, когда значение целевой функции улучшается. Если оказывается, что некоторое базисное решение улучшить уже нельзя, то оно является оптимальным планом задачи. Этот алгоритм получил название *симплекс-метода* [1, 6, 12].

В обычном симплекс-методе принимается предпосылка о максимизации целевой функции задачи линейного программирования в условиях системы ограничений со знаком "≤". Это означает, что при реализации данного алгоритма начальной крайней точкой может быть выбрано начало координат. Поиск оптимального решения всегда начинается со значения целевой функции, которое равняется нулю.

Симплекс-метод можно применять также и при решении задач минимизации, и при решении задач, система ограничений которых содержит ограничение со знаком "≥" или уравнение. Эта процедура предусматривает введение в задачу искусственных, а также избыточных и остаточных переменных.

Для решения задачи линейного программирования симплекс-методом необходимо привести ее к канонической форме.

Задача линейного программирования записана в *канонической форме* (от греческого слова «канон» – образец. Название «каноническая» равнозначно названию «типичная»), если ее целевая функция максимизируется, ограничения имеют вид равенств с неотрицательной правой частью и все переменные неотрицательны.

Задача линейного программирования в канонической форме имеет вид:

$$f = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \to \max;$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \tag{4.1}$$

$$x_j \ge 0 \left(j = \overline{1, n}\right); \quad b_i \ge 0 \left(i = \overline{1, m}\right).$$

Так как общая задача линейного программирования имеет ограничения не только вида «=», но и «≤», «≥», а целевая функция может либо максимизироваться, либо минимизироваться, то необходимо уметь приводить любые задачи линейного программирования к канонической форме. С этой целью рассмотрим два частных вида задач линейного программирования и покажем, как эти задачи привести к канонической форме.

Одна из частных задач линейного программирования может быть представлена моделью:

$$f = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \to \max;$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \le b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \le b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \le b_m, \end{cases} \tag{4.2}$$
$$x_j \ge 0 \left(j = \overline{1, n}\right); \quad b_i \ge 0 \left(i = \overline{1, m}\right).$$

Левая часть каждого ограничения данной задачи меньше либо равна правой. Для того чтобы левая часть ограничения была равна правой, необходимо к левой части каждого ограничения прибавить соответственно неотрицательные переменные x_{n+1}, x_{n+2}, …, x_{n+m}. Эти переменные вводятся в целевую функцию с нулевыми коэффициентами, чтобы не изменить ее значения.

После приведения к канонической форме задача (4.2) будет иметь вид:

$$f = c_1x_1 + \ldots + c_nx_n + 0 \cdot x_{n+1} + 0 \cdot x_{n+2} + \ldots + 0 \cdot x_{n+m} \to \max;$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + \ldots + a_{1n}x_n + x_{n+1} \qquad\qquad = b_1, \\ a_{21}x_1 + \ldots + \ldots + a_{2n}x_n \quad + \cdot\, x_{n+2} \qquad = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + \ldots + \ldots + a_{mn}x_n \qquad\qquad + x_{n+m} = b_m, \end{cases} \tag{4.3}$$
$$x_j \ge 0 \left(j = \overline{1, n + m}\right).$$

Переменные x_{n+1}, x_{n+2}, …, x_{n+m} называются *дополнительными.* Например, для задачи использования ресурсов, рассмотренной в примере №1.1, модель которой аналогична модели (4.2), дополнительные переменные будут экономически интерпретироваться как количество неиспользуемых ресурсов.

Рассмотрим другой частный вид задачи линейного программирования:

$$f = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \to \min;$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \ge b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \ge b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \ge b_m, \end{cases} \tag{4.4}$$
$$x_j \ge 0 \left(j = \overline{1, n}\right); \quad b_i \ge 0 \left(i = \overline{1, m}\right).$$

Определение минимального значения целевой функции f можно свести к определению максимального значения функции ($-f$),так как $\min f = \max(-f)$.

Для приведения ограничений вида «≥» к ограничениям-равенствам необходимо из левой части каждого ограничения вычесть соответственно неотрицательные переменные x_{n+1}, x_{n+2}, …, x_{n+m}. Эти переменные вводятся в целевую функцию с нулевыми коэффициентами, чтобы не изменить ее значения.

После приведения к канонической форме задача (4.4) будет иметь вид:

$$f = -c_1x_1 - \ldots - c_nx_n + 0 \cdot x_{n+1} + 0 \cdot x_{n+2} + \ldots + 0 \cdot x_{n+m} \to \max;$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + \ldots + a_{1n}x_n - x_{n+1} = b_1, \\ a_{21}x_1 + \ldots + \ldots + a_{2n}x_n - x_{n+2} = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + \ldots + \ldots + a_{mn}x_n - x_{n+m} = b_m, \end{cases} \tag{4.5}$$

$$x_j \geq 0 \left(j = \overline{1, n+m}\right).$$

Таким образом, если в задаче линейного программирования определяется минимум целевой функции, то такую задачу необходимо свести к определению максимума целевой функции, а все имеющиеся ограничения вида «≤» и «≥» привести к ограничениям-равенствам.

Замечание №4.1. Требование максимизации целевой функции при приведении задачи к канонической форме не обязательно и выдвигается с целью простоты изложения материала, связанного с решением задач линейного программирования симплекс-методом. Методика решения задач на минимум несколько отличается от методики решения задач на максимум. Поэтому требование максимизации целевой функции дает возможность решать задачу по единому алгоритму.

4.2 Базисные решения задач линейного программирования

Для решения задачи линейного программирования описываемым далее симплекс-методом, необходимо привести ее к канонической форме и определить исходное допустимое базисное решение. Отталкиваясь от этого решения, с помощью алгоритма симплекс-метода приходят к оптимальному решению или выводу о том, что задача решения не имеет.

Раньше отмечалось, что задача линейного программирования достигает своего оптимального решения в угловой точке многогранника решений. Координаты угловой точки – это базисное решение задачи. Определить базисное решение можно путем последовательных элементарных преобразований ограничений или специальными вычислительными приемами.

Рассмотрим ограничения задачи линейного программирования, записанной в канонической форме (4.1). Эти ограничения представляют собой систему m линейных уравнений с n переменными. Будем считать, что $m < n$, хотя на практике встречаются задачи, в которых $m > n$ и $m = n$. Система совместна и ранг ее матрицы равен m.

В ограничениях задачи (4.1) все переменные можно разделить на две группы. Первая группа – основные (зависимые) переменные, число которых должно быть равно числу линейно независимых уравнений m, вторая – неосновные (независимые) переменные, число которых будет равно $n - m$. Такое разделение не связывается с индексами (порядковыми номерами) переменных.

Будем считать, что ограничения задачи (4.1), записанной в канонической форме, путем последовательных элементарных преобразований могут быть приведены к виду

$$\begin{cases} x_1 \quad + a'_{1,m+1}x_{m+1} + \ldots + a'_{1n}x_n = b'_1, \\ \quad x_2 \quad + a'_{2,m+1}x_{m+1} + \ldots + a'_{2n}x_n = b'_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad x_m + a'_{m,m+1}x_{m+1} + \ldots + a'_{mn}x_n = b'_m, \end{cases} \tag{4.6}$$
$$b'_i \geq 0 \left(i = \overline{1, m}\right).$$

В системе (4.6) коэффициенты при каждом неизвестном $x_1, x_2, \ldots, x_m$ образуют единичные векторы:

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},\ E_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},\ \ldots,\ E_m = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Совокупность единичных векторов $E_1, E_2, \ldots, E_m$ образует *базис m-мерного* пространства, а переменные $x_1, x_2, \ldots, x_m$ называются *базисными.* Переменная является *базисной,* если она входит только в одно из уравнений системы с коэффициентом, равным единице. Все остальные переменные являются *небазисными.*

Частное решение, полученное путем приравнивания небазисных (независимых) переменных к нулю и нахождение значений базисных (зависимых) переменных, называется *базисным решением.* Следовательно, если $x_{m+1} = 0$, $x_{m+2} = 0$, ..., $x_{m+n} = 0$, то $x_1 = b'_1$, $x_2 = b'_2$, ..., $x_m = b'_m$. Первое решение задачи, полученное таким образом, называется *исходным базисным решением.*

Базисное решение называется *вырожденным,* если значения одной или нескольких базисных переменных равны нулю. Задача, которая имеет хотя бы одно вырожденное базисное решение, называется *вырожденной,* в противном случае – *невырожденной.*

При решении задачи линейного программирования базисные переменные, как правило, не выделяют путем последовательных элементарных преобразований, а пользуются специальными вычислительными приемами.

Как известно, в задаче линейного программирования может встречаться три вида ограничений: «≤», «≥» и «=». После приведения частной задачи, имеющей ограничения «≤» (4.2), к канонической форме (4.3), каждое уравнение будет содержать базисную переменную, а именно x_{n+1}, x_{n+2}, …, x_{n+m}. Приравняв небазисные переменные к нулю: $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, ..., $x_n = 0$, получим допустимое базисное решение:

$$x_{n+1} = b_1,\ x_{n+2} = b_2,\ \ldots,\ x_{n+m} = b_m.$$

После приведения частной задачи, имеющей ограничение «≥» (4.4), к канонической форме (4.5) переменные x_{n+1}, x_{n+2}, …, x_{n+m} не могут быть приняты в качестве базисных, так как они входят в уравнения с коэффициентом (–1). Поэтому для выделения базисных переменных и нахождения допустимого базисного решения используется *метод искусственного базиса,* который заключается в следующем.

В каждое ограничение задачи (4.5) вводятся соответственно искусственные неотрицательные переменные x_{n+m+1}, x_{n+m+2}, …, x_{n+m+m}, которые принимаются в качестве базисных. Искусственные переменные входят в целевую функцию задачи с коэффициентом $(-M)$, где M – большое положительное число, во много раз больше заданных в условии задачи.

После ввода искусственных переменных задача (4.5) принимает вид:

$$\begin{aligned} f = &- c_1x_1 - c_2x_2 - \ldots - c_nx_n + \\ &+ 0 \cdot x_{n+1} + 0 \cdot x_{n+2} + \ldots + 0 \cdot x_{n+m} - \\ &- M\,x_{n+m+1} - M\,x_{n+m+2} - \ldots - M\,x_{n+m+m} \rightarrow \max; \end{aligned}$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n - x_{n+1} + x_{n+m+1} = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_1 + \ldots + a_{2n}x_n - x_{n+2} + x_{n+m+2} = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m1}x_1 \ldots + a_{mn}x_n - x_{n+m} + x_{n+m+m} = b_m, \end{cases}$$

$$x_j \geq 0 \left(j = \overline{1, n+m+m} \right).$$

Искусственные переменные вводятся только с целью получения исходного базисного плана. Пока искусственная переменная является базисной, она будет принимать положительные значения (если соответствующие ей значения $b_i > 0$) и, следовательно, уменьшать значение целевой функции по сравнению с максимальным. Поскольку эти переменные имеют большие по абсолютной величине отрицательные коэффициенты, в процессе решения задачи симплекс-методом они из числа базисных переводятся в небазисные. В силу того, что значения небазисных переменных при получении базисного решения, приравниваются к нулю, искусственные переменные не будут оказывать влияния на значение целевой функции. Этот же метод используется для ограничений вида « = ».

Замечание №4.2. При получении исходного базисного плана необходимо стремиться к тому, чтобы он содержал минимальное количество искусственных переменных. Это дает возможность уменьшить число шагов для получения оптимального решения.

Рассмотрим на конкретных примерах процесс приведения задачи линейного программирования к канонической форме и получения исходного базисного решения.

4.3 Примеры приведения ЗЛП к канонической форме и получения исходного базисного решения

Пример №4.1. Привести к канонической форме и получить исходное базисное решение следующей задачи линейного программирования:

$$f = 2x_1 + x_2 - x_3 \to \max;$$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 \ge 4, \\ x_1 + x_2 - 3x_3 \le 9, \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 10, \end{cases}$$

$$x_j \ge 0 \left(j = \overline{1, 3} \right).$$

Для приведения данной задачи к канонической форме необходимо из левой части первого ограничения вычесть неотрицательную переменную x_4, а к левой части второго ограничения прибавить неотрицательную переменную x_5. Дополнительные переменные x_4 и x_5 в целевую функцию входят с нулевыми коэффициентами.

Каноническая форма данной задачи будет иметь вид:

$$f = 2x_1 + x_2 - x_3 + 0 \cdot x_4 + 0 \cdot x_5 \to \max;$$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = 4, \\ x_1 + x_2 - 3x_3 + x_5 = 9, \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 10, \end{cases}$$

$$x_j \ge 0 \left(j = \overline{1, 5} \right).$$

В первом и третьем ограничениях нельзя выделить базисные переменные, поэтому в первое ограничение вводим искусственную переменную x_6, а в третье – искусственную переменную x_7 и принимаем их в качестве базисных. В целевую функцию эти переменные войдут с коэффициентом ($-M$). В результате описанных преобразований получим:

$$f = 2x_1 + x_2 - x_3 + 0 \cdot x_4 + 0 \cdot x_5 - Mx_6 - Mx_7 \to \max;$$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 + x_6 = 4, \\ x_1 + x_2 - 3x_3 + x_5 = 9, \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_7 = 10, \end{cases}$$

$$x_j \ge 0 \left(j = \overline{1, 7} \right).$$

Для получения исходного базисного решения приравняем к нулю небазисные переменные: $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, $x_4 = 0$. Тогда значение базисных переменных: $x_6 = 4$, $x_5 = 9$, $x_7 = 10$. Подставив значение базисных переменных в целевую функцию, получим величину $f = -14M$.

Пример №4.2. Привести к канонической форме и получить исходное базисное решение следующей задачи линейного программирования:

$$f = x_1 - x_2 - x_3 - x_4 \to \min;$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \quad - x_4 \le 1, \\ -x_1 + x_2 \quad + x_4 \le 1, \\ \quad x_2 + x_3 \quad = 10, \\ x_j \ge 0 \left(j = \overline{1,4}\right). \end{cases}$$

Поскольку целевая функция данной задачи минимизируется, то умножив ее выражение на (–1), получим

$$f = -x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \to \max.$$

К левым частям первого и второго ограничений прибавим соответственно неотрицательные переменные x_5 и x_6, которые входят в целевую функцию с нулевыми коэффициентами. Тогда данная задача в канонической форме будет иметь вид:

$$f = -x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + 0 \cdot x_5 + 0 \cdot x_6 \to \max;$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \quad - x_4 + x_5 \quad = 1, \\ -x_1 + x_2 \quad + x_4 \quad + x_6 = 1, \\ \quad x_2 + x_3 \quad = 10, \\ x_j \ge 0 \left(j = \overline{1,6}\right). \end{cases}$$

В первом ограничении базисной есть дополнительная переменная x_5, во втором – дополнительная переменная x_6.

В некоторых задачах в ограничениях вида «≥» и «=» базисные переменные можно выделить сразу, не прибегая к методу искусственного базиса. Третье ограничение рассматриваемой задачи содержит переменную x_3, которая не входит в другие ограничения. Эта переменная может быть принята в качестве базисной.

Для получения исходного базисного решения приравняем к нулю небазисные переменные: $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_4 = 0$ и получим значение базисных переменных: $x_5 = 1$, $x_6 = 1$, $x_3 = 1$. Значение целевой функции $f = 1$.

Контрольные вопросы

1. Какая форма задачи линейного программирования считается канонической?
2. Является ли обязательным требование максимизации целевой функции при приведении задачи к канонической форме и по какой причине оно выдвигается?
3. Какая переменная является базисной?
4. Какое решение называется базисным?
5. Какое базисное решение называется вырожденным?
6. В каких случаях применяется метод искусственного базиса? В чем суть этого метода?

Варианты задач для самостоятельного решения

Привести к канонической форме, выделить базисные переменные, определить исходное базисное решение и значение целевой функции для следующих задач:

Задача №4.1

$$f=3x_1+4x_2\to\max;$$

$$\begin{cases} 2x_1+x_2\le 2,\\ -x_1+5x_2\le 37,\\ 5x_1+x_2\le 40,\\ 3x_1-4x_2\le 11,\\ 3x_1+4x_2\ge 19,\\ x_1\ge 0,\ x_2\ge 0. \end{cases}$$

Задача №4.2

$$f=-3x_1+2x_2+5x_3+3x_4-x_5\to\max;$$

$$\begin{cases} 3x_1-2x_2-x_3+x_4\le 2,\\ 4x_1-x_2+x_4+x_5\le 21,\\ 4x_1-x_2-x_4+x_5\ge 13,\\ x_1+x_2=3, \end{cases}$$
$$x_j\ge 0,\ \left(j=\overline{1,5}\right).$$

Задача №4.3

$$f=2x_1-3x_2+2x_4+3x_5\to\max;$$

$$\begin{cases} 2x_1+x_2+x_3+x_4\le 12,\\ x_1+x_4\le 5,\\ 2x_1+2x_2+x_3+2x_5\le 20,\\ x_1-x_2-2x_3+2x_4-2x_5\le 10,\\ 2x_1+2x_2-2x_3-2x_4+x_5\le 24, \end{cases}$$
$$x_j\ge 0,\ \left(j=\overline{1,5}\right).$$

Задача №4.4

$$f=2x_1+x_2+x_3\to\min;$$

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=4,\\ x_1-x_2+x_3\le 2, \end{cases}$$
$$x_j\ge 0,\ \left(j=\overline{1,3}\right).$$

Задача №4.5

$$f=x_1-x_2-2x_3-3x_4\to\min;$$

$$\begin{cases} x_1-x_2+x_3+x_4=-1,\\ -x_1-x_4\le -5,\\ x_2+x_3\ge 10, \end{cases}$$
$$x_j\ge 0,\ \left(j=\overline{1,4}\right).$$

Задача №4.6

$$f=x_1+x_2\to\max;$$

$$\begin{cases} 2x_1+x_2\ge 1,\\ x_1-x_2\le 1, \end{cases}$$
$$x_1\ge 0,\ x_2\ge 0.$$

5. СИМПЛЕКС-МЕТОД

5.1 Понятие о симплекс-методе

Графический метод, рассмотренный во второй части учебного пособия, позволяет решать задачи линейного программирования с двумя переменными. Несколько сложнее, но возможно решать этим методом задачи линейного программирования с тремя переменными. Однако графический метод непригоден для решения задач линейного программирования, у которых количество переменных $n > 3$. Решение таких задач требует применения аналитических методов.

Рассматриваемые в курсе высшей математики классические методы нахождения экстремума функции непригодны для решения задач математического программирования и, в частности, линейного. Поэтому для решения задач линейного программирования созданы специальные методы решения, одним из которых есть *симплекс-метод.* Симплекс-метод не обладает той наглядностью, которая характерна для графического метода.

Известно, что *оптимальные решения задачи линейного программирования связаны с угловыми точками многогранника решений.* Угловых точек может быть много, если много ограничений. Количество угловых точек соответствует количеству базисных решений. Для каждого базисного решения однозначно определяется значение целевой функции. Найти оптимальное решение (оптимальный план), беспорядочно перебирая все базисные решения в поисках такого решения, которое приносит целевой функции экстремальное значение, затруднительно. Тем более что при таком неупорядоченном поиске значения целевой функции (невырожденной задачи) не обязательно будут монотонно возрастать (при поиске максимума) или монотонно убывать (при поиске минимума).

В связи с этим необходим такой переход от одного базисного решения к другому (от одной угловой точки к другой, начиная с угловой точки, которая соответствует исходному базисному решению), в результате которого новое решение приносило бы в невырожденной задаче на максимум большее значение целевой функции, а в невырожденной задаче на минимум – меньшее. Данный процесс решения задачи реализует симплекс-метод, который также называется *методом последовательного улучшения плана.* Процесс решения задачи продолжается до получения оптимального плана либо до установления факта отсутствия решений задачи. Если задача линейного программирования вырожденна, то при переходе от одного базисного решения к другому значение целевой функции может не измениться. Переход от одного базисного решения к другому называется *итерацией* симплекс-метода.

Критерий разрешимости задачи линейного программирования.

Для того чтобы задача линейного программирования была разрешима, т.е. имела оптимальное решение, необходимо и достаточно, чтобы ограничения задачи были совместными (множество допустимых решений не пусто) и целевая функция была ограничена при поиске максимума сверху, а при поиске минимума – снизу.

Симплекс-метод может быть интерпретирован геометрически как движение по соседним угловым точкам многогранника решений. Точки называются *соседними,* если они расположены на одном ребре. Например, если исходное базисное решение (исходный базисный план) соответствует угловой точке A, то следующий базисный план, полученный в процессе решения задачи симплекс-методом, будет соответствовать угловой точке Q, а оптимальный – угловой точке H (рис. 5.1).

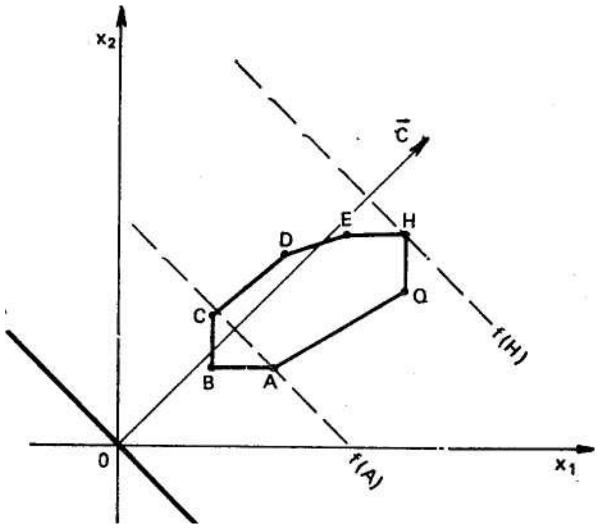

Рисунок 5.1 – Геометрическая интерпретация симплекс-метода

Таким образом, количество итераций симплекс-метода зависит от выбора исходного базисного плана и количества угловых точек, которые встречаются при движении от исходного плана к оптимальному.

В п. 5.2 будет рассмотрен алгоритм, реализующий симплекс-метод. *Алгоритм* – это четко предписанная последовательность действий (шагов), выполнение которой гарантирует достижение определенной цели.

Основу алгоритма симплекс-метода составляет последовательность шагов, реализующая охарактеризованный выше переход от одного базисного плана к другому и приводящая либо к оптимальному решению, либо к выводу о том, что задача решения не имеет.

5.2 Алгоритм симплекс-метода

Как уже известно, прежде чем решать задачу линейного программирования симплекс-методом, ее необходимо привести к канонической форме (см. п. 4.1). После этого выделяют переменные, которые присутствуют только в одном уравнении с коэффициентом единица и принимают их в качестве базисных. Если в ограничении такую переменную выделить нельзя, то вводят искусственную базисную переменную. Затем определяется исходный базисный план и значение целевой функции для этого плана (см. п. 4.2). Дальше выполняется описанная ниже последовательность шагов.

Шаг 1. Строится и заполняется исходная симплексная таблица по следующей схеме (табл. 5.1):

Таблица 5.1 – Исходная симплекс-таблица

Базис	C	B		…	c_j	…	
				…	x_j	…	
…	…	…			…		
x_i	c_i	b_i		…	a_{ij}	…	
…	…	…			…		
	Δ	f		…	Δ_j	…	

В столбце «Базис» записываются базисные переменные, в столбце «C» – коэффициенты при базисных переменных в целевой функции (c_i), в столбце «B» – свободные члены ограничений (b_i), т.е. значение базисных переменных. В столбцах x_j (небазисные переменные) отражаются коэффициенты при небазисных переменных в ограничениях (a_{ij}), над переменными x_j – коэффициенты при этих переменных в целевой функции (c_j). Строка «Δ» в столбце «B» содержит значение целевой функции, которая рассчитывается по формуле:

$$f = \sum_{i=1}^{m} c_i b_i \,, \tag{5.1}$$

а столбцы x_j этой же строки – значения относительных оценок (Δ_j), рассчитываемых по формуле:

$$\Delta_j = \sum_{i=1}^{m} c_i a_{ij} - c_j \quad \left(j = \overline{1, n}\right). \tag{5.2}$$

При определении значения f фактически нужно найти сумму произведений элементов столбца «C» на соответствующие элементы столбца «B», что равносильно подстановке базисного плана в целевую функцию, а при определении значения относительной оценки Δ_j – сумму произведений элементов столбца «C» на соответствующие элементы того столбца x_j, для которого она рассчитывается.

Шаг 2. Проверяется полученный базисный план на оптимальность по условию оптимальности.

Если $\Delta_j \geq 0$ и среди базисных переменных нет искусственных, то план является оптимальным.

Если $\Delta_j \geq 0$ и среди базисных переменных есть искусственные, то задача неразрешима, так как ее система ограничений несовместна.

Если $\Delta_j < 0$, то полученный базисный план не является оптимальным и необходимо переходить к другому базисному плану.

Если в оптимальном плане $\Delta_j = 0$, то это говорит о том, что задача имеет бесконечное число планов (см. пример № 5.3).

Шаг 3. Для перехода к новому базисному плану в первую очередь из числа небазисных переменных с отрицательными оценками Δ_j выбирается переменная, которая вводится в базис. Введем в новый базис переменную x_k, которой соответствует наибольшая по абсолютной величине отрицательная оценка Δ_j:

$$|\Delta_k| = \max_j\{|\Delta_j|\}. \tag{5.3}$$

Столбец, соответствующий переменной x_k, называют *главным* (*ведущим*). Элементы главного столбца обозначаются через a_{ik}. Выбранная переменная будет вводиться в базис.

Если окажется несколько одинаковых наибольших по абсолютной величине отрицательных оценок, то выбирается любая из соответствующих им переменных.

Шаг 4. Выбирается переменная, которая выводится из базиса. Ее индекс r находится из соотношения:

$$\frac{b_r}{a_{rk}} = \min_i\left\{\frac{b_i}{a_{ik}}\right\}, \text{ по всем } i, \text{ для которых } a_{ik}> 0. \tag{5.4}$$

Строку таблицы, в которой получено наименьшее отношение $\left(\frac{b_r}{a_{rk}}\right)$ элемента столбца «B» к соответствующему положительному элементу главного столбца, называют *главной* (*ведущей*). Элементы главной строки обозначаются через a_{rj}. Выбранная переменная x_r будет выводиться из базиса.

Если окажется несколько одинаковых наименьших значений отношений, то выбирается любая из соответствующих им переменных. Это может произойти в вырожденной задаче.

Элемент, который находится на пересечении главной строки и главного столбца, называют *главным* (*ведущим*). Главный элемент обозначается через a_{rk}. В случае отсутствия значений $a_{ik} >0$ задача неразрешима, так как ее целевая функция не ограничена на множестве планов задачи.

Шаг 5. Для определения нового базисного плана производят пересчет элементов таблицы и результаты заносят в новую симплексную таблицу. Выбранные переменные в новой таблице меняются местами вместе со своими коэффициентами в целевой функции. Остальные переменные переписываются без изменений со своими коэффициентами. Элементы новой симплексной таблицы рассчитываются по приведенным ниже формулам:

элементы главной строки $b_k = \dfrac{b_r}{a_{rk}}$; $a_{kj} = \dfrac{a_{rj}}{a_{rk}}$;

главный элемент $a_{kr} = \dfrac{1}{a_{rk}}$;

элементы главного столбца $a_{ir} = -\dfrac{a_{ik}}{a_{rk}}$; $\Delta_r = -\dfrac{\Delta_k}{a_{rk}}$;

все остальные элементы таблицы:

$$b_i' = b_i - \frac{b_r a_{ik}}{a_{rk}}; \quad a_{ij}' = a_{ij} - \frac{a_{rj} a_{ik}}{a_{rk}};$$

$$\Delta_j' = \Delta_j - \frac{\Delta_k a_{rj}}{a_{rk}}; \quad f' = f - \frac{b_r \Delta_k}{a_{rk}}.$$

Некоторые практические советы:

1) если в главном столбце пересчитываемой таблицы стоит нуль, то соответствующая ему строка переписывается в новую симплексную таблицу без изменений;

2) если в главной строке пересчитываемой таблицы стоит нуль, то соответствующий ему столбец переходит в новую таблицу без изменений;

3) если из числа базисных исключается искусственная переменная, то соответствующий ей столбец в новую симплексную таблицу не включается и, следовательно, не пересчитывается. Как указывалось ранее, искусственные переменные вводятся только для получения исходного базисного плана. Впоследствии они выводятся из базиса и в число базисных больше не попадут. Данный прием не ускоряет процесса получения оптимального плана, однако уменьшает объем вычислений.

Шаг 6. Проверяется правильность расчета значений целевой функции f и оценок Δ_j по формулам (5.1), (5.2). Переход к шагу 2 следующей итерации.

5.3 Примеры решения задач линейного программирования симплекс-методом

Пример №5.1. Решить задачу об использовании ресурсов, применяя алгоритм симплекса-метода. Модель задачи имеет вид:

$$f = 12x_1 + 15x_2 \to \max;$$

$$\begin{cases} 6x_1 + 6x_2 \le 36, \\ 4x_1 + 2x_2 \le 20, \\ 4x_1 + 8x_2 \le 40, \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$$

Решение

Приведем задачу к канонической форме:

$$f = 12x_1 + 15x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 + 0 \cdot x_5 \rightarrow \max;$$

$$\begin{cases} 6x_1 + 6x_2 + x_3 = 36, \\ 4x_1 + 2x_2 + x_4 = 20, \\ 4x_1 + 8x_2 + x_5 = 40, \end{cases}$$

$$x_j \geq 0 \left(j = \overline{1, 5}\right).$$

Выделяем базисные переменные. Количество базисных переменных должно быть равно количеству ограничений, т.е. трем. В каждом ограничении данной задачи можно выделить одну переменную, которая присутствует только в этом ограничении с коэффициентом + 1. Следовательно, переменные x_3, x_4, x_5 являются базисными, а переменные x_1, x_2 – небазисными.

Определим исходный базисный план и значение целевой функции: $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 36$, $x_4 = 20$, $x_5 = 40$, $f = 0$.

Исходные данные задачи, а также вычисленные по формуле (5.1) значение целевой функции ($f = 0 \cdot 36 + 0 \cdot 20 + 4 \cdot 0 \cdot 40 = 0$) и по формуле (5.2) значения относительных оценок ($\Delta_1 = 0 \cdot 6 + 0 \cdot 4 + 0\ 4 -\cdot 12 = -12$; $\Delta_2 = 0 \cdot 6 + 0 \cdot 2 + 0\ 8 -\cdot 15 = -15$) перенесем в исходную симплексную таблицу (табл. 5.2).

Таблица 5.2 – Исходная симплекс-таблица задачи №5.1

Базис	C	B	12	15
			x_1	x_2
x_3	0	36	6	6
x_4	0	20	4	2
x_5	0	40	4	**8***
	Δ	0	–12	–15

Проверяем полученный план на оптимальность по условию оптимальности ($\Delta_j \geq 0$). Поскольку для данного плана существуют оценки $\Delta_1 < 0$ и $\Delta_2 < 0$, план не является оптимальным. Необходим переход к другому базисному плану.

В первую очередь среди небазисных переменных на основании (5.3) выберем переменную, которая будет вводиться в базис:

$$|\Delta_k| = \max\{|\Delta_1|, |\Delta_2|\} = \max\{|-12|, |-15|\} = \max\{12, 15\} = 15.$$

В базис будет вводиться переменная x_2, так как этой переменной соответствует максимальная по модулю относительная оценка $|\Delta_2| = 15$. Столбец, который соответствует переменной x_2, является главным.

Далее на основании (5.4) выберем переменную, которая будет выводиться из базиса:

$$\frac{b_r}{a_{rk}} = \min\left\{\frac{36}{6}, \frac{20}{2}, \frac{40}{8}\right\} = \min\{6, 10, 5\} = 5.$$

Из базиса будет выводиться переменная x_5, так как этой переменной соответствует минимальное отношение, равное 5. Строка, которая соответствует переменной x_5, является главной.

На пересечении главной строки и главного столбца находится главный элемент a_{52} =8. В таблице для удобства расчетов главный элемент необходимо обозначить „*”.

Строим новую симплексную таблицу (табл. 5.3), в которой переменные x_5 и x_2 меняются местами, вместе со своими коэффициентами в целевой функции. Остальные переменные переписываются без изменений со своими коэффициентами в целевой функции.

Таблица 5.3 – Симплекс-таблица 1 итерации

Базис	C	B	12	0
			x_1	x_5
x_3	0	6	3	–3/4
x_4	0	10	3	–1/4
x_2	15	5	1/2	1/8
	Δ	75	–9/2	15/8

Пересчитываем элементы табл. 5.2 и результаты заносим в соответствующие клетки табл. 5.3. Элементы главной строки табл. 5.2 пересчитываются путем деления каждого элемента этой строки на главный элемент $\left(\frac{40}{8}=5,\quad \frac{4}{8}=\frac{1}{2}\right)$, главный элемент – путем деления единицы на главный элемент $\left(\frac{1}{8}\right)$, элементы главного столбца – путем деления каждого элемента этого столбца на главный со знаком минус $\left(-\frac{6}{8}=-\frac{3}{4},\quad -\frac{2}{8}=-\frac{1}{4},\quad \frac{15}{8}\right)$.

Все остальные элементы табл. 5.3 определяются по правилу прямоугольника. Например, для клетки x_3x_1 новый элемент равен $6-\frac{6\cdot 4}{8}=3$.

Проверяем правильность расчета значений целевой функции f и оценок Δ_1, Δ_5 по формулам (5.1), (5.2):

$f = 0 \cdot 6 + 0 \cdot 10 + 15 \cdot 5 = 75$,

$\Delta_1 = 0 \cdot 3 + 0 \cdot 3 + 15 \cdot 1/2 - 12 = -9/2$,

$\Delta_5 = 0 \cdot (-3/4) + 0 \cdot (-1/4) + 15 \cdot 1/8 - 0 = 15/8$.

Полученный в табл. 5.3 план не является оптимальным, так как существует $\Delta_1 = -9/2$. В число базисных вводится переменная x_1, а из базиса исключается переменная x_3.

Пересчитываем элементы табл. 5.3 и результаты заносим в табл. 5.4. После проверки правильности расчета f и оценок Δ_3, Δ_5 делаем вывод о том, что полученный в табл. 5.4 план оптимальный, так как оценки Δ_3, $\Delta_5 > 0$.

Таблица 5.4 – Симплекс-таблица 2 итерации (оптимальный план)

Базис	C	B	0	0
			x_3	x_5
x_1	12	2	1/3	–1/4
x_4	0	4	–1	1/2
x_2	15	4	–1/6	1/4
	Δ	84	3/2	3/4

Для получения максимального дохода в размере 84 ден. ед. предприятию необходимо выпускать из имеющихся в наличии ресурсов 2 ед. продукции вида $П_1$ и 4 ед. продукции $П_2$.

Ответ: $x_1{}^* = 2$, $x_2{}^*=4$, $f_{\max} = 84$.

Пример №5.2. Рассмотрим решение задачи линейного программирования симплекс-методом, в которой для построения исходного плана применяется метод искусственного базиса:

$$f = x_1 - 5x_2 - x_3 + x_4 \to \max;$$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 3x_3 + x_4 = 3, \\ 2x_1 \qquad\;\; + 3x_3 - x_4 = 4, \end{cases}$$

$$x_j \geq 0 \left(j = \overline{1,4}\right).$$

Решение

Исходная задача записана в канонической форме. Для выделения базисных переменных обе части первого ограничения разделим на 3 и тогда в качестве базисной можно взять переменную x_2, а во второе ограничение введем искусственную переменную x_5.

$$f = x_1 - 5x_2 - x_3 + x_4 - Mx_5 \to \max;$$

$$\begin{cases} 1/3x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 1/3x_4 \quad = 1, \\ \quad 2x_1 \qquad\quad + 3x_3 - \; x + x_5 = 4, \end{cases}$$

$$x_j \geq 0 \left(j = \overline{1,5}\right).$$

Определим исходный базисный план и значение целевой функции:

$$x_1 = 0,\ x_3 = 0,\ x_4 = 0,\ x_2 = 1,\ x_5 = 4,\ f = -4M - 5.$$

Заполним исходную симплексную таблицу (табл. 5.5). При проверке плана на оптимальность, для выбора наибольшей по абсолютной величине относительной оценки, достаточно рассматривать ту часть отрицательных Δ_j, что содержит M (в силу того, что M – очень большое положительное число). Только при наличии нескольких одинаковых наибольших по абсолютной величине частей Δ_j, содержащих M, рассматривается та часть Δ_j, которая M не содержит.

Таблица 5.5 – Исходная симплекс-таблица задачи № 5.2

Базис	C	B	1	–1	1
			x_1	x_3	x_4
x_2	–5	1	1/3	1	1/3
x_5	$-M$	4	2	3	–1
	Δ	$-4M-5$	$-2M-8/3$	$-3M-4$	$M-8/3$

Анализ табл. 5.5 показывает, что в базис вводится переменная x_3, а выводится – x_2. Пересчитываем элементы табл. 5.5 по известным формулам. Дальнейшее решение задачи показано в табл. 5.6–5.8. Поскольку в табл. 5.6 из базиса исключается искусственная переменная x_5, то соответствующий ей столбец в новую симплексную таблицу не включается.

Таблица 5.6 – Симплекс-таблица 1 итерации

Базис	C	B	$\cancel{1}$	–5	1
			$\cancel{x_1}$	x_2	x_4
x_3	–1	1	$\cancel{1/3}$	1	1/3
x_5	$-M$	1	$\cancel{1}$	–3	–2
	Δ	$-M-1$	$\cancel{-M-4/3}$	$3M+4$	$2M-4/3$

Таблица 5.7 – Симплекс-таблица 2 итерации

Базис	C	B	–5	1
			x_2	x_4
x_3	–1	2/3	2	1
x_1	1	1	–3	–2
	Δ	1/3	0	–4

Таблица 5.8 – Симплекс-таблица 3 итерации (оптимальный план)

Базис	C	B	–5	1
			x_2	x_3
x_4	1	2/3	2	1
x_1	1	7/3	1	2
	Δ	3	8	4

Полученный в табл. 5.8 план является оптимальным, так как искусственные переменные в базисе отсутствуют и относительные оценки Δ_2, $\Delta_3 > 0$.

Ответ: $x^*_1 = 7/3$, $x^*_2 = 0$, $x^*_3 = 0$, $x^*_4 = 2/3$, $f_{\max} = 3$.

Пример №5.3. Рассмотрим процесс решения задачи линейного программирования, имеющей бесконечное число планов (решений):

$$f = x_1 + x_2 \rightarrow \min;$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \le 2, \\ x_1 + x_2 \ge 2, \\ x_1 - 2x_2 \le 1, \end{cases}$$

$$x_j \ge 0 \left(j = \overline{1, 2} \right).$$

Решение

После приведения задачи к канонической форме для получения исходного базисного плана во второе ограничение введем искусственную переменную x_6. Тогда модель задачи примет следующий вид:

$$f = -x_1 - x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 + 0 \cdot x_5 - Mx_6 \rightarrow \min;$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 2, \\ x_1 + x_2 - x_4 + x_6 = 2, \\ x_1 - 2x_2 + x_5 = 1, \end{cases}$$

$$x_j \ge 0 \left(j = \overline{1, 6} \right).$$

Процесс получения оптимального плана показан в табл. 5.9–5.11.

Таблица 5.9 – Исходная симплекс-таблица задачи № 5.3

Базис	C	B	–1	–1	0
			x_1	x_2	x_4
x_3	0	2	1	–1	0
x_6	$-M$	2	1	1	–1
x_5	0	1	1	–2	0
	Δ	$-2M$	$-M + 1$	$-M + 1$	M

Таблица 5.10 –Симплекс-таблица 1 итерации

Базис	C	B	–1	0
			x_1	x_4
x_3	0	4	2	–1
x_2	–1	2	1	–1
x_5	0	5	3	–2
	Δ	–2	0	1

Таблица 5.11 – Симплекс-таблица 2 итерации (оптимальный план)

Базис	C	B	0	0
			x_5	x_4
x_3	0	2/3	–2/3	1/3
x_2	–1	1/3	–1/3	–1/3
x_1	–1	5/3	1/3	–2/3
	Δ	–2	0	1

Оптимальный план $x^*_1 = 0$, $x^*_2 = 2$, $f_{min} = -2$ получен в табл. 5.10, так как $\Delta_1 = 0$ и $\Delta_4 = 1$. Наличие в оптимальном плане оценки $\Delta_1 = 0$ говорит о том, что задача имеет бесконечное число решений. Включение в число базисных переменной x_1, которой соответствует оценка $\Delta_1 = 0$, и исключение из базиса переменной x_5 не изменит значения целевой функции, но приведет к изменению базисного плана. Это произойдет на следующей итерации (табл. 5.11), в результате которой получается новый оптимальный план $x^*_1 = 5/3$, $x^*_2 = 1/3$, $f_{min} = -2$.

Ответ. Оптимальные решения данной задачи будут лежать на отрезке, заключенном между точками $A(0, 2)$ и $B(5/3, 1/3)$.

В любой точке этого отрезка целевая функция $f_{min} = -2$. Задача имеет бесконечное число решений. Координаты любой внутренней точки отрезка AB могут быть найдены из следующих соотношений ($0 \le \alpha \le 1$):

$$x_1 = \alpha \cdot 0 + (1 - \alpha)5/3,$$
$$x_2 = \alpha \cdot 2 + (1 - \alpha)1/3.$$

При $\alpha = 0$ получаем координаты точки A, при $\alpha = 1$ – координаты точки B.

Замечание №5.1. При решении практических задач наличие бесконечного числа оптимальных планов дает возможность выбирать такой план, который в наибольшей степени отвечает сложившейся производственной ситуации.

Контрольные вопросы

1. Какой переход от одного базисного плана к другому реализует симплекс-метод?
2. Какую геометрическую интерпретацию можно дать симплекс-методу?
3. Что называется итерацией симплекс-метода?
4. Опишите алгоритм симплекс-метода.
5. В каком случае задача линейного программирования будет иметь решения?
6. Сформулируйте условие оптимальности плана задачи линейного программирования.

Варианты задач для самостоятельного решения

Задача № 5.1

Решить симплекс-методом следующие задачи линейного программирования:

а) $f = -x_1 + 3x_2 + 2x_3 \to \min;$

$$\begin{cases} -x_1 - x_2 - 2x_3 \le 5, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 \le 3, \\ 2x_1 - 5x_2 + 6x_3 \le 5, \end{cases}$$

$x_j \ge 0, \ \left(j = \overline{1,3}\right).$

б) $f = x_1 + 2x_2 \to \max;$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \le 6, \\ 2x_1 + x_2 \le 4, \\ x_1 \le 1, \\ -x_1 + x_2 \le 1, \\ x_1 \ge 0, \ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

в) $f = -2x_1 - 3x_2 + 2x_4 + 3x_5 \to \max;$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 \le 12, \\ x_1 + x_4 \le 5, \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_5 \le 20, \\ x_1 - x_2 - 2x_3 + 2x_4 - 2x_5 \le 10, \\ -2x_1 + 2x_2 - 2x_3 - 2x_4 + x_5 \le 19, \\ x_j \ge 0, \ \left(j = \overline{1,5}\right). \end{cases}$$

г) $f = x_1 + 4x_2 + x_3 \to \max;$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 3, \\ 2x_1 - 5x_2 - x_3 = 0, \\ x_j \ge 0, \ \left(j = \overline{1,3}\right). \end{cases}$$

д) $f = -2x_1 - 3x_2 \to \min;$

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \le 6, \\ x_1 + x_2 \ge 1, \\ x_1 \ge 0, \ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

е) $f = x_1 - 4x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 \to \max;$

$$\begin{cases} 14x_1 - 14x_2 + 12x_3 + 5x_4 + 6x_5 + 3x_6 = 8, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 + x_5 = 0, \\ 16x_1 - 16x_2 + 8x_3 + 7x_4 + 4x_5 + 5x_6 = 12, \\ x_j \ge 0, \ \left(j = \overline{1,6}\right). \end{cases}$$

ж) $f = 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 \to \min;$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 2, \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 = 6, \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 7, \\ x_j \ge 0, \ \left(j = \overline{1,4}\right). \end{cases}$$

з) $f = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \to \max;$

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + 5x_3 - x_4 = 5, \\ 5x_1 + 3x_2 + 6x_3 - 2x_4 = 5, \\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 - x_4 = 4, \\ x_j \ge 0, \ \left(j = \overline{1,4}\right). \end{cases}$$

и) $f = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \to \min;$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 \geq 6, \\ -x_1 \qquad + x_3 - 2x_4 \leq 2, \\ -2x_2 - 3x_3 + 2x_4 \leq 8, \\ x_j \geq 0, \ \left(j = \overline{1, 4}\right). \end{cases}$$

Задача №5.2

Построить модель и решить симплекс-методом задачу:

Завод изготовляет продукцию двух видов P_1 и P_2. Для изготовления этой продукции нужно четыре вида ресурсов: R_1, R_2, R_3, R_4. Другие исходные данные задачи сведены в табл. 5.12.

Нужно определить план выпуска продукции P_1 и P_2, при котором доход предприятия оказался бы максимальным.

Таблица 5.12 – Исходные данные к задаче № 5.2

Вид ресурсов	Затраты ресурсов на единицу продукции		Запас ресурсов, ед.
	P_1	P_2	
R_1	4	6	38
R_2	4	2	26
R_3	0	6	30
R_4	6	0	36
Доход, ден.ед.	14	10	

6. ДВОЙСТВЕННОСТЬ В ЛИНЕЙНОМ ПРОГРАММИРОВАНИИ

6.1 Понятие о двойственных задачах линейного программирования

Каждой задаче линейного программирования, которую называют *исходной,* можно поставить в соответствие некоторую другую задачу линейного программирования, называемую *двойственной* к ней. Вместе взятые эти задачи образуют пару взаимно двойственных задач и любую из них можно рассматривать как исходную. Решая одну из этих задач, можно получить решение другой задачи.

Двойственная задача – это вспомогательная задача линейного программирования, получаемая с помощью определенных правил непосредственно из условий исходной. Сформулируем правила построения двойственных задач:

1. Если целевая функция f исходной задачи максимизируется, то целевая функция z двойственной – минимизируется и наоборот.

2. Количество ограничений (m) исходной задачи равно количеству переменных двойственной, а количество переменных (n) исходной равно количеству ограничений двойственной. Переменные двойственной задачи обозначим через y_i $\left(i=\overline{1,m}\right)$.

3. Поскольку переменные исходной задачи связанны с ограничениями двойственной, каждой переменной $x_j \geq 0$ соответствует в двойственной задаче ограничение вида «≤» ($z \to \max$) или «≥» ($z \to \min$), и наоборот.

4. Каждой переменной x_j, не ограниченной по знаку, соответствует ограничение вида « = » двойственной задачи, и наоборот.

5. Свободные члены ограничений исходной задачи $b_i\left(i=\overline{1,m}\right)$ в двойственной являются коэффициентами при переменных $y_i\left(i=\overline{1,m}\right)$ в целевой функции, а коэффициенты $c_j\left(j=\overline{1,n}\right)$ при переменных $x_j\left(j=\overline{1,n}\right)$ в целевой функции исходной задачи являются свободными членами ограничений двойственной.

6. Матрица A коэффициентов при неизвестных в ограничениях исходной задачи в двойственной транспонируется ($A^{т}$).

Рассмотрим в общем виде одну из частных задач линейного программирования, которую будем считать *исходной:*

$$f = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \to \max;$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \leq b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \leq b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \leq b_m, \end{cases}$$

$$x_j \geq 0\left(j=\overline{1,n}\right).$$

Двойственная к этой задаче будет иметь вид:

$$z = b_1y_1 + b_2y_2 + \ldots + b_ny_n \to \min;$$

$$\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + \ldots + a_{m1}y_m \geq c_1, \\ a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots + a_{m2}y_m \geq c_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + \ldots + a_{mn}y_m \geq c_n, \end{cases}$$

$$y_i \geq 0 \left(i = \overline{1, m}\right).$$

Если применить правила построения двойственных задач, то получим исходную задачу.

В табл. 6.1 приведены частные виды исходных задач линейного программирования в матричном виде и соответствующие им двойственные задачи.

Таблица 6.1 – Исходные задачи линейного программирования и соответствующие им двойственные задачи

	Исходная задача	Двойственная задача	
I	$f = CX \to \max$ $AX \leq B$ $X \geq 0$	$z = YB \to \min$ $YA \geq C$ $Y \geq 0$	Симметричные задачи
II	$f = CX \to \min$ $AX \geq B$ $X \geq 0$	$z = YB \to \max$ $YA \leq C$ $Y \geq 0$	
III	$f = CX \to \max$ $AX = B$ $X \geq 0$	$z = YB \to \min$ $YA \geq C$	Несимметричные задачи
IV	$f = CX \to \min$ $AX = B$ $X \geq 0$	$z = YB \to \max$ $YA \leq C$	

Через $Y = (y_1, y_2, \ldots, y_m)$ обозначена матрица-строка неизвестных двойственной задачи. Все остальные обозначения, используемые в таблице, приведены в п. 1.1.

Матрица-строка Y умножается слева на матрицу-столбец B (в целевой функции) и матрицу A (в ограничениях) исходя из правил умножения двух матриц, а также правил построения двойственных задач (в частности, в двойственной задаче матрица коэффициентов при неизвестных в ограничениях должна быть транспонированной).

Первые две пары взаимно двойственных задач в табл. 6.1 называются *симметричными,* вторые две – *несимметричными* из-за наличия ограничений вида «=». Используя правила построения двойственных задач и табл. 6.1, для любой задачи линейного программирования можно построить двойственную к ней.

6.2 Примеры построения двойственных задач линейного программирования

Пример №6.1. Построить задачу, двойственную к данной:

$$f = x_1 - x_2 \to \max;$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \le 1, \\ x_1 - x_2 \ge 0, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Чтобы построить двойственную задачу, исходную необходимо привести к форме (I) путем умножения обеих частей второго ограничения на (–1). После этого преобразования исходная задача примет вид:

$$f = x_1 - x_2 \to \max;$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \le 1, \\ -x_1 + x_2 \le 0, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Двойственная задача:

$$z = y_1 \to \min;$$

$$\begin{cases} y_1 - y_2 \ge 1, \\ -y_1 + y_2 \ge -1, \\ y_1 \ge 0,\ y_2 \ge 0. \end{cases}$$

Пример №6.2. Построить задачу, двойственную к данной:

$$f = 7x_1 + 6x_2 + 3x_3 - x_4 \to \min;$$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 \ge 12, \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 \le 10, \\ 3x_1 + 5x_2 + 4x_4 = 7, \end{cases}$$
$$x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0.$$

Для построения двойственной задачи воспользуемся формами (II), (IV) и преобразуем данную задачу путем умножения обеих частей второго неравенства на (–1). Тогда исходная задача будет иметь вид:

$$f = 7x_1 + 6x_2 + 3x_3 - x_4 \to \min;$$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 \ge 12, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 \ge -10, \\ 3x_1 + 5x_2 + 4x_4 = 7, \end{cases}$$
$$x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0.$$

Двойственная задача:

$$z = 12y_1 - 10y_2 + 7y_3 \to \max;$$

$$\begin{cases} 2y_1 + y_2 + 3y_3 = 7, \\ -y_1 - 2y_2 + 5y_3 \le 6, \\ 2y_1 + y_2 \le 3, \\ -3y_1 - y_2 + 4y_3 = -1, \\ y_1 \ge 0, y_2 \ge 0. \end{cases}$$

Используя пример №6.2, объясним некоторые правила построения двойственных задач. Поскольку количество ограничений исходной задачи m=3, двойственная задача должна иметь три переменные: y_1, y_2, y_3. Количество переменных исходной задачи n = 4, поэтому двойственная должна иметь четыре ограничения. Переменные x_1 и x_4 исходной задачи не ограничены по знаку. В силу этого первое и четвертое ограничения двойственной задачи имеют вид равенств. Третье ограничение исходной задачи имеет вид равенства, следовательно, переменная y_3 двойственной задачи не ограничена по знаку.

6.3 Экономический смысл переменных двойственной задачи

Рассмотрим задачу об использовании ресурсов, сущность которой заключается в следующем. Предприятию необходимо изготавливать два вида продукции P_1 и P_2 с использованием трех видов ресурсов: R_1, R_2, R_3, количество которых ограничено. Известны: запас ресурса каждого вида на предприятии; количество каждого вида ресурса, расходуемое на изготовление единицы продукции; доход от реализации единицы каждого вида продукции (табл. 6.2).

Таблица 6.2 – Исходные данные

Вид ресурсов	Затраты сырья на 1 ед. продукции		Запас ресурсов, ед.
	P_1	P_2	
R_1	6	6	36
R_2	4	2	20
R_3	4	8	40
Доход от реализации единицы продукции, ден.ед.	12	25	–

Требуется определить количество продукции каждого вида, которое обеспечит предприятию максимальный доход.

Модель этой задачи имеет вид:

$$f = 12x_1 + 15x_2 \to \max;$$

$$\begin{cases} 6x_1 + 6x_2 \le 36, \\ 4x_1 + 2x_2 \le 20, \\ 4x_1 + 8x_2 \le 40, \end{cases} \qquad (6.1)$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$$

Предположим теперь, что по какой-то причине предприятие отказывается от производства данной продукции и решает продать имеющиеся ресурсы. Естественно, что предприятие желает получить за эти ресурсы не меньше той суммы, которую оно получило бы при продаже готовой продукции, а покупатель ресурсов заинтересован заплатить за них как можно меньше. Возникает вопрос: по какой же цене продавать ресурсы?

Введем следующие обозначения: y_1 – цена единицы ресурса R_1; y_2 – цена единицы ресурса R_2; y_3 – цена единицы ресурса R_3.

Цель, которую ставит покупатель ресурсов, отразится в целевой функции задачи. Ее смысл состоит в минимизации стоимости всех видов ресурсов:

$$z = 36y_1 + 20y_2 + 40y_3 \to \min.$$

В ограничениях задачи необходимо отразить тот факт, что предприятие должно получить, в случае продажи ресурсов, не меньше той суммы, которую оно получило бы от реализации продукции:

$$\begin{cases} 6y_1 + 4y_2 + 4y_3 \ge 12, \\ 6y_1 + 2y_2 + 8y_3 \ge 15. \end{cases}$$

Смысл первого ограничения – цена ресурсов, идущих на изготовление единицы продукции P_1 (левая часть неравенства), должна быть не меньше дохода (12 ден.ед.) от реализации единицы продукции P_1. Второе ограничение имеет аналогичный смысл только для единицы продукции P_2.

И последнее, цена единицы сырья должна быть величиной неотрицательной, т.е.

$$y_1 \ge 0,\ y_2 \ge 0,\ y_3 \ge 0.$$

В целом данная задача может быть представлена моделью:

$$z = 36y_1 + 20y_2 + 40y_3 \to \min.$$

$$\begin{cases} 6y_1 + 4y_2 + 4y_3 \ge 12, \\ 6y_1 + 2y_2 + 8y_3 \ge 15, \end{cases} \qquad (6.2)$$

$$y_1 \ge 0,\ y_2 \ge 0,\ y_3 \ge 0.$$

Необходимо обратить внимание на то, что если к модели исходной задачи (6.1) применить правила построения двойственных задач, получим (6.2). Следовательно, задача (6.2) является двойственной к задаче (6.1) об использовании ресурсов.

Экономический смысл переменных двойственной задачи (двойственных оценок) состоит в относительной оценке ресурсов данного предприятия.

Оценки являются относительными, так как одни и те же ресурсы для разных предприятий представляют разную ценность.

Теория двойственности линейного программирования представляет большой теоретический и практический интерес и с экономической точки зрения устанавливает связи между оптимальным распределением ресурсов и некоторой системой оценок на ресурсы.

Замечание № 6.1. С математической точки зрения за исходную и двойственную может быть принята каждая из пары взаимно двойственных задач, но на практике обычно считаются двойственными те задачи, в которых определяются значения цен и других стоимостных показателей.

6.4 Теоремы двойственности

При рассмотрении правил построения двойственных задач указывалось, что задача, двойственная двойственной, совпадает с исходной. Исходя из этого, не имеет значения какую задачу считать исходной, а какую двойственной. Нужно только учитывать направление оптимизации (максимизация или минимизация). Поэтому рассматривают пару взаимно двойственных задач.

Пара взаимно двойственных задач линейного программирования обладает рядом интересных и важных свойств, которые связывают их воедино. Исследование задач двойственной пары показывает, что при их решении можно столкнуться с одним из трех взаимно исключающих вариантов:

1) обе задачи имеют планы;
2) только одна из задач имеет планы;
3) множество планов обеих задач пусто.

Теорема 1. Для любых допустимых планов $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$ и $Y = (y_1, y_2, \ldots, y_m)$ исходной и двойственной задач соответственно значение целевой функции в задаче максимизации не больше значения целевой функции в задаче минимизации.

Докажем теорему для симметричных задач двойственной пары (форма (I), табл. 6.1), ограничения которых имеют вид:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i \quad \left(i = \overline{1, m}\right),$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \ge c_j \quad \left(j = \overline{1, n}\right).$$

Используя ограничения, можно записать следующие соотношения для целевых функций этих задач:

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \le \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \right) x_j, \tag{6.3}$$

$$\sum_{i=1}^{m} b_i y_i \geq \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \right) y_i \ . \qquad (6.4)$$

Если поменять в правой части одного из соотношений, например в (6.3), порядок суммирования, а именно

$$\sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \right) = \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \right) y_i \, , \qquad (6.5)$$

придем к равенству правых частей соотношений (6.3) и (6.4). В результате этого получим

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \leq \sum_{i=1}^{m} b_i y_i \ . \qquad (6.6)$$

Экономический смысл неравенства (6.6) для приведенной выше экономической интерпретации исходной и двойственной задач состоит в том, что суммарный доход от реализации продукции не больше суммарной оценки ресурсов.

Теорема 1 доказана для симметричных задач формы (I). Легко убедиться, что она справедлива для симметричных задач формы (II), а также несимметричных задач форм (III) и (IV) (табл. 6.1).

Теорема 2. Если исходная и двойственная задачи имеют допустимые планы, то существуют и оптимальные планы у этих задач.

Докажем существование оптимального плана в исходной задаче. Если $Y = (y_1, y_2, \ldots, y_m)$ – допустимый план двойственной задачи минимизации, то допустимый план $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ исходной задачи максимизации удовлетворяет неравенству

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \leq \sum_{i=1}^{m} b_i y_i \ .$$

Следовательно, целевая функция исходной задачи ограничена сверху на множестве допустимых планов. На основании критерия разрешимости задачи линейного программирования (см. раздел 5) данная задача имеет оптимальный план.

Аналогично доказывается существование оптимального плана двойственной задачи.

Теорема 3 (первая основная теорема двойственности)

(Теоремы 3 и 4 приводятся без доказательств. С доказательством теорем можно познакомиться в специальной литературе (например, [12, дополнительная литература]).

Если одна из задач двойственной пары имеет оптимальный план, то другая также имеет оптимальный план. При этом для любых оптимальных планов

$$X^* = \left(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^* \right) \text{ и } Y^* = \left(y_1^*, y_2^*, \ldots, y_m^* \right)$$

имеет место равенство

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x^* = \sum_{i=1}^{m} b_i y^* .$$

Если целевая функция одной из задач не ограничена, то ограничения другой задачи несовместны. Однако обратное утверждение неверно. В случае отсутствия допустимых планов одной из задач, другая также может не иметь допустимых планов.

Теорема 4 (вторая основная теорема двойственности)

Для того чтобы допустимые планы x^* и y^* пары двойственных задач были оптимальными, необходимо и достаточно выполнение условий:

$$x_j^* \left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i^* - c_j \right) = 0, \quad j = \overline{1, n},$$

$$y_i^* \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^* - b_i \right) = 0, \quad i = \overline{1, m}.$$

Это означает, что если какое-нибудь ограничение одной задачи при подстановке в него оптимального плана обращается в строгое неравенство, то соответствующая этому ограничению переменная в оптимальном плане двойственной задачи равна нулю. И наоборот, если какая-либо переменная в оптимальном плане одной задачи положительна, то соответствующее ей ограничение двойственной задачи при подстановке в него оптимального плана этой задачи обращается в равенство.

Формально указанную связь между исходной и двойственной задачей можно записать следующим образом:

если $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^* > b_i$, то $y_i^* = 0$;

если $y_i^* > 0$, то $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^* = b_i$;

или

если $x_j^* > 0$, то $\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i^* = c_j$;

если $\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i^* > c_j$, то $x_j^* = 0$.

6.5 Решение двойственных задач

Теория двойственности находит широкое практическое применение. Сформулированные теоремы двойственности позволяют получить решение одной задачи, процесс решения которой по той или иной причине затруднен, по оптимальному решению двойственной к ней. К такой причине относится значительное превышение числа ограничений над числом переменных задачи, так как объем вычислений при решении задач линейного программирования симплекс-методом определяется, в основном, числом ограничений. Также при необходимости решения задачи с ограничениями вида «≥» можно перейти к решению двойственной, которая будет иметь ограничения вида «≤», что позволит избежать ввода искусственных переменных.

Рассмотрим процесс получения решения двойственной задачи (6.2) на основании оптимального решения исходной задачи Примера № 5.1.

Подставим в ограничение задачи (6.1) значение переменных $x^*_1 = 2$, $x^*_2=4$ в оптимальном плане:

$$\begin{cases} 6\cdot 2+6\cdot 4\le 36 \\ 4\cdot 2+2\cdot 4\le 20 \\ 4\cdot 2+8\cdot 4\le 40 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 36=36 \\ 16<20 \\ 40=40 \end{cases}.$$

На основании второй основной теоремы двойственности, переменная двойственной задачи y_2, соответствующая второму ограничению исходной, которое обратилось при подстановке оптимального плана в строгое неравенство, равна нулю ($y^*_2 = 0$).

Поскольку переменные x_1, x_2 в оптимальном плане имеют положительные значения, то соответствующие им ограничения двойственной задачи при подстановке в них ее оптимального плана обращаются в равенство.

Учитывая, что $y^*_2 = 0$, получим

$$\begin{cases} 6y_1 + 4y_3 = 12, \\ 6y_1 + 8y_3 = 15. \end{cases}$$

Решив полученную систему двух линейных уравнений с двумя переменными, найдем оптимальный план двойственной задачи: $y^*_1 = 3/2$, $y^*_2 = 0$, $y^*_3 = 3/4$. Согласно первой основной теореме двойственности $f_{\max} = z_{\min} = 84$.

Контрольные вопросы

1. Что представляет собой двойственная задача линейного программирования?

2. В чем отличие симметричных задач двойственной пары от несимметричных?

3. Дайте экономическую интерпретацию задачи, двойственной к задаче использования ресурсов.

4. Какая задача из пары взаимно двойственных задач может быть принята в качестве исходной и какая в качестве двойственной? Какие задачи на практике считают двойственными?

5. С какими вариантами решений можно столкнуться при исследовании задач двойственной пары?

6. Как по решению исходной задачи найти решение двойственной и наоборот?

Варианты задач для самостоятельного решения

Задача №6.1. Постройте задачи, двойственные к данным:

а) $f = x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 \rightarrow \max;$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 \leq 5, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 \leq 3, \end{cases}$$

$$x_j \geq 0 \left(j = \overline{1,4}\right).$$

б) $f = 3x_2 - x_4 \rightarrow \max;$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_4 = 8, \\ 2x_2 + x_3 - 3x_4 = 6, \end{cases}$$

$$x_j \geq 0 \left(j = \overline{1,4}\right).$$

в) $f = 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 \rightarrow \min;$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \geq 5, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 \geq 1, \\ x_1 - x_2 - 4x_3 \leq -3, \\ x_1 - x_2 + 8x_3 \geq 4, \end{cases}$$

$$x_j \geq 0 \left(j = \overline{1,3}\right).$$

г) $f = 7x_1 + 6x_2 + 3x_3 - x_4 \rightarrow \min;$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 \geq 12, \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 \leq 10, \end{cases}$$

$$3x_1 + 5x_2 + 4x_4 = 7,$$

$$x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0.$$

д) $f = 2x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 + x_5 \rightarrow \max;$

$$
\begin{aligned}
x_1 - 3x_2 + x_3 + 2x_4 \qquad &= 5,\\
2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 - x_5 &\le 8,\\
x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 + 2x_5 &\le 9,\\
-x_1 - 2x_2 + x_3 - 3x_4 - x_5 &\ge 4.
\end{aligned}
$$

Задача № 6.2. Постройте задачу, двойственную к данной:

$$
f = x_1 + x_2 \to \max;
$$
$$
\begin{cases} -x_1 + 3x_2 \le 6,\\ 3x_1 - x_2 \le 6,\end{cases}
$$
$$
x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.
$$

Решите исходную и двойственную задачи графическим методом, убедитесь на примере этих задач в справедливости первой и второй основных теорем двойственности.

Задача № 6.3. Постройте задачи, двойственные к данным:

а) $f = 5x_1 + x_2 \to \max;$
$$
\begin{cases} x_1 - x_2 \le 2,\\ x_1 - 3x_2 \le 3,\end{cases}
$$
$$
x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.
$$

б) $f = x_1 - 2x_2 \to \min;$
$$
\begin{cases} x_1 - x_2 \ge 5,\\ -x_1 + x_2 \ge 1,\end{cases}
$$
$$
x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.
$$

Решите исходную и двойственную задачи графическим методом. Проанализируйте результаты решения для каждой пары задач.

7. ТРАНСПОРТНЫЕ ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

7.1 Классическая постановка транспортной задачи

Под термином „***транспортные задачи***"(ТЗ) понимают широкий круг задач не только транспортного характера. Общим для них является, как правило, распределение ресурсов, которые находятся у m производителей (поставщиков), по n потребителям этих ресурсов.

Рассмотрим экономико-математическую модель прикрепления пунктов отправления к пунктам назначения.

Пусть есть m поставщиков $A_1, A_2, ..., A_m$ однородного груза в количествах соответственно $a_1, a_2, ..., a_m$ единиц и n потребителей $B_1, B_2, ..., B_n$ этого груза, потребность которых составляет соответственно $b_1, b_2, ..., b_n$ единиц.

Известны стоимости перевозок единицы груза от i-го поставщика к j-му потребителю – c_{ij} $\left(i = \overline{1, m}; \quad j = \overline{1, n}\right)$.

Требуется составить такой план перевозок груза, который обеспечит минимальные транспортные затраты.

Замечание №7.1. Перевозимый груз должен быть однородным, например песок, уголь, лес, кирпич, металл и т.п. Единицы измерения количества груза могут быть разными (т, м^3, шт., л и т. п.). Стоимость перевозки, как правило, измеряется в денежных единицах. Предполагается, что стоимость перевозимого груза пропорциональна его количеству. В качестве поставщиков груза могут выступать предприятия, базы, склады, а в качестве потребителей – предприятия, магазины, строительные объекты и т.п.

Прежде чем приступить к построению модели задачи, необходимо обозначить неизвестные. Исходя из условия задачи, неизвестной величиной является количество единиц груза, перевозимого от каждого поставщика к каждому потребителю. Обозначим через x_{ij} $\left(i = \overline{1, m}; \quad j = \overline{1, n}\right)$ количество единиц груза, перевозимого от i-го поставщика к j-му потребителю.

Исходные параметры модели транспортной задачи

1) n – количество пунктов отправления, m – количество пунктов назначения.

2) a_i – запас продукции в пункте отправления A_i $\left(i = \overline{1, n}\right)$ [ед. прод.].

3) b_j – спрос на продукцию в пункте назначения B_j $\left(j = \overline{1, m}\right)$ [ед. прод.].

4) c_{ij} – тариф (стоимость) перевозки единицы продукции из пункта отправления A_i в пункт назначения B_j [ден. ед./ ед. прод.].

Искомые параметры модели транспортной задачи

1) x_{ij} – количество продукции, перевозимой из пункта отправления A_i в пункт назначения B_j [ед. прод.].

2) $f(X)$ – транспортные затраты на перевозку всей продукции [ден.ед.].

Чтобы лучше представить условие задачи, сведем исходные данные в табл. 7.1. Методы решения транспортных задач сводятся к простым операциям с таблицей, где в определенном порядке записаны все условия ТЗ. Такую таблицу называют *транспортной (распределительной) таблицей*. Строка таблицы соответствует поставщику, а столбец – потребителю.

В транспортной таблице записываются:

– пункты отправления (ПО) и пункты назначения (ПН);
– запасы, имеющиеся в пунктах отправления;
– заявки, представленные пунктами назначения;
– стоимости перевозок из каждого пункта отправления в каждый пункт назначения c_{ij}.

Стоимость перевозок записываются в правом верхнем углу каждой клетки таблицы, с тем чтобы в самой клетке при составлении плана вмещать перевозку x_{ij}.

Форма транспортной таблицы представлена в табл. 7.1.

Таблица 7.1 – Транспортная (распределительная) таблица

Потребители Поставщики	B_1	B_2	...	B_n	Запасы (объемы отправления), a_i
A_1	c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}	...	c_{1n} x_{1n}	a_1
A_2	c_{21} x_{21}	c_{22} x_{22}	...	c_{2n} x_{2n}	a_2
...	...	...	...	...	...
A_m	c_{m1} x_{m1}	c_{m2} x_{m2}	...	c_{mn} x_{mn}	a_m
Потребность, b_j	b_1	b_2	...	b_n	$\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{j=1}^{m} b_j$

7.2 Сбалансированная и несбалансированная модели транспортной задачи

При постановке конкретных задач перевозки грузов может возникнуть одна из трех ситуаций:

1) количество груза у всех поставщиков $\left(\sum_{i=1}^{m} a_i\right)$ равно потребности в данном грузе всех потребителей $\left(\sum_{j=1}^{n} b_j\right)$:

$$a_1 + a_2 + ... + a_m = b_1 + b_2 + ... + b_n$$

или

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j\,; \qquad (7.1)$$

2) количество груза у всех поставщиков $\left(\sum_{i=1}^{m} a_i\right)$ больше потребности в данном грузе всех потребителей $\left(\sum_{j=1}^{n} b_j\right)$:

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_m > b_1 + b_2 + \ldots + b_n,$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j\,; \qquad (7.2)$$

3) количество груза у всех поставщиков $\left(\sum_{i=1}^{m} a_i\right)$ меньше потребности в данном грузе всех потребителей $\left(\sum_{j=1}^{n} b_j\right)$:

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_m < b_1 + b_2 + \ldots + b_n,$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_i < \sum_{j=1}^{n} b_j\,. \qquad (7.3)$$

Каждой ситуации соответствует определенная модель транспортной задачи.

Рассмотрим ситуацию (1), которой отвечает соотношение (7.1). Объектом исследования в транспортной задаче является планирование перевозок грузов. Цель исследования – составление плана перевозки грузов, обеспечивающего минимальные транспортные затраты. Критерий задачи – минимальные транспортные затраты. Отразим критерий задачи в целевой функции. Стоимость перевозки единицы груза от i-го поставщика к j-му потребителю составляет c_{ij}, а груза перевозится x_{ij} единиц. Следовательно, стоимость перевозки всего груза от i-го поставщика к j-му потребителю будет равна величине $c_{ij}x_{ij}$. Учитывая то, что суммарная стоимость перевозки грузов от всех поставщиков ко всем потребителям должна быть минимальной, целевая функция транспортной задачи будет иметь вид:

$$\begin{aligned} f = {} & c_{11}x_{11} + c_{12}x_{12} + \ldots + c_{1n}x_{1n} + \\ & + c_{21}x_{21} + c_{22}x_{22} + \ldots + c_{2n}x_{2n} + \ldots \\ & + c_{m1}x_{m1} + c_{m2}x_{m2} + \ldots + c_{mn}x_{mn} \rightarrow \min. \end{aligned}$$

Из соотношения (7.1) следует, что весь груз, имеющийся у поставщиков, должен быть вывезен и каждый потребитель должен получить ровно столько груза, сколько ему необходимо. Этот факт отражается в ограничениях задачи. В транспортной задаче можно выделить две группы ограничений.

Первая группа ограничений, количество которых равно m (количество поставщиков), отображает тот факт, что весь груз, имеющийся у поставщиков, должен быть вывезен:

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + \ldots + x_{1n} = a_1, \\ x_{21} + x_{22} + \ldots + x_{2n} = a_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{m1} + x_{m2} + \ldots + x_{mn} = a_m. \end{cases}$$

Вторая группа ограничений, количество которых равно n (количество потребителей), отражает тот факт, что каждый потребитель должен получить ровно столько груза, сколько ему необходимо:

$$\begin{cases} x_{11} + x_{21} + \ldots + x_{m1} = b_1, \\ x_{12} + x_{22} + \ldots + x_{m2} = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{1n} + x_{2n} + \ldots + x_{mn} = b_n. \end{cases}$$

Количество перевозимого груза от i-го поставщика к j-му потребителю должно быть величиной положительной. Следовательно, в модель необходимо добавить ограничения неотрицательности переменных:

$$x_{ij} \geq 0 \ \left(i = \overline{1, m}; \quad j = \overline{1, n}\right).$$

В компактном виде модель транспортной задачи можно представить в следующим образом:

$$f = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \to \min;$$

$$\begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \quad \left(i = \overline{1, m}\right), \\ \sum\limits_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \quad \left(j = \overline{1, n}\right), \\ x_{ij} \geq 0 \left(i = \overline{1, m};\ j = \overline{1, n}\right). \end{cases} \tag{7.4}$$

Для того чтобы транспортная задача (7.4) имела решение, т.е. имела оптимальный план, необходимо и достаточно выполнение условия (7.1).

Рассмотрим ситуацию (2), которой отвечает соотношение (7.2). В данной ситуации у всех поставщиков имеется больше груза, чем необходимо потребителям. Поэтому часть груза у поставщиков останется, а потребители получат весь необходимый груз. Поскольку у части поставщиков груз останется, ограничения первой группы будут иметь вид „≤", а модель транспортной задачи примет следующий вид:

$$f = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \to \min;$$

$$\begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{n} x_{ij} \leq a_i \quad \left(i = \overline{1, m}\right), \\ \sum\limits_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \quad \left(j = \overline{1, n}\right), \\ x_{ij} \geq 0 \left(i = \overline{1, m};\ j = \overline{1, n}\right). \end{cases}$$

В ситуации (3), которой отвечает соотношение (7.3), всем потребителям нужно больше груза, чем имеется у поставщиков. Поэтому каждый поставщик весь свой груз вывезет, а часть потребителей получат груза меньше необходимого количества, поэтому ограничения второй группы примут вид «≤».

Модель (7.4) называется *закрытой* моделью транспортной задачи, а соответствующая ей задача – *сбалансированной.* Модели, соответствующие соотношениям (7.2) и (7.3), называются *открытыми*, а соответствующие им задачи – *несбалансированными.* Количество переменных в модели равно ($m \times n$), а количество ограничений – ($m + n$).

Чтобы решить транспортную задачу, описываемую открытой моделью, ее необходимо сбалансировать или, по-другому, открытую модель привести к закрытой. Достигается это следующим образом.

В ситуации (2), когда $\sum\limits_{i=1}^{m} a_i > \sum\limits_{j=1}^{n} b_j$, вводится фиктивный потребитель B_{n+1} с потребностью $b_{n+1} = \sum\limits_{i=1}^{m} a_i - \sum\limits_{j=1}^{n} b_j$. К левой части каждого ограничения первой группы прибавляется соответственно неотрицательная переменная $x_{i,\,n+1} \left(i = \overline{1, m}\right)$, во вторую группу ограничений добавляется ограничение, соответствующее фиктивному потребителю B_{n+1}:

$$\sum_{i=1}^{m} x_{i,n+1} = b_{n+1}.$$

В таблицу исходных данных задачи (табл. 7.1) добавляется столбец.

В ситуации (3), когда $\sum\limits_{i=1}^{m} a_i < \sum\limits_{j=1}^{n} b_j$, вводится фиктивный поставщик A_{m+1} с наличием груза в количестве $a_{m+1} = \sum\limits_{j=1}^{n} b_j - \sum\limits_{i=1}^{m} a_i$.

К левой части каждого ограничения второй группы прибавляется соответственно неотрицательная переменная $x_{m+1,j} \left(j = \overline{1, n}\right)$, в первую группу ограничений добавляется ограничение, соответствующее фиктивному поставщику A_{m+1}:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{m+1,j} = a_{m+1}.$$

В таблицу исходных данных задачи (табл. 7.1) добавляется строка.

Стоимость перевозки единицы груза до фиктивного потребителя или от фиктивного поставщика принимается равной нулю, так как груз не перевозится.

Переход от открытой модели к закрытой фактически означает приведение модели транспортной задачи к канонической форме без учета требования максимизации целевой функции.

Рассмотрим пример построения математической модели транспортной задачи.

Пример №7.1. Заводы некой автомобильной фирмы расположены в городах A_1, A_2 и A_3. Основные центры распределения продукции сосредоточены в городах B_1 и B_2. Объемы производства указанных трех заводов равны 1000, 1300 и 1200 автомобилей ежеквартально. Величины квартального спроса в центрах распределения составляют 2300 и 1400 автомобилей соответственно. Стоимость перевозки автомобилей по железной дороге по каждому из возможных маршрутов приведены в табл. 7.2.

Таблица 7.2 – Стоимость перевозки автомобилей, ден. ед./шт.

	B_1	B_2
A_1	80	215
A_2	100	108
A_3	102	68

Постройте математическую модель, которая позволит определить количество автомобилей, перевозимых из каждого завода в каждый центр распределения, таким образом, чтобы общие транспортные затраты были минимальные.

Решение

Определение переменных

Обозначим количество автомобилей, перевозимых из i-го завода в j-ый центр распределения через x_{ij}.

Проверка сбалансированности задачи

Как видно из рассмотрения исходных данных задачи, суммарное производство автомобилей составляет 3500 шт./кв. $\left(\sum_{i=1}^{3} a_i = 1000 + 1300 + 1200 = 3500\right)$, а суммарная потребность всех пунктов распределения составляет 3700 шт./кв. $\left(\sum_{j=1}^{2} b_j = 2300 + 1400 = 3700\right)$.

Отсюда следует вывод – задача *несбалансированна,* поскольку спрос на автомобили превышает объем их производства. Для установления баланса введем дополнительный *фиктивный* завод с ежеквартальным объемом производства 200 шт./кв. $\left(a_4 = \sum_{j=1}^{2} b_j - \sum_{i=1}^{3} a_i = 3700 - 3500 = 200\right)$. Фиктивные тарифы $c^{ф}$ приравняем к нулю (так как перевозка в действительности осуществляться не будет).

Построение транспортной матрицы

Согласно результатам проверки сбалансированности задачи № 7.1 в транспортной матрице должно быть четыре строки, которые соответствуют заводам и два столбца, которые соответствуют центрам распределения (см. табл. 7.3). Тариф перевозки записывают *в правом верхнем* углу клетки матрицы для удобства дальнейшего нахождения опорных планов задачи.

Таблица 7.3 – Транспортная матрица задачи № 7.1

Поставщики \ Потребители	B_1	B_2	Объем продукции, шт./кв.
A_1	80 x_{11}	215 x_{12}	1000
A_2	100 x_{21}	108 x_{22}	1300
A_3	102 x_{31}	68 x_{32}	1200
$A_ф$	0 x_{41}	0 x_{42}	200
Спрос, шт./кв.	2300	1400	3700

Целевая функция транспортной задачи

Суммарные затраты в денежных единицах на ежеквартальную перевозку автомобилей определяются по формуле:

$$f(X) = 80x_{11} + 215x_{12} + 100x_{21} + 108x_{22} + 102x_{31} + 68x_{32} + 0 \cdot x_{41} + 0 \cdot x_{42} \to \min;$$

Ограничения транспортной задачи

Запишем сначала ограничивающие условия для заводов. Эта группа ограничений, количество которых равно 4, отображает тот факт, что все изготовленные автомобили каждого завода должны быть полностью вывезены:

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} = 1000, \\ x_{21} + x_{22} = 1300, \\ x_{31} + x_{32} = 1200, \\ x_{41} + x_{42} = 200. \end{cases}$$

Вторая группа ограничений, количество которых равно 2, отображает тот факт, что потребность в автомобилях каждого центра распределения должна быть полностью удовлетворена:

$$x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} = 2300,$$
$$x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} = 1400.$$

Математическую модель следует дополнить условием неотрицательности переменных:

$$x_{ij} \geq 0 \; \left(i = \overline{1,2};\; j = \overline{1,4}\right).$$

7.3 Методы построения опорных планов

7.3.1 Теоретическое введение

Опорный план является допустимым решением транспортной задачи и используется в качестве начального базисного решения при нахождении оптимального решения методом потенциалов.

Для решения исходные данные транспортной задачи (7.4) сводятся в таблицу (табл. 7.1). Из условия (7.1) следует, что любое ограничение транспортной задачи является линейной комбинацией остальных. Следовательно, система ограничений транспортной задачи линейно зависима и содержит только $m + n - 1$ независимых уравнений. Поэтому исходный допустимый невырожденный базисный план должен иметь $m + n - 1$ базисную переменную и его легко можно получить непосредственно из данных таблицы. Все остальные переменные – небазисные и их значения равны нулю. Условимся эти нули в таблице не отображать, т.е. клетку, соответствующую небазисной переменной, оставлять незаполненной.

Для получения опорного (исходного) плана существует три метода: метод северо-западного угла, метод минимального элемента и метод Фогеля. "Качество" опорных планов, полученных этими методами, различается: в общем случае метод Фогеля дает наилучшее решение (чаще всего оптимальное), а метод северо-западного угла – наихудшее.

Все существующие методы нахождения опорных планов отличаются только ***способом выбора клетки*** для заполнения. Само заполнение происходит одинаково независимо от используемого метода. Следует помнить, что перед нахождением опорного плана транспортная задача должна быть ***сбалансирована***.

7.3.2 Метод северо-западного угла

На каждом шаге **метода северо-западного угла** из всех не вычеркнутых клеток выбирается самая левая и верхняя (северо-западная) клетка.

Находим значение x_{11} из соотношения $x_{11} = \min\{a_1, b_1\}$.

Возможны три варианта:

1) если $a_1 < b_1$, то $x_{11} = a_1$, строка $i = 1$ исключается из дальнейшего рассмотрения, а потребность первого потребителя b_1 (столбец $j = 1$) уменьшается на величину a_1;

2) если $a_1 > b_1$, то $x_{11} = b_1$, столбец $j = 1$ исключается из дальнейшего рассмотрения, а наличие груза у первого поставщика a_1 (строка $i = 1$) уменьшается на величину b_1;

3) если $a_1 = b_1$, то $x_{11} = a_1 = b_1$, строка $i = 1$ и столбец $j = 1$ исключаются из дальнейшего рассмотрения. Данный вариант приводит к вырождению исходного плана.

Затем аналогичные операции проделывают с оставшейся частью таблицы, начиная с ее северо-западного угла. На последнем шаге процесса останется одна строка и один столбец. После заполнения клетки, которая находится на их пересечении, процесс завершается.

После завершения описанного процесса необходимо провести проверку полученного плана на вырожденность. Если количество заполненных клеток равно $m + n - 1$, то план является невырожденным, в противном случае – вырожденным.

Если план вырожденный, т.е. количество заполненных клеток оказалось меньше $m + n - 1$, то незаполненные клетки с минимальными стоимостями перевозок заполняются нулями, чтобы общее количество заполненных клеток стало равным $m + n - 1$. Однако при расстановки нулей необходимо помнить, что в таблице не должно быть ни одного прямоугольника, все вершины которого являются заполненными клетками. Например, переменные x_{11}, x_{12}, x_{21}, x_{22} или x_{11}, x_{1n}, x_{21}, x_{2n} (табл. 7.1) не могут быть одновременно базисными.

7.3.3 Метод минимального элемента

В отличие от метода северо-западного угла данный метод учитывает при построении опорного плана стоимости перевозок. В ряде случаев он розвыоляет получить лучший, с точки зрения критерия оптимальности план, сокращая количество итераций для получения оптимального плана.

Определение значений x_{ij} начинается с клетки, имеющей минимальную стоимость перевозки (если таких клеток более одной, то выбирают первую по порядку).

Как и в методе северо-западного угла, переменной, отвечающей выбранной клетке, присваивается минимальное из двух возможных значений. Соответствующая строка или столбец исключается из дальнейшего рассмотрения, а потребность потребителя или наличие груза у поставщика уменьшается на выбранную величину. Если для выбранной клетки с минимальной стоимостью перевозки наличие груза у поставщика равно потребности потребителя, то из дальнейшего рассмотрения исключается строка и столбец.

Затем в оставшейся части таблицы, проделывают аналогичные операции, опять начиная с клетки, имеющей минимальную стоимость перевозки. На последнем шаге процесса останется одна строка и один столбец. После заполнения клетки, стоящей на пересечении, процесс завершается.

Проверка полученного плана на вырожденность и расстановка (в случае вырожденности плана) нулей осуществляется так же, как описано для метода северо-западного угла.

7.3.4 Метод Фогеля

На каждом шаге **метода Фогеля** для каждой i-ой строки вычисляются штрафы d_i как разность между двумя наименьшими стоимостями (тарифами) строки. Таким же способом вычисляются штрафы d_j для каждого j-го столбца. После чего выбирается максимальный штраф из всех штрафов строк и столбцов. В строке или столбце, который соответствует выбранному штрафу, для заполнения выбирается не вычеркнутая клетка с минимальной стоимостью (тарифом) min c_{ij}.

Если существует несколько одинаковых по величине максимальных штрафов в матрице, то в соответствующих строках или столбцах выбирается одна не вычеркнутая клетка с минимальной стоимостью (тарифом) min c_{ij}.

Если клеток с минимальным тарифом также несколько, то из них выбирается клетка (i, j) с максимальным суммарным штрафом, т.е. суммой штрафов по i-ой строке и j-му столбцу.

7.3.5 Методические рекомендации по построению опорного плана транспортной задачи

Формально, реальные и фиктивные столбцы и строки в транспортной матрице абсолютно *равноправны.* Поэтому при нахождении опорных планов фиктивные строки, столбцы и стоимости (тарифы) необходимо анализировать и использовать точно так как и реальные. Но при вычислении значения целевой функции фиктивные перевозки *не учитываются,* поскольку они реально не были выполнены и оплачены.

Если величина фиктивных стоимостей превышает максимальную из реальных стоимостей задачи [$c^{\text{ф}} > \max c_{ij}$ ($i = \overline{1,n}$; $j = \overline{1,m}$)], то методы минимального элемента и Фогеля позволяют получить более дешевые планы перевозок, чем в случае с нулевыми фиктивными стоимостями.

Пример №7.2. Найти тремя методами опорный план транспортной задачи, в которой запасы на трех складах равны 210, 170, 65 ед. продукции, потребности четырех магазинов равны 125, 90, 130, 100 ед. продукции, стоимости перевозки в денежных единицах за единицу продукции следующие:

$$c_{ij} = \begin{pmatrix} 5 & 8 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & 4 & 9 \\ 9 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Решение

Определение переменных

Обозначим количество продукции, перевезенной с i-го склада в j-ый магазин через x_{ij}.

Проверка сбалансированности задачи

Как видно из рассмотрения исходных данных задачи, суммарные запасы продукции составляют 445 ед. $\left(\sum_{i=1}^{3} a_i = 210 + 170 + 65 = 445\right)$, а суммарная потребность всех магазинов в продукции составляет 445 ед. $\left(\sum_{j=1}^{4} b_j = 125 + 90 + 130 + 100 = 445\right)$.

Проверка сбалансированности задачи показывает, что суммарный объем запасов равняется суммарному объему потребности, т.е. введение фиктивных столбцов или строк не нужно.

Исходные данные задачи представим в виде транспортной матрицы (табл. 7.4).

Таблица 7.4 – Транспортная матрица задачи № 7.2

Потребители / Поставщики	B_1	B_2	B_3	B_4	Запасы, ед. прод.
A_1	5 x_{11}	8 x_{12}	1 x_{13}	2 x_{14}	210
A_2	2 x_{21}	5 x_{22}	4 x_{23}	9 x_{24}	170
A_3	9 x_{31}	2 x_{32}	3 x_{33}	1 x_{34}	65
Потребность, ед. прод.	125	90	130	100	445

Результаты нахождения опорного плана разными методами представлены в табл. 7.5, 7.6 и 7.7.

Метод северо-западного угла

1. x_{11} = min [210, 125] = 125, столбец 1 исключается из дальнейшего рассмотрения, а наличие продукции на первом складе (строка 1) уменьшается на 125 единиц и становится равным 85 единицам.
2. x_{12} = min [85, 90] = 85, строка 1 исключается из дальнейшего рассмотрения, а потребность второго потребителя (столбец 2) уменьшается на 85 единиц и становится равной 5 единицам.
3. x_{22} = min [170, 5] =5, столбец 2 исключается из дальнейшего рассмотрения, а наличие продукции у второго поставщика (строка 2) уменьшается на 5 единиц и становится равной 165 единицам.
4. x_{23} = min [165, 130] = 130, столбец 3 исключается из дальнейшего рассмотрения, а наличие продукции на втором складе (строка 2) уменьшается на 130 единиц и становится равной 35 единицам.
5. x_{24} = min [35, 100] = 35, строка 2 исключается из дальнейшего рассмотрения, а потребность второго потребителя (столбец 4) уменьшается на 35 единиц и становится равной 65 единицам.

6. Поскольку в таблице осталась одна строка (строка 3) и один столбец (столбец 4) – это последний шаг процесса, $x_{34} = 65$.

Таблица 7.5 – Транспортная таблица с опорным планом северо-западного угла

Потребители / Поставщики	B_1	B_2	B_3	B_4	Запасы, ед. прод.
A_1	5 125	8 85	1	2	210/85/0
A_2	2	5 5	4 130	9 35	170/165/35/0
A_3	9	2	3	1 65	65/0
Потребность, ед. прод.	125/0	90/5/0	130/0	100/65/0	445

Количество заполненных клеток в табл. 7.5 равно 6 ($m + n - 1 = 3 + 4 - 4 =$ $= 6$). Таким образом, полученный план невырожденный. Значения базисных переменных: $x_{11} = = 125$, $x_{12} = 85$, $x_{22} = 5$, $x_{23} = 130$, $x_{24} = 35$, $x_{34} = 65$.

Остальные переменные – небазисные, их значения приравнивают к нулю.

Опорный план $X_{СЗУ}$ найден методом северо-западного угла:

$$X_{СЗУ} = \begin{pmatrix} 125 & 85 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 130 & 35 \\ 0 & 0 & 0 & 65 \end{pmatrix} \text{[ед. продукции]}.$$

Соответствующая ЦФ (общие затраты на перевозку)

$$f(X_{СЗУ}) = 125 \cdot 5 + 85 \cdot 8 + 5 \cdot 5 + 130 \cdot 4 + 35 \cdot 9 + 65 \cdot 1 = 2230 \text{ [ден.ед.]}.$$

Метод минимального элемента

Теперь для той самой задачи (табл. 7.4) определим исходный базисный план методом минимального элемента и отразим его в табл. 7.6.

1. Переменным x_{13} и x_{34} соответствуют клетки с минимальными стоимостями перевозок ($c_{13} = c_{34} = 1$). Выбираем первую за номером клетку, x_{13} $= \min [210, 130] = 130$. Столбец 3 исключается из дальнейшего рассмотрения, а наличие продукции у первого поставщика (строка 1) уменьшается на 130 единиц и становится равным 80 единицам.

2. $x_{34} = \min [65, 100] = 65$, строка 3 исключается из дальнейшего рассмотрения, а потребность четвертого потребителя (столбец 4) уменьшается на 65 единиц и становится равным 35 единицам.

3. В оставшейся части таблицы переменным x_{14} и x_{21} соответствуют клетки с минимальными стоимостями перевозок ($c_{14} = c_{21} = 2$). Выбираем первую за номером клетку, $x_{14} = \min [80, 35] = 35$. Столбец 4 исключается из дальнейшего рассмотрения, а наличие продукции у первого поставщика (строка

1) уменьшается на 35 единиц и становится равным 45 единицам.

4. x_{21} = min [170, 125] = 125, столбец 1 исключается из дальнейшего рассмотрения, а наличие продукции у второго потребителя (строка 2) уменьшается на 125 единиц и становится равным 45 единицам.

5. В оставшейся части таблицы переменной x_{22} соответствует клетка с минимальной стоимостью перевозок (c_{22} = 5), x_{14} = min [45, 90] = 45. Строка 2 исключается из дальнейшего рассмотрения, а потребность в продукции второго потребителя (столбец 2) уменьшается на 45 единиц и становится равной 45 единицам.

6. Поскольку в таблице осталась одна строка (строка 1) и один столбец (столбец 2) – это последний шаг процесса, x_{12} = 45.

Таблица 7.6 – Транспортная таблица с опорным планом минимального элемента

Потребители / Поставщики	B_1	B_2	B_3	B_4	Запасы, ед. прод.
A_1	5	8 45	1 130	2 35	210/80/45/0
A_2	2 125	5 45	4	9	170/45/0
A_3	9	2	3	1 65	65/0
Потребность, ед. прод.	125/0	90/45/0	130/0	100/35/0	445

Количество заполненных клеток в табл. 7.6 равняется 6 ($m + n - 1 =$ $= 3 + 4 - 4 = 6$). Таким образом, полученный план невырожденный. Значения базисных переменных: x_{12} = = 44, x_{13} = 130, x_{14} = 35, x_{21} = 125, x_{22} = 45, x_{34} = 65. Остальные переменные – небазисные и их значения равны нулю.

Опорный план $X_{МЭ}$, найденный методом минимального элемента

$$X_{МЭ} = \begin{pmatrix} 0 & 45 & 130 & 35 \\ 125 & 45 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 65 \end{pmatrix} \text{[ед. продукции].}$$

Значение функции цели $f(X_{МЭ})$ = 1100 [ден.ед.].

Метод Фогеля

На первом шаге нахождения опорного плана методом Фогеля возникает ситуация равенства значений максимальных штрафов транспортной матрицы (см. табл. 7.7)

$$d_{\text{1 столбца}} = d_{\text{2 столбца}} = 3.$$

Минимальные стоимости в этих столбцах также совпадают

$$c_{21} = c_{32} = 2.$$

Поэтому необходимо уравнять суммарные штрафы d_{ij} клеток (2,1) и (3,2)

$$d_{21} = d_{\text{2 строки}} + d_{\text{1 столбца}} = 2 + 3 = 5;$$
$$d_{32} = d_{\text{3 строки}} + d_{\text{2 столбца}} = 1 + 3 = 4.$$

Так как $d_{21} > d_{32}$, то выбираем на первом шаге для заполнения клетку (2,1).

Таблица 7.7 – Транспортная таблица с опорным планом Фогеля

Потребители / Поставщики	B_1	B_2	B_3	B_4	b_i	Штрафы строк, d_i			
A_1	5	8	1 110	2 100	210/110/0	1	1	1	**7**
A_2	2 125	5 25	4 20	9	170/45/25/0	2	1	1	1
A_3	9	2 65	3	1	65/0	1	1	—	—
a_j	125/0	90/25/0	130/20/0	100/0					
Штрафы столбцов, d_j	3	3	2	1					
	—	3	2	1					
	—	3	3	**7**					
	—	3	3	—					

Опорный план $X_Ф$, найденный методом Фогеля

$$X_Ф = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 110 & 100 \\ 125 & 25 & 20 & 0 \\ 0 & 65 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{[ед. продукции]}.$$

$$f(X_Ф) = 895 \text{ [ден.ед.]}.$$

Для задачи, исходные данные которой приведены в табл. 7.4, методом Фогеля получен лучший, из критерия оптимальности целевой функции, исходный опорный план (табл. 7.7).

7.4 Улучшение опорного плана методом потенциалов

Все методы решения транспортных задач опираются на выполнение таких этапов:

1. Получение опорного плана.
2. Определение оптимальности полученного плана.
3. Улучшение полученного плана.

Очевидно, что этапы 2 и 3 повторяются до получения оптимального решения (плана).

Построенный одним из описанных выше методов опорный план можно довести до оптимального с помощью симплекс-метода. В силу особенностей модели транспортной задачи (ограничения имеют вид равенств, каждая неизвестная входит только в два уравнения, коэффициенты при неизвестных – единицы) процесс ее решения симплекс-методом является громоздким. Поэтому для нахождения оптимального плана транспортной задачи созданы специальные методы, наиболее распространенным из которых считается метод потенциалов.

Рассмотрим алгоритм, который реализует этот метод.

Шаг 1. Каждому поставщику A_i (т.е. каждой строке) поставим в соответствие некоторое число u_i ($i = \overline{1,m}$), называемое *потенциалом* A_i, а каждому потребителю B_j, (т.е. каждому столбцу) поставим в соответствие некоторое число v_j ($j = \overline{1,n}$), называемое потенциалом B_j.

Для каждой заполненной клетки транспортной таблицы соответствует "псевдостоимость" a_{ij}. Для базисных клеток, т.е. для тех, в которых $x_{ij} > 0$, a_{ij} рассчитывается так:

$$a_{ij} = c_{ij} = u_i + v_j . \qquad (7.5)$$

Полученная система (7.5) должна содержать $m + n - 1$ уравнений (так как количество базисных переменных равно $m + n - 1$) с $m + n$ неизвестными. Как известно, такая система имеет множество решений и любое из них будет содержать искомые потенциалы. Чтобы найти одно из решений, значение одного потенциала в системе задается произвольно. Обычно считают, что $u_1 = 0$, и находят значение остальных потенциалов. Значение потенциалов записывают в дополнительную строку v_j и столбец u_i.

Шаг 2. Для каждой незаполненной клетки, т.е. для каждой небазисной переменной, рассчитывается псевдостоимость

$$a'_{ij} = u_i + v_j . \qquad (7.6)$$

Расчет за выражением (7.6) проводится непосредственно по значениям элементов строк u_i и столбцов v_j. Результат обычно записывают в левый нижний угол соответствующей клетки.

Шаг 3. Проверка полученного плана на оптимальность проводится по критерию оптимальности плана транспортной задачи. Если для каждой незаполненной клетки выполняется условие (7.7):

$$a'_{ij} - c_{ij} \le 0, \qquad (7.7)$$

то план является оптимальным. В противном случае полученный план не оптимальный, и необходимо переходить к новому базисному плану путем перемещения груза в клетку, которая соответствует условию $\max\left[\alpha'_{ij} - c_{ij} > 0\right]$. Если таких клеток больше одной, то перемещают груз в первую по порядку. Выбранная клетка отмечается в таблице. Переменная, стоящая в этой клетке, вводится в базис.

Шаг 4. Для правильного перемещения перевозок, чтобы не нарушить ограничений, строится цикл, т.е. замкнутый путь, соединяющий выбранную незаполненную клетку с ней же самой и приходящий через заполненные клетки.

Циклом в транспортной таблице называют парное число клеток, соединенных замкнутой ломанной линией, которая в каждой клетке делает поворот на 90°. Одна из клеток цикла – пустая, для которой $a'_{ij} > c_{ij}$, а другие клетки – базисные.

Цикл строится следующим образом. Вычеркиваются все строки и столбцы (условно), содержащие одну заполненную клетку (выбранная клетка при этом считается заполненной). Все остальные заполненные клетки составляют цикл и лежат в его углах. Направление построения цикла (по часовой стрелке или против) несущественно.

Относительно расположения клеток цикла должны быть выполнены определенные требования:

а) в одном ряду (строке или в столбце) располагаются две и только две клетки цикла;

б) последняя (завершающая) клетка цикла находится в том же ряду, что и первая (исходная);

в) если условно соединять клетки цикла прямолинейными отрезками, то в каждой следующей клетке выполняется поворот на 90^0. При таком геометрическом толковании взаимосвязи между клетками цикла не важно, через сколько загруженных или свободных клеток проходят условные прямолинейные отрезки.

Некоторые виды циклов изображены на рис. 7.1.

Шаг 5. В каждой клетке цикла, начиная с незаполненной, проставляются поочередно знаки “+” и “–” (обычно они ставятся в правому нижнему углу клетки). В клетках со знаком “–” выбирается минимальная величина. Новый базисный план получается путем сложения выбранной величины с величинами, стоящими в клетках цикла со знаком “+”, и вычитания этой величины из величин, стоящих в клетках со знаком “–”.

При этом выбранная минимальная величина, которая стоит в клетке со знаком “–”, будет соответствовать переменной, выводимой из базиса. Если таких величин больше одной, то из базиса выводится любая из соответствующих им переменных.

Значения переменных, включенных в цикл, после описанной корректировки переносятся в новую таблицу. Все остальные переменные записываются в новую таблицу без изменений.

Осуществляется переход к шагу 1 следующей итерации.

Метод потенциалов обеспечивает монотонное убывание целевой функции и позволяет за конечное число шагов найти ее минимум при выполнении условия (7.7).

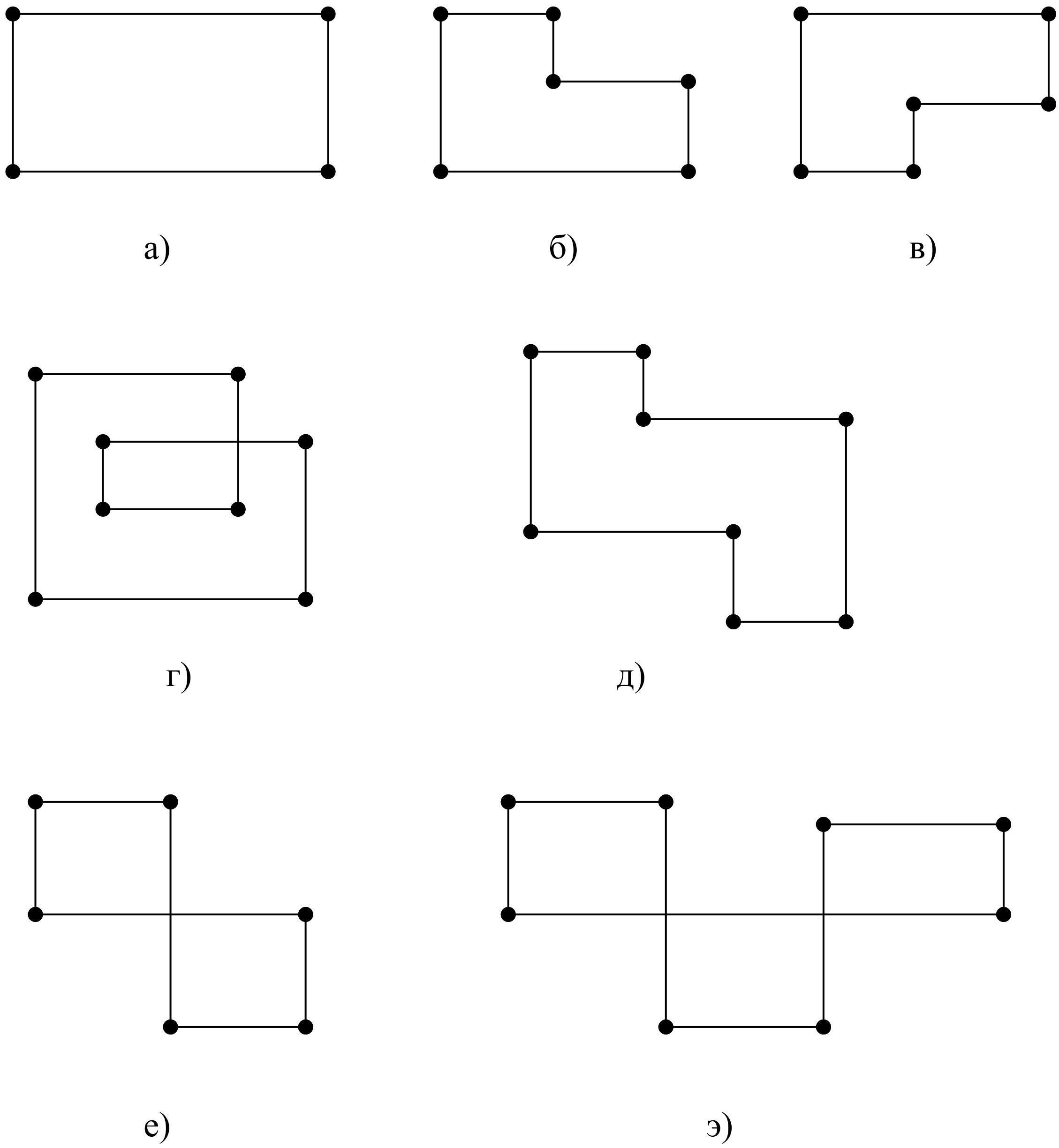

Рисунок 7.1 – Некоторые виды циклов

Пример № 7.3. Решения транспортной задачи методом потенциалов.

Определим оптимальный план задачи, исходные данные которой сведены в табл. 7.4. При этом будем отталкиваться от исходного плана, найденного методом северо-западного угла (см. табл. 7.5).

Решение

Таблица 7.8 – Исходный опорный план

Потребители / Поставщики		B_j				Запасы, ед. прод.
		$v_1 = 5$	$v_2 = 8$	$v_3 = 7$	$v_4 = 12$	
A_i	$u_1 = 0$	5 125	8 85 –	1	2 * +	210
	$u_2 = -3$	2	5 5 +	4 130	9 35 –	170
	$u_3 = -11$	9	2	3	1 65	65
Потребность, ед. прод.		125	90	130	100	445

Первой строке табл. 7.8 поставим в соответствие потенциал u_1, второй – потенциал u_2, третьей – потенциал u_3. Столбцам соответственно потенциалы v_1, v_2, v_3, v_4. Для каждой заполненной клетки на основании формулы (7.5) построим соотношения, определим значения потенциалов и запишем их в табл. 7.8 слева и вверху против соответствующих строк и столбцов:

x_{11}: $u_1 + v_1 = 5$, $u_1 = 0$, $v_1 = 5$,
x_{12}: $u_1 + v_2 = 8$, $u_2 = -3$, $v_2 = 8$,
x_{22}: $u_2 + v_2 = 5$, $u_3 = -11$, $v_3 = 7$,
x_{23}: $u_2 + v_3 = 4$, $v_4 = 12$.
x_{24}: $u_2 + v_4 = 9$,
x_{34}: $u_3 + v_4 = 1$,

Для каждой незаполненной клетки на основании формулы (7.6) рассчитывается величина оценки по формуле: $\bar{c}_{ij} = a'_{ij} - c_{ij}$.

Рассчитаем величины оценок:

$x_{13} \Rightarrow \bar{c}_{13} = u_1 + v_3 - c_{13} = 0 + 7 - 1 = 6$,
$x_{14} \Rightarrow \bar{c}_{14} = u_1 + v_4 - c_{14} = 0 + 12 - 2 = \mathbf{10}$,
$x_{21} \Rightarrow \bar{c}_{21} = u_2 + v_1 - c_{21} = -3 + 5 - 2 = 0$,
$x_{31} \Rightarrow \bar{c}_{31} = u_3 + v_1 - c_{31} = -11 + 5 - 9 = -15$,
$x_{32} \Rightarrow \bar{c}_{32} = u_3 + v_2 - c_{32} = -11 + 8 - 2 = -5$,
$x_{33} \Rightarrow \bar{c}_{33} = u_3 + v_3 - c_{33} = -11 + 7 - 3 = -7$.

Проверяем полученный план на оптимальность по формуле (7.7).

Критерий оптимальности плана транспортной задачи нарушается в незаполненных клетках x_{13} и x_{14}.

В общем случае необходимо переходить к новому базисному плану путем перемещения перевозки в клетку, отвечающей максимальной положительной разности ($\bar{c}_{ij} = a'_{ij} - c_{ij}$). На данной итерации это клетка x_{14}, поэтому будем перемещать перевозку в эту клетку. Отметим клетку x_{14} в табл. 7.8.

Для правильного перемещения перевозок строится цикл. Вычеркнем условно в табл. 7.8 первый и третий столбцы, а также третью строку, так как они содержат одну заполненную клетку. Оставшиеся четыре заполненные клетки образуют цикл (клетка, в которую перемещается перевозка, считается заполненной).

В каждой клетке цикла, начиная с клетки, отвечающей переменной x_{14}, проставим поочередно знаки «+» и «–». В клетках со знаком «–» выберем минимальную величину. В данном случае эта величина равна 35. Новый базисный план отражен в табл. 7.9.

Таблица 7.9 – Опорный план на итерации 1

Потребители Поставщики		B_j				Запасы, ед. прод.
		$v_1 = 5$	$v_2 = 8$	$v_3 = 7$	$v_4 = 2$	
A_i	$u_1 = 0$	5 125	8 50 –	1 * +	2 35	210
	$u_2 = –3$	2	5 40 +	4 130 –	9	170
	$u_3 = –1$	9	2	3	1 65	65
Потребность, ед. прод.		125	90	130	100	445

Значения переменных $x_{11} = 125$, $x_{23} = 130$, $x_{34} = 65$, не включенных в цикл, переносятся без изменений. Переменные, включенные в цикл, корректируются на выбранную величину, которая равна 35, в зависимости от знаков «+» и «–», стоящих в клетках цикла.

Полученный в табл. 7.9 новый базисный план прежде всего необходимо проверить на вырожденность. План невырожденный. Значения базисных переменных: $x_{11} =125$, $x_{12} = 50$, $x_{14}= 35$, $x_{22} = 40$, $x_{23} = 130$, $x_{34} = 65$.

Транспортные расходы:

$$f = \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{4} c_{ij} x_{ij} = 5 \cdot 125 + 8 \cdot 50 + 2 \cdot 35 + 5 \cdot 40 + 4 \cdot 130 + 1 \cdot 65 = 1880 \text{ [ден.ед.]}.$$

Дальнейшее решение задачи приведено в табл. 7.9–7.12.

На каждой итерации необходимо осуществлять проверку плана на вырожденность и шаги 1–7 алгоритма. На последней итерации, когда получен оптимальный план, последним является шаг 3 алгоритма.

Таблица 7.10 – Опорный план на итерации 2

Потребители Поставщики		B_j				Запасы, ед. прод.
		$V_1 = 5$	$v_2 = 2$	$v_3 = 1$	$v_4 = 2$	
A_i	$u_1 = 0$	5 125 –	8	1 50 +	2 35	210
	$u_2 = 3$	2 * +	5 90	4 80 –	9	170
	$u_3 = -1$	9	2	3	1 65	65
Потребность, ед. прод.		125	90	130	100	445

Таблица 7.11 – Опорный план на итерации 3

Потребители Поставщики		B_j				Запасы, ед. прод.
		$V_1 = 5$	$v_2 = 8$	$v_3 = 1$	$v_4 = 2$	
A_i	$u_1 = 0$	5 45 –	8	1 130	2 35 +	210
	$u_2 = -3$	2 80 +	5 90 –	4	9	170
	$u_3 = -1$	9	2 * +	3	1 65 –	65
Потребность, ед. прод.		125	90	130	100	445

Таблица 7.12 – Опорный план на итерации 4

Потребители Поставщики		B_j				Запасы, ед. прод.
		$V_1 = 0$	$v_2 = 3$	$v_3 = 1$	$v_4 = 2$	
A_i	$u_1 = 0$	5	8	1 130	2 80	210
	$u_2 = 2$	2 125	5 45	4	9	170
	$u_3 = -1$	9	2 45	3	1 20	65
Потребность, ед. прод.		125	90	130	100	445

В табл. 7.12 получен оптимальный план задачи, так как для каждой незаполненной клетки выполняется критерий оптимальности плана транспортной задачи.

Значения базисных переменных в оптимальном плане:

$x_{13} = 130$, $x_{14} = 80$, $x_{21} = 125$, $x_{22} = 45$, $x_{32} = 45$, $x_{34} = 20$.

Транспортные расходы:

$$f = \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{4} c_{ij} x_{ij} = 1 \cdot 130 + 2 \cdot 80 + 2 \cdot 125 + 5 \cdot 45 + 2 \cdot 45 + 1 \cdot 20 = 875 \text{ [ден.ед.]}.$$

Контрольные вопросы

1. Какие соотношения между количеством груза у поставщиков и потребностью в этом грузе у потребителей могут возникнуть при постановке конкретных задач перевозки грузов?
2. Запишите модель транспортной задачи, отвечающей соотношению (7.3).
3. Какая модель транспортной задачи называется закрытой, а какая – открытой?
4. Как открытую модель привести к закрытой?
5. При каком условии любая транспортная задача будет иметь решение?
6. В каком случае план транспортной задачи считается вырожденным?
7. Какое количество заполненных клеток должно содержаться в таблице транспортной задачи при ее решении?
8. Какие клетки заполняются нулями в случае вырожденности плана и как проверяется правильность размещения нулей?
9. Постройте схему алгоритма методом потенциалов.
10. Как определяются значения потенциалов и псевдостоимостей в процессе решения транспортной задачи методом потенциалов?
11. В каком случае базисный план транспортной задачи является оптимальным?

10\. Как строится цикл?

Варианты задач для самостоятельного решения

Задача №7.1. В пунктах *A* и *B* находится соответственно 150 и 90 т горючего. Пунктам 1, 2, 3 нужны соответственно 60, 70, 40 т горючего. Стоимость перевозки 1 т горючего из пункта *A* в пункты 1, 2, 3 равняется 60, 10, 40 тыс. грн. за 1 т соответственно, а из пункта *B* у пункты 1, 2, 3 – 120, 20, 80 тыс. грн. за 1 т соответственно.

Составьте план перевозок горючего, который минимизирует общую сумму транспортных расходов.

Задача №7.2. Три завода выпускают грузовые автомобили, которые отправляются четырем потребителям. Первый завод поставляет 90 платформ грузовиков, второй – 30 платформ, третий – 40 платформ. Нужно поставить платформы следующим потребителям: первому – 70 шт., второму – 30 шт., третьему – 20 шт., четвертому – 40 шт. Стоимость перевозки одной платформы от поставщика до потребителя указана в следующей таблице (ден. ед.):

Поставщики	Потребители			
	1	2	3	4

I	18	20	14	10
II	10	20	40	30
III	16	22	10	20

Составьте оптимальный план доставки грузовых автомобилей.

Задача №7.3. Строительство магистральной дороги включает задачу заполнения имеющихся на трассе выбоин к уровню основной дороги и срезание в некоторых местах дороги выступов. Срезанным грунтом заполняются выбоины. Перевозка грунта осуществляется грузовиками одинаковой грузоподъемности. Расстояние в километрах от срезов до выбоин и объем работ указаны в следующей таблице:

Поставщики	Потребители			Наличие грунта, т
	I	II	III	
A	1	2	3	110
B	2	1	3	130
C	1	2	4	20
Необходимое количество грунта, т	100	140	60	

Составьте план перевозок, который минимизирует общий пробег грузовиков.

Задача №7.4. Груз, который сохраняется на трех складах, требует для перевозки 60, 80, 106 автомашин соответственно, необходимо перевезти в четыре магазина. Первому магазину нужно 44 машины груза, второму – 70, третьему – 50 и четвертому – 82. Стоимость пробега одной автомашины за 1 км составляет 10 ден. ед. Расстояния от складов до магазинов указаны в следующей таблице:

Склады	Магазины			
	1	2	3	4
1	13	17	6	8
2	2	7	10	41
3	12	18	2	22

Составьте оптимальный по стоимости план перевозки груза от складов до магазинов.

Задача №7.5. На складах *A*, *B*, *C* находится сортовое зерно 100, 150, 250 т, которое нужно доставить в четыре пункта. Пункту 1 необходимо поставить 50 т, пункту 2 – 100 т, пункту 3 – 200 т, пункту 4 – 150 т сортового зерна. Стоимость доставки 1 т зерна со склада *A* в указанные пункты соответственно равняется (ден. ед.) 80, 30, 50, 20; со склада *B* – 40, 10, 60, 70; со склада *C* – 10, 90, 40, 30.

Составьте оптимальный план перевозки зерна при условии минимума стоимости перевозки.

Задача №7.6. Завод имеет три цеха – *A*, *B*, *C* и четыре склада – 1; 2; 3; 4. Цех *A* вырабатывает 30 тыс. шт. изделий, цех *B* – 40; цех *C* – 20 тыс. шт. изделий. Пропускная способность складов за одно и то же время характеризуется следующими показателями: склад 1 – 20 тыс.шт. изделий; склад 2 – 30 тыс.шт.; склад 3 – 30 тыс.шт. и склад 4 – 10 тыс.шт. изделий. Стоимость перевозки 1 тыс. шт. изделий из цеха *A* на склады 1, 2, 3, 4 – соответственно (ден. ед.): 20, 30, 40, 40, из цеха *B* – соответственно 30, 20, 50, 10, а из цеха *C* – соответственно 40, 30, 20, 60.

Составьте такой план перевозки изделий, при котором затраты на перевозку 90 тыс. шт. изделий были бы наименьшими.

Задача №7.7. Есть две станции технического обслуживания (СТО), которые выполняют ремонтные работы для трех автопредприятий. Производственные мощности СТО, стоимость ремонта в разных СТО, затраты на транспортировку от автопредприятий на СТО и назад и прогнозируемых количеств ремонтов в планированном периоде на каждом автопредприятии приведены в следующей таблице:

СТО	Стоимость ремонта ед., ден. ед.	Затраты на транспортировку, тыс. грн.			Производственная мощность, шт.
		АТП-1	АТП-2	АТП-3	
1	520	60	70	20	10
2	710	40	50	30	8
Необходимое количество, ден. ед.		6	7	5	18

Нужно определить, какое количество автомашин из каждого автопредприятия необходимо отремонтировать на каждой СТО, чтобы суммарные затраты на ремонт и транспортировку были минимальными.

Задача №7.8. Есть два хранилища с однородным продуктом, в которых сосредоточенно 200 и 120 т продукта соответственно. Продукты необходимо перевезти трем потребителям соответственно в количестве 80, 100 и 120 т. Расстояния от хранилищ до потребителей (в км) следующие:

Хранилище	Потребители		
	1	2	3
1	20	30	50
2	60	20	40

Затраты на перевозку 1 т продукта на 1 км постоянные и равны 5 ден. ед.

Определите план перевозки продукта от хранилищ до потребителей из условия минимизации транспортных расходов.

Задача №7.9. Промышленный концерн имеет два завода и пять складов в разных регионах страны. Ежемесячно первый завод вырабатывает 40, а второй – 70 ед. продукции. Вся продукция, произведенная заводами, должна быть направлена на склады. Вместительность первого склада равняется 20; второго – 30; третьего – 15; четвертого – 27; пятого – 28 ед. продукции. Затраты транспортировки продукции от завода до склада следующие (ед.):

Заводы	Склады				
	1	2	3	4	5
1	520	480	650	500	720
2	450	525	630	560	750

Составьте план перевозок при условии минимизации ежемесячных расходов на транспортировку.

8. УСЛОЖНЕННЫЕ ЗАДАЧИ ТРАНСПОРТНОГО ТИПА

В п.7 учебного пособия была рассмотрена классическая транспортная задача, на которой показано, как используется метод потенциалов для нахождения оптимального плана. В экономике предприятия такие задачи встречаются крайне редко. Обычно при составлении экономико-математической модели задачи транспортного типа приходится вводить целый ряд дополнительных ограничений, а затем пользоваться методом потенциалов.

Ряд экономических задач легко сводятся к транспортной задаче. Рассмотрим ситуации, которые наиболее часто встречаются ***в экономике предприятия.***

1. Отдельные поставки от определенных поставщиков некоторым потребителям должны быть исключены (из-за отсутствия необходимых условий хранения, чрезмерной перегрузки коммуникаций и т.д.). Это ограничение требует, чтобы в матрице перевозок, содержащей оптимальный план, определенные клетки оставались свободными. Последнее достигается искусственным завышением затрат на перевозку c_{ij} в клетках, перевозку через которые следует запретить. При этом проводят завышение величины c_{ij} до таких значений, которые будут заведомо больше всех и с которыми их придется сравнивать в процессе решения задачи, т.е. такие ситуации моделируются с помощью введения так называемых **запретных** тарифов c^3. Запретные тарифы должны сделать невыгодными перевозки в соответствующих направлениях. Для этого величина запретных тарифов должна быть больше реальных тарифов в транспортной матрице

$$c^3 > \max c_{ij} \left(i = \overline{1,n};\ j = \overline{1,m}\right).$$

2. На предприятии необходимо определить минимальные суммарные затраты на производство и транспортировку продукции. С подобной задачей сталкиваются при решении вопросов, связанных с оптимальным размещением производственных объектов. Здесь может оказаться экономически более выгодным доставлять сырье из более отдаленных пунктов, но при меньшей его себестоимости. В таких задачах за критерий оптимальности принимают сумму затрат на производство и транспортировку продукции.

3. Ряд транспортных маршрутов, по которым необходимо доставить грузы, имеют ограничения по пропускной способности. Если, например, по маршруту A_iB_j можно провести не более q единиц груза, то B_j-й столбец матрицы разбивается на два столбца – B'_j и B''_j. В первом столбце спрос принимается равным разности между действительным спросом b_j и ограничением q: $b'_j = b_j - q$, во втором – равным ограничению q, т.е. $b''_j = q$. Затраты c_{ij} в обоих столбцах одинаковы и равны данным, но в первом столбце

B'_j, в клетке, соответствующей ограничению i, вместо истинного тарифа c_{ij} ставится искусственно завышенный тариф M (клетка блокируется). Затем задача решается обычным способом.

4. Поставки по определенным маршрутам обязательны и должны войти в оптимальный план независимо от того, выгодно это или нет. В этом случае уменьшают запас груза у поставщиков и спрос потребителей и решают задачу относительно тех поставок, которые необязательны. Полученное решение корректируют с учетом обязательных поставок.

5. Экономическая задача не является транспортной, но в математическом отношении подобна транспортной, так как описывается аналогичной моделью, например распределение производства изделий между предприятиями, оптимальное закрепление механизмов по определенным видам работы.

6. Необходимо максимизировать целевую функцию задачи транспортного типа. В этой ситуации при составлении опорного плана в первую очередь стараются заполнить клетки с наиболее высокими значениями показателей c_{ij}. Выбор клетки, подлежащей заполнению при переходе от одного допустимого плана к другому, должен проводиться не по минимальной отрицательной разнице $[c_{ij} - (u_i + v_j)]$, а по максимальной положительной разнице $[c_{ij} - (u_i + v_j)]$. Оптимальным будет план, которому в последней таблице сопутствуют свободные клетки с отрицательными элементами: все разности $[c_{ij} - (u_i + v_j)] \leq 0$. Или в модель вместо искомой ЦФ $f(X)$ вводится ЦФ $f_1(X) = - f(X)$, в которой тарифы множатся на (–1). Таким образом, максимизация $f(X)$ будет соответствовать минимизации.

7. Необходимо одновременно распределить груз различного рода по потребителям. Задачи данного типа называются многопродуктовыми транспортными задачами. В этих задачах поставщики m видов грузов разбиваются на m условных поставщиков, а потребители n типов грузов разбиваются на n условных потребителей. С учетом этой разбивки составляют полную транспортную таблицу. При этом некоторые маршруты A_iB_j должны быть блокированы (закрыты), поскольку в данной постановке задачи грузы разного рода не могут заменять друг друга. Этим маршрутам A_iB_j должна соответствовать очень высокая стоимость перевозки. Многопродуктовую задачу не всегда обязательно описывать одной моделью. Например, если поставки грузов разного рода независимы, то задачу можно представить в виде комплекса транспортных задач по каждому виду груза. Однако, если между грузами разного вида существует связь (например, одни из грузов можно заменить другими), то в общем случае исходную модель (задачу) не удается разбить на комплекс простых транспортных задач.

Рассмотрим примеры решения задач транспортного типа.

Пример №8.1. Одно фермерское хозяйство (A_1) имеет продовольственное зерно двух видов: 3 тыс. т – III класса и 4 тыс. т – IV класса. Второе фермерское хозяйство (A_2) также имеет зерно двух видов: 5 тыс. т – III класса и 2 тыс. т – IV класса. Зерно должно быть вывезено на два элеватора: на первый элеватор (B_1) необходимо поставить 2 тыс. т зерна III класса, 3 тыс. т зерна IV класса и остальные 2 тыс. т зерна любого класса.

Аналогично второй элеватор (B_2) должен получить 8,25 тыс. т, из них зерна – 1 тыс. т III класса и 1, 5 тыс. т IV класса.

Стоимость перевозки в ден.ед. 1 т зерна составляет: из пункта A_1 в пункты B_1 и B_2 – 1 и 1,5 соответственно; из пункта A_2 в пункты B_1 и B_2 – 2 и 1 ден.ед. соответственно.

Составить оптимальный план перевозок.

Решение

Каждого поставщика условно разбиваем на две части согласно двум видам зерна (A_1^3 и A_1^4; A_2^3 и A_2^4), аналогично потребителей разбиваем на три части (зерно III класса, IV класса и любой класс): B_1^3, B_1^4 и B_1^0, а также B_2^3, B_2^4 и B_2^0. Потребности превышают запасы, поэтому вводим фиктивного поставщика A_3. Часть клеток в таблице запираем большими числами M, например, в клетке (1; 2) стоит большое число. Это значить, что поставщик A_1^3 не может удовлетворить потребителя B_1^4 зерном IV класса за счет имеющегося зерна III класса.

С учетом сделанных замечаний составим первую таблицу (табл. 8.1).

Таблица 8.1 – Исходные данные задачи №8.1

Потребители / Поставщики		B_1			B_2			Запас, тыс. т
		B_1^3	B_1^4	B_1^0	B_2^3	B_2^4	B_2^0	
A_1	A_1^3	1	M	1	1,5	M	1,5	3
	A_1^4	M	1	1	M	1,5	1,5	4
A_2	A_2^3	2	M	2	1	M	1	5
	A_2^4	M	2	2	M	1	1	2
A_3		0	0	0	0	0	0	1,25
Спрос, тыс. т		2	3	2	1	1,5	5,75	15,25

Перевозки от фиктивного поставщика не производятся, поэтому $c_{51} = c_{52} = c_{53} = c_{54} = c_{55} = c_{56} = 0$. Величина M намного больше c_{ij}. Применяя метод потенциалов, в итоге получим таблицу с оптимальным решением (табл. 8.2).

Таблица 8.2 – Оптимальное решение

Потребители / Поставщики		B_1			B_2			Запас, тыс. т
		B_1^3	B_1^4	B_1^0	B_2^3	B_2^4	B_2^0	
A_1	A_1^3	1 2	*M*	1 1	1,5	*M*	1,5	3
	A_1^4	*M*	1 3	1 1	*M*	1,5	1,5	4
A_2	A_2^3	2	*M*	2	1 1	*M*	1 4	5
	A_2^4	*M*	2	2	*M*	1 1,5	1 0,5	2
A_3		0	0	0	0	0	0 1,25	1,25
Спрос, тыс. т		2	3	2	1	1,5	5,75	15,25

Анализ решения

Первый поставщик перевезет на первый элеватор (B_1) зерно III класса ($x_{12} = 2$); зерно IV класса ($x_{22} = 3$), а также зерно любого класса (III или IV) ($x_{13} = 1$; $x_{23} = 1$).

Второй поставщик (A_2) перевезет на второй элеватор (B_2) зерно III класса ($x_{31} = 1$), зерно IV класса ($x_{45} = 1{,}5$) и частично любое зерно ($x_{36} = 4$; $x_{46} = 0{,}5$). Потребность элеватора в любом зерне не удовлетворена на 1,25 тыс. т ($x_{56} = 1{,}25$). Минимальные затраты на перевозку составили: $f_{\min} = 14$ ден. ед.

Пример №8.2. *Модель производства с запасами.*

Фирма переводит свой головной завод на производство определенного вида изделий, которые будут выпускаться на протяжении четырех месяцев. Величины спроса на протяжении этих четырех месяцев составляют 100, 200, 180 и 300 изделий соответственно. Ежемесячно спрос можно удовлетворить за счет:

- запасов изделий, произведенных в прошлом месяце, которые сохраняются для реализации в будущем;
- производства изделий на протяжении текущего месяца;
- избытка произведенных изделий в более поздние месяцы в счет невыполненных заказов.

Затраты на одно изделие в каждом месяце составляют 4 ден. ед. Изделие, произведенное для более поздней реализации, влечет за собой дополнительные затраты на хранение в 0,5 ден. ед. в месяц. С другой стороны, каждое изделие, выпускаемое в счет невыполненных заказов, облагается штрафом в размере 2 ден. ед. в месяц.

Объем производства изделий меняется ежемесячно в зависимости от выпуска других изделий. В рассматриваемые четыре месяца предполагается выпуск 50, 180, 280 и 270 изделий соответственно.

Требуется составить план, имеющий минимальную стоимость производства и хранения изделии.

Решение

Задачу можно сформулировать как транспортную. Эквивалентность между элементами производственной и транспортной систем устанавливается таким способом:

Транспортная система	Производственная система
1. Исходный пункт i	1. Период производства i
2. Пункт назначения j	2. Период потребления j
3. Предложение в пункте i	3. Объем производства за период i
4. Спрос в пункте j	4. Реализация за период j
5. Стоимость перевозки из i и j	5. Стоимость производства и хранение за период i и j

Перед нами структура транспортной модели. Для рассматриваемой задачи стоимость перевозки изделия из периода i в период j выражается как:

$$c_{ij} = \begin{cases} \bullet \text{ стоимость производства в } i\text{- й период, } i = j; \\ \bullet \text{ стоимость производства в } i\text{-й период плюс стоимость} \\ \quad \text{задержки от } i \text{ до } j,\ i < j; \\ \bullet \text{ стоимость производства в } i\text{-й период плюс штраф за} \\ \quad \text{нарушение срока, } i > j. \end{cases}$$

Из определения c_{ij} следует, что затраты в периоде i при реализации продукции в тот же период i ($i = j$) оцениваются только стоимостью производства. Если в периоде i производится продукция, которая будет потребляться позднее ($i < j$), то имеют место дополнительные затраты, связанные с хранением. Аналогично производство в i-й период в счет невыполненных заказов $i > j$ служит причиной дополнительные расходов в виде штрафа. Например,

c_{11} =4 ден. ед.;

$c_{24} = 4 + (0,5 + 0,5) = 5$ ден. ед.;

$c_{41} = 4 + (2 + 2 + 2) = 10$ ден. ед.

Исходная транспортная таблица выглядит следующим образом (табл. 8.3).

Таблица 8.3 – Исходные данные

Период / Период	1	2	3	4	Объем производства
1	4	4,5	5	5,5	50
2	6	4	4,5	5	180
3	8	6	4	4,5	280
4	10	8	6	4	270
Спрос	100	200	180	300	

Задача решается обычным методом потенциалов на минимум затрат по производству и хранению продукции.

Пример №8.3. Имеются три сорта бумаги в количестве 10, 8 и 5 т, которую можно использовать на издание четырех книг тиражом 8000, 6000, 15 000, 10 000 экземпляров. Расход бумаги на одну книгу составляет: 0,6; 0,8; 0,4; 0,5 кг, а себестоимость тиража книги при использовании i-го сорта бумаги задается следующей матрицей (ден. ед.):

$$c_{ij} = \begin{pmatrix} 24 & 16 & 32 & 25 \\ 18 & 24 & 24 & 20 \\ 30 & 24 & 16 & 20 \end{pmatrix}.$$

Определить оптимальное распределение бумажных резервов.

Решение

Задача по своему экономическому содержанию не является транспортной, в то же время можно построить математическую модель, аналогичную транспортной задаче.

Потребности в бумаге легко определить, зная тираж и расход на одну книгу:

$$8000 \cdot 0{,}6 = 4{,}8 \text{ т},$$
$$15\,000 \cdot 0{,}4 = 6 \text{ т},$$
$$6000 \cdot 0{,}8 = 4{,}8 \text{ т},$$
$$10\,000 \cdot 0{,}5 = 5 \text{ т}.$$

Общие запасы бумаги составляют 23 т, а общие потребности – 20,5 т, поэтому необходимо в таблицу ввести фиктивный тираж $B_5^{ф}$ с нулевыми затратами. В связи с тем, что мы составляем модель относительно бумаги, а матрица c_{ij} характеризует себестоимость печатания книги, необходимо исходную матрицу преобразовать относительно единицы бумаги (каждый столбец матрицы c_{ij} разделим на количество бумаги, приходящейся на одну книгу).

Согласно изложенному составим первую таблицу (табл. 8.4):

Таблица 8.4 – Исходные данные

Потребители / Поставщики	B_1	B_2	B_3	B_4	$B_5^ф$	Запасы, т
A_1	40	20	80	50	0	10
A_2	30	30	60	40	0	8
A_3	50	30	40	40	0	5
Потребность, т	4,8	4,8	6	5	2,4	23

Используя метод потенциалов, получим оптимальное решение (табл. 8.5).

Таблица 8.5 - Оптимальное решение

Потребители / Поставщики	B_1	B_2	B_3	B_4	$B_5^ф$	Запасы, т
A_1	40	20 4,8	80	50 2,8	0 2,4	10
A_2	30 4,8	30	60 1	40 2,2	0	8
A_3	50	30	40 5	40	0	5
Потребность, т	4,8	4,8	6	5	2,4	23

Анализ решения

Бумаги 1-го сорта в количестве 4,8 т израсходовано на издание второй книги; 2,8 т - на издание четвертой книги; 2,4 т – не использовано. Бумаги 2-го сорта израсходовано: на первую книгу – 4,8 т; на издание третьей книги 1,0 т; на издание четвертой книги – 2,2 т; бумага 3-го сорта использована на издание третьей книги в количестве 5 т.

Контрольные вопросы

1. Для решения каких экономических задач применяется модель транспортной задачи?
2. Чем отличается модель задачи о назначении от модели транспортной задачи?

3. В каком случае выходят открытые модели задач о назначении? Как их привести к закрытым?

4. Какая сущность метода запрета перевозок и как идея этого метода реализуется в задаче о назначении?

Варианты задач для самостоятельного решения

Задача №8.1. Решите задачу по распределению станков четырех разных типов по шести типам работ. Пусть есть 30; 45; 25 и 20 станков соответствующих типов. Шесть типов работ характеризуются 30; 20; 10; 40; 10 и 10 операциями соответственно. На станке 3 не может выполняться работа 6. Исходя из коэффициентов стоимости операции, представленных в следующей таблице, постройте модель и выполните оптимальное распределение станков по роботам:

Тип станков	Тип работ					
	1	2	3	4	5	6
1	10	1	3	7	14	8
2	4	8	12	2	10	7
3	12	3	14	6	2	–
4	11	12	9	5	1	3

Задача №8.2. В данной транспортной задаче суммарный спрос превосходит суммарный объем производства. Пусть штрафы за недопоставку единицы продукции в пункты назначения 1, 2 и 3 равны соответственно 5, 3 и 2.

Исходные данные следующие:

Заводы	Потребители			Объем производства, шт.
	1	2	3	
A_1	3	2	4	50
A_2	5	4	5	75
A_3	1	6	7	30
Потребность, шт.	60	40	70	

Найдите оптимальное решение.

Задача №8.3. Пусть в задаче №8.2 не введены штрафы, а спрос пункта назначения 1 должен быть полностью удовлетворен. Сформулируйте новую задачу и найдите оптимальное решение.

Задача №8.4. В таблице представлена несбалансированная транспортная задача, в которой назначается плата за хранение каждой единицы невывезенного из исходного пункта *i* груза. Пусть коэффициенты стоимости хранения груза в исходных пунктах 1, 2 и 3 соответственно равны 5, 6 и 2.

Пункты хранения (склады)	Потребители			Запасы продукции, т
	1	2	3	
1	1	0	4	300

2	3	1	2	400
3	1	2	1	250
Спрос, т	280	320	200	

Найдите оптимальное решение, если весь объем груза исходного пункта 2 должен быть вывезен для того, чтобы освободить место для новой продукции.

9. ИНДИВИДУАЛЬНОЕ ДОМАШНЕЕ ЗАДАНИЕ

Индивидуальное домашнее задание служит основным материалом, по которому преподаватель оценивает активность самостоятельной работы студентов и качество освоенного курса.

Индивидуальное домашнее задание содержит три задачи, ссылки на литературу, которая должна быть обработана при выполнении индивидуального домашнего задания.

Индивидуальное домашнее задание выполняется в ученической тетради (или на отдельных листах). Задание должно быть аккуратно оформлено, разборчиво написано на правой странице развернутой тетради. Левая страница остается чистой для внесения студентами исправлений и дополнений по результатам рецензирования.

В индивидуальном домашнем задании должны быть приведены условия задач, затем представлены их решения.

При решении задач на определение оптимального плана производства продукции, оптимального плана перевозки почтовых отправлений, а также распределительной задачи необходимо:

1. Составить содержательную формулировку и математическую модель задачи, которая соответствует заданному варианту исходных данных.
2. Составить таблицу исходных данных задачи и определить начальное допустимое базисное решение (опорный план). Найти соответствующее ему значение целевой функции.
3. Последовательно получить новые базисные решения.
4. Наименование и краткое объяснение операций, выполняемых на каждом шаге алгоритма.
5. Результаты решения задачи.
6. Необходимые объяснения и выводы.

В конце работы прилагается список использованной литературы. Выполненное индивидуальное домашнее задание направляется на проверку. После получения «допуска к собеседованию» работа должна быть защищена перед зачетом. Во время защиты индивидуального домашнего задания студент должен дать пояснение по сути вопросов, которые решаются в задаче, представить внесенные исправления в расчетах с учетом замечаний рецензента, если такие есть.

Выбор варианта исходных данных проводится по указанию преподавателя. Варианты исходных данных к задачам приведены в Приложениях 1 и 2.

9.1 Условия задач индивидуального домашнего задания

Задача №9.1

Предприятие выпускает n видов продукции с использованием m видов ограниченных ресурсов. Известны следующие величины:

$b_i\left(i=\overline{1,m}\right)$ – запас ресурса i-го вида;

$a_{ij}\left(i=\overline{1,m};\quad j=\overline{1,n}\right)$ – количество ресурса i-го вида, который идет на изготовление единицы продукции j-го вида;

$c_j\left(j=\overline{1,n}\right)$ – доход от реализации единицы продукции j-го вида.

Нужно составить такой план выпуска продукции, чтобы при ее реализации получить максимальный доход.

Исходные данные представлены в Приложении 1.

Задача №9.2

Имеется n типов специализированных автомобилей для перевозки почтовых отправлений. Необходимо по определенному маршруту перевезти m видов почтовых отправлений (контейнеры, посылки, мешки). Известны следующие величины:

$b_i\left(i=\overline{1,m}\right)$ – количество почтовых отправлений i-го вида, которые необходимо перевезти;

$a_{ij}\left(i=\overline{1,m};\quad j=\overline{1,n}\right)$ – вместительность почтовых отправлений i-го вида, за один рейс автомобиля j-го типа;

$c_j\left(j=\overline{1,n}\right)$ – затраты на один рейс автомобиля j-го типа.

Нужно составить такой план перевозки почтовых отправлений, чтобы при их перевозке затраты были минимальные.

Исходные данные представлены в Приложении 1.

Задача №9.3

На территории города есть m станций A_1, A_2, ..., A_n свободной емкостью a_1, a_2, ..., a_m номеров. В городе также есть n районов новой застройки B_1, B_2, ..., B_n, потребности которых в телефонах составляют соответственно b_1, b_2, ..., b_n номеров.

Нужно выбрать такой вариант распределения свободных емкостей телефонных станций между районами, который обеспечивал бы минимальные затраты как на строительство, так и на эксплуатацию линейных сооружений городской телефонной сети.

Исходные данные представлены в Приложении 2.

Средние расстояния от станций до районов для всех вариантов одинаковые и заданы в табл. 9.5.

9.2 Методические указания по выполнению индивидуального домашнего задания

9.2.1 Определение оптимального плана производства продукции

Ключевые положения.

Симплекс-метод (или метод последовательного улучшения плана) дает возможность, начав из исходного опорного плана задачи, получить последовательность новых ее опорных планов, которая завершается оптимальным планом, если он существует.

Процедура симплекс-метода содержит три важных элемента:

- указывает способ нахождения исходного базисного плана или устанавливает невозможность его построения (т.е. устанавливает противоречивость условий задачи);
- устанавливает признак, который дает возможность проверить, есть ли базисный план оптимальным;
- формулируются правила, по которым неоптимальный план можно улучшить.

Рассмотрим алгоритм симплексного метода на конкретном примере.

Формулировка задачи планирования производства (задача об использовании ресурсов).

Для изготовления разных изделий *A*, *B* и *C* предприятие использует три разных вида сырья. Нормы затраты сырья на производство одного изделия каждого вида, цена одного изделия *A*, *B* и *C*, а также общее количество сырья каждого вида, которое может быть использовано предприятием, приведены в табл. 9.1.

Таблица 9.1 – Исходные данные

Вид сырья	Нормы затрат сырья (кг) на одно изделие			Общее кол-во сырья (кг)
	A	*B*	*C*	
I	12	10	9	220
II	15	18	20	400
III	6	4	4	100
Цена одного изделия (ден.ед.)	30	32	30	–

Изделия A, B и C могут производиться в любых соотношениях (сбыт обеспечен), но производство ограничено выделенным предприятию сырьем каждого вида.

Составить план производства изделий, при котором общая стоимость всей изготовленной предприятием продукции является максимальной.

Составление математической модели задачи.

Искомый выпуск изделий A обозначим через x_1, изделий B – через x_2, изделий C – через x_3.

Поскольку есть ограничения на выделенный предприятию фонд сырья каждого вида, переменные x_1, x_2, x_3 должны удовлетворять следующей системе неравенств:

$$\begin{cases} 12x_1 + 10x_2 + 9x_3 \le 220, \\ 15x_1 + 18x_2 + 20x_3 \le 400, \\ 6x_1 + 4x_2 + 4x_3 \le 100. \end{cases} \tag{9.1}$$

Общая стоимость изготовленной предприятием продукции при условии выпуска x_1 изделий A, x_2 изделий B и x_3 изделий C представляет:

$$f = 30x_1 + 32x_2 + 30x_3. \tag{9.2}$$

По своему экономическому содержанию переменные x_1, x_2, x_3 могут принимать лишь неотрицательные значения:

$$x_1, x_2, x_3 \ge 0. \tag{9.3}$$

Таким образом, приходим к следующей математической задаче: среди всех неотрицательных решений (9.3) системы неравенств (9.2) нужно найти такое, при котором целевая функция (9.1) принимает максимальное значение.

Приведение математической модели задачи к каноническому виду и получение исходного базисного плана.

Прежде чем решать задачу ЛП симплекс-методом, ее необходимо привести к канонической форме.

Для этого перейдем от ограничений-неравенств и к ограничениям-равенствам. Введем три положительные дополнительные переменные x_4, x_5, x_6, в результате чего ограничения запишутся в виде системы уравнений

$$f = 30x_1 + 32x_2 + 30x_3 + 0\,x_4 + 0\,x_5 + 0\,x_6 \to \max;$$

$$\begin{cases} 12x_1 + 10x_2 + 9x_3 + x_4 = 220, \\ 15x_1 + 18x_2 + 20x_3 + x_5 = 400, \\ 6x_1 + 4x_2 + 4x_3 + x_6 = 100, \end{cases}$$

$$x_j \ge 0 \quad \left(j = \overline{1,6}\right).$$

Эти дополнительные переменные по экономическому содержанию означают не используемое при данном плане производства количество сырья того или иного вида. Например, x_4 – это неиспользуемое количество сырья I вида.

Рассматриваемая задача относится к таким ЗЛП, для которых может быть получен исходный базисный план.

Для того, чтобы это было возможно, выделяют переменные, которые присутствуют только в одном уравнении с коэффициентом единица и принимают их в качестве базисных. Затем определяется исходный базисный план и значение целевой функции для этого плана.

В первом ограничении базисной является дополнительная переменная x_4, во втором – дополнительная переменная x_5 в третьем – дополнительная переменная x_6.

Для получения исходного базисного решения приравняем к нулю небазисные переменные: $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ и получим значение базисных переменных: $x_4 = 220$, $x_5 = 400$, $x_6 = 100$. Значение целевой функции $f = 0$.

Итерация 1

Шаг 1. Составление исходной симплексной таблицы.

При выполнении расчетов вручную, вычисления удобно проводить с помощью специальных таблиц, которые называются симплексными таблицами.

Исследование базисного плана на оптимальность, а также дальнейший вычислительный процесс удобнее производить, если условие задачи и исходные данные, полученные после определения исходного базисного плана, записать так, как показано в табл. 9.2.

Таблица 9.2 – Исходная симплекс-таблица

Базис	*C*	*B*	30	32	30
			x_1	x_2	x_3
x_4	0	220	12	10^*	9
x_5	0	400	15	18	20
x_6	0	100	6	4	4
	Δ	0	–30	–32	–30

Составим исходную симплекс-таблицу следующим образом. В столбце «Базис» записываются базисные переменные, в столбце «*C*» – коэффициенты при базисных переменных в целевой функции (c_i), в столбце «*B*» – свободные члены ограничений (b_i), т.е. значение базисных переменных.

В верхней строке перечисленные коэффициенты при всех небазисных переменных в ЦФ; рядом ниже записаны все небазисные переменные x_j ($j = \overline{1, n}$).

В столбцах под x_j ($j = \overline{1, n}$) отображены коэффициенты при небазисных переменных в ограничениях (a_{ij}).

Строка «Δ» в столбце «*B*» содержит значение целевой функции, которая рассчитывается по формуле $f = \sum c_i b_i$, а столбцы x_j этой же строки – значения относительных оценок (Δ_j), что рассчитываются по формуле $\Delta_j = \sum c_i a_{ij} - c_j$.

Дальше определим значения ЦФ и оценок:

$$f = \sum c_i b_i = c_4 b_4 + c_5 b_5 + c_6 b_6 = 0 \cdot 220 + 0 \cdot 400 + 0 \cdot 100 = 0 \text{ ден.ед.}$$

Определяем оценки Δ_j для столбцов x_1, x_2 и x_3, которые не входят в базис:

$$\Delta_1 = \sum c_i a_{i1} - c_1 = 0 \cdot 12 + 0 \cdot 15 + 0\ 6 \cdot -30 = -30;$$

$$\Delta_2 = \sum c_i a_{i2} - c_2 = 0 \cdot 10 + 0 \cdot 18 + 0\ 4 \cdot -32 = -32;$$

$$\Delta_3 = \sum c_i a_{i3} - c_3 = 0 \cdot 9 + 0 \cdot 20 + 0\ 4 \cdot -30 = -30.$$

Записываем найденные значения оценок в Δ_j -ой строке таблицы.

Из табл. 9.2 видно, что значения всех основных x_1, x_2, x_3 равны нулю, а дополнительные переменные принимают свои значения согласно ограничениям задачи.

Эти значения переменных соответствуют такому «плану», при котором ничего не производится, сырье не используется и значение целевой функции равно нулю (т.е. стоимость изготовленной продукции отсутствует). Этот план, конечно, не является оптимальным.

Улучшение плана достигается за счет включения в базис переменной, которая входит во множество небазисных, и исключение одной из переменных, которая входит в базис.

Шаг 2. Проверка полученного плана на оптимальность.

Признак оптимальности опорного плана ЗЛП для задачи на максимум:

Если при некотором опорном плане для всех переменных x_j $(j = \overline{1, n})$ *выполняется условие* $\Delta_j \geq 0$ $(j = \overline{1, n})$, *то данный план является оптимальным.*

В строке «Δ_j» есть три отрицательных оценки. Это означает, что данный план неоптимальный и его можно улучшить.

Отрицательные числа не только свидетельствуют о возможности увеличения общей стоимости произведенной продукции, но и показывают, на сколько увеличивается эта сумма при введении в план единицы того или иного вида продукции.

Так, число 30 означает, что при включении в план производства одной единицы изделия *A* обеспечивает увеличение стоимости продукции на 30 ден.ед. Если включить в план производства по одной единице изделий *B* и *C*, то общая стоимость изготавливаемой продукции возрастет соответственно на 32 и 30 ден.ед.

Поэтому с экономической точки зрения целесообразным является включение в план производства изделий *B*. Это же необходимо сделать и на основании формального признака симплексного метода, поскольку максимальное по абсолютной величине отрицательное число стоит в 4-ой строке переменной x_3 (см. шаг 3).

Шаг 3. Определение переменной, вводимой в базис.

В базис вводится переменная, которой соответствует наибольшая по абсолютной величине отрицательная оценка:

$$\max \{|\Delta_j|\} = \max \{|-30|; |-32|; |-30|\} = 32.$$

Это будет переменная x_2, столбец при этой переменной – *ведущий.* В базис вводится переменная x_2.

Шаг* 4. *Определение переменной, выводимой из базиса.

Для этого составим соотношения элементов столбца «*B*» к *положительным элементам* ведущего столбца и выберем минимум:

$$\min\left(\frac{b_4}{a_{42}}=\frac{220}{10}=22;\quad \frac{b_5}{a_{52}}=\frac{400}{18}=22{,}2;\quad \frac{b_6}{a_{62}}=\frac{100}{4}=25\right)=22.$$

Так как наименьшая частица (22) соответствует базисной переменной x_4, то эта переменная подлежит замене переменной x_2. Строка при базисной переменной x_4 – *ведущая.*

На пересечении ведущей строки и ведущего столбца находится *ведущий элемент* – $a_{42} = 10$.

Найдя число 220/10 = 22, мы тем самым с экономической точки зрения определили, какое количество изделий *B* предприятие может изготовить с учетом норм затрат и имеющихся объемов сырья каждого вида. Так как сырья одного вида есть соответственно 220, 400 и 100 кг, а на одно изделие *B* нужно истратить сырья каждого вида соответственно 10, 18 и 4 кг, то максимальное количество изделий *B*, что может быть изготовлено предприятием, равно min (220/10, 400/18, 100/4) = 220/10 = 22, т.е. ограничивающим фактором производства изделий *B* является имеющийся объем сырья II вида. С учетом его наличия предприятие может изготовить 22 изделия *B*.

Следовательно, переменная x_4 подлежит исключению из базиса. Столбец при переменной x_2 ведущий, первая строка ведущая; элемент 10 – ведущий элемент (отметим в табл. 9.2 «*»).

Шаг 5. Составление симплексной таблицы для второй итерации.

Для определения нового базисного плана делаем пересчет элементов таблицы и результаты заносим в новую симплексную таблицу (табл. 9.3).

Выбранные переменные в новой симплексной таблице меняются местами вместе со своими коэффициентами в целевой функции, т.е. в столбце "БАЗИС" заменяем x_4 на x_2. и соответственно в столбце «*C*» заменяем $c_4 = 0$ на $c_2 = 32$. Остальные переменные переписываются без изменений со своими коэффициентами в целевой функции.

Затем делаем пересчет элементов таблицы и результаты заносим в новую симплексную таблицу.

Проведем пересчет элементов симплексной таблицы, начиная с ведущей строки. Все элементы этой строки делятся на ведущий элемент, т.е. на 10:

$$b_2=\frac{b_4}{a_{42}}=\frac{220}{10}=22;\quad a_{21}=\frac{a_{41}}{a_{42}}=\frac{12}{10}=\frac{6}{5};\quad a_{23}=\frac{a_{43}}{a_{42}}=\frac{9}{10}.$$

Значение ведущего элемента примет:

$$a_{24}=\frac{1}{a_{42}}=\frac{1}{10}.$$

Элементы ведущего столбца примут такие значения:

$$a_{54} = -\frac{a_{52}}{a_{42}} = -\frac{18}{10} = -\frac{9}{5}; \quad a_{64} = -\frac{a_{62}}{a_{42}} = -\frac{4}{10} = -\frac{2}{5}; \quad \Delta_4 = -\frac{\Delta_2}{a_{42}} = -\frac{(-32)}{10} = \frac{16}{5}.$$

Таблица 9.3 – Симплекс-таблица на итерации 1

Базис	*C*	*B*	30	0	0
			x_1	x_4	x_3
x_2	32	22	6/5	1/10	9/10
x_5	0	4	33/5	–9/5	19/5*
x_6	0	12	6/5	–2/5	2/5
	Δ	704	42/5	16/5	–6/5

Далее вычислим остальные элементы новой симплекс-таблицы по *правилу прямоугольника.*

Для того, чтобы применить правило прямоугольника, в симплексной таблице нужно наметить четыре числа:

- пересчитываемый элемент;
- ведущий элемент;
- элемент, который находится на пересечении ведущей строки и столбца с пересчитываемым элементом;
- элемент, который находится на пересечении ведущего столбца и строки с пересчитываемым элементом.

Намеченные четыре элемента образуют прямоугольник.

Назовем диагональ, которая соединяет ведущий и пересчитываемый элемент – главной, а другую – вспомогательной.

Правило прямоугольника заключается в следующем**:**

(новое значение) = (старое значение) –
изведение эл-тов вспомогательной диагонали/ведущий элемент)

При вычислении по правилу прямоугольника все данные берутся из таблицы предыдущей итерации (в нашем примере табл. 9.2).

Проведем расчет элементов строки, которая соответствует базисной переменной x_5:

$$b_5^{'} = b_5 - \frac{b_4 \cdot a_{52}}{a_{42}} = 400 - \frac{220 \cdot 18}{10} = 4;$$

$$a_{51}^{'} = a_{51} - \frac{a_{41} \cdot a_{52}}{a_{42}} = 15 - \frac{12 \cdot 18}{10} = -\frac{33}{5};$$

$$a_{53}^{'} = a_{53} - \frac{a_{43} \cdot a_{52}}{a_{42}} = 20 - \frac{9 \cdot 18}{10} = \frac{19}{5}.$$

Проведем расчет элементов строки, которая соответствует базисной переменной x_6:

$$b_6^{'} = b_6 - \frac{b_4 \cdot a_{62}}{a_{42}} = 100 - \frac{220 \cdot 4}{10} = 12;$$

$$a'_{61} = a_{61} - \frac{a_{41} \cdot a_{62}}{a_{42}} = 6 - \frac{12 \cdot 4}{10} = \frac{6}{5};$$

$$a'_{63} = a_{63} - \frac{a_{43} \cdot a_{62}}{a_{42}} = 4 - \frac{9 \cdot 4}{10} = \frac{2}{5}.$$

Проведем расчет элементов строки, которая соответствует целевой функции и относительных оценок Δ_j:

$$f' = f - \frac{b_4 \cdot \Delta_2}{a_{42}} = 0 - \frac{220 \cdot (-32)}{10} = 704;$$

$$\Delta'_1 = \Delta_1 - \frac{a_{41} \cdot \Delta_2}{a_{42}} = -30 - \frac{12 \cdot (-32)}{10} = \frac{42}{5};$$

$$\Delta'_3 = \Delta_3 - \frac{a_{43} \cdot \Delta_2}{a_{42}} = -30 - \frac{9 \cdot (-32)}{10} = -\frac{6}{5}.$$

Шаг 6. Проверка правильности расчетов целевой функции и оценок.

Проверяем правильность расчета значений целевой функции f и оценок Δ_j по формулам, приведенным на шаге 1.

Определим значение целевой функции для первой итерации (табл. 9.3). $f = \sum c_i b_i = c_2 b_2 + c_5 b_5 + c_6 b_6 = 32 \cdot 22 + 0 \cdot 4 + 0 \cdot 12 = 704$ ден.ед.

Определим значения относительных оценок для первой итерации.

$\Delta_1 = \sum c_i a_{i1} - c_1 = (32 \cdot 6/5 + 0 \cdot 33/5 + 0 \cdot 6/5) - 30 = 42/5;$

$\Delta_4 = \sum c_i a_{i4} - c_4 = (32 \cdot 1/10 + 0 \cdot (-9/5) + 0 \cdot (-2/5)) - 0 = 16/5;$

$\Delta_3 = \sum c_i a_{i3} - c_3 = (32 \cdot 9/10 + 0 \cdot 19/5 + 0 \cdot 2/5) - 30 = -6/5.$

По окончании расчета всех элементов табл. 9.3 получен новый базисный план. Как видно из этой таблицы, новым опорным планом задачи является план:

небазисные переменные: $x_1 = x_4 = x_3 = 0$

значения базисных переменных: $x_2 = 22$, $x_5 = 4$, $x_6 = 12$.

Значение целевой функции $f = 704$.

При данном плане производства изготовляется 22 ед. изделия *В* и остаются неиспользованными 4 кг сырья II вида и 12 кг сырья III вида.

Стоимость всей произведенной при этом плане продукции равна 704 ден. ед.

Переходим к шагу 2 (Итерация 2).

Итерация 2

Из изложенного экономического содержания данных следует, что найденный на второй итерации план задачи не является оптимальным. Это видно и с 4-ой строки, поскольку в столбце небазисной переменной x_3 присутствует отрицательное число –6/5. Значит в базис следует ввести переменную x_3, т.е. в новом плане следует предусмотреть выпуск изделий *С.*

Процесс нахождения нового базисного плана продемонстрирован в табл. 9.4.

Таблица 9.4 – Симплекс-таблица на итерации 2

Базис	C	B	30	0	0
			x_1	x_4	x_5
x_2	32	400/19	– 69/190	10/19	– 9/38
x_3	30	20/19	33/19	– 9/19	5/19
x_6	0	220/19	48/95	–4/19	– 2/19
	Δ	13400/19	996/95	50/19	6/19

После заполнения таблицы второй итерации проверим, является ли данный план оптимальным. Просматриваем строку Δ_j. В этой строке нет отрицательных оценок. Это означает, что найденный опорный план является оптимальным.

Как видно из табл. 9.4, новым опорным планом задачи является план:

небазисные переменные: $x_1 = x_4 = x_5 = 0$;

значения базисных переменных: $x_2 = 400/19$, $x_3 = 20/19$, $x_6 = 220/19$.

Значение целевой функции $f = 13400/19$.

Следовательно, план выпуска продукции, который включает изготовление 400/19 ≈ 21,05 ед. изделий *B* и 20/19 ≈ 1,05 ед. изделий *C*, является оптимальным.

При данном плане выпуска изделий полностью используется сырье I и II видов и остается неиспользованным 220/19 ≈ 11,58 кг сырья III вида, а максимальная стоимость произведенной продукции равна 705,26 ден. ед.

Оптимальным планом производства продукции не предполагается изготовление изделий *A*. Введение в план выпуска продукции изделий вида *A* привело бы к уменьшению общей стоимости. Это видно с $\Delta_1 = 996/95 \approx 10{,}48$, где число 10,48 показывает, что при данном плане включение в него выпуска одной единицы изделия *A* приводит лишь к уменьшению общей величины стоимости на 10,48 ден. ед.

Правила контроля вычислений в симплекс-методе.

1. Алгоритм симплекс-метода построен таким образом, что в столбце «*B*» никогда не могут появиться отрицательные элементы. Если в результате расчетов в столбце «*B*» появится отрицательный элемент, то это может означать, что:

- при вычислении этого элемента допущена арифметическая ошибка;
- неверно выбрана ведущая строка – не по минимуму соотношений; в действительности минимум соотношений в той строке, где появился минус.

2. Значение ЦФ от итерации до итерации должно улучшаться (увеличиваться в задаче на максимум, уменьшаться в задаче на минимум). Оно может остаться без изменения в том случае, когда план вырожденный (в столбце «*B*» есть нули).

9.2.2 Определение оптимального плана развития городской телефонной сети

Содержательная постановка задачи.

На территории города есть m станций A_1, A_2, ..., A_n свободной емкостью a_1, a_2, ..., a_m номеров. В городе также есть n районов новой застройки B_1, B_2, ..., B_n потребности которых в телефонах составляют соответственно b_1, b_2, ..., b_n номеров.

Нужно выбрать вариант распределения свободных емкостей телефонных станций между районами, который обеспечивал бы минимальные затраты как на строительство, так и на эксплуатацию линейных сооружений городской телефонной сети.

Разные варианты распределения емкостей станций между районами города будут отличаться общей длиной абонентских линий между станциями и районами города, которую обозначим через L. Естественно, что вариантом, который обеспечивает минимум указанных в условии задачи затрат, будет, при прочих равных условиях, такое распределение емкостей, при котором L будет минимальна.

Дальнейшее рассмотрение задачи проведем для следующих исходных данных:

- количество станций m = 3, их свободные емкости соответственно составляют 3000, 4000 и 5000 номеров;
- количество районов n = 4, их потребности в телефонах соответственно составляют 1000,1500,2500 и 3000 номеров;
- средние расстояния от станций до районов заданы табл. 9.5.

Как следует из рассмотрения исходных данных задачи, суммарная потребность всех районов составляет 7000 номеров, а общая свободная емкость станций составляет 12000 номеров.

Задача *несбалансированная*, так как суммарная емкость станций, которая может быть использована на развитие, превышает суммарную потребность районов в телефонах на 4000 номеров.

Для приведения задачи к сбалансированному виду введем 5-ый (фиктивный) район с потребностью в телефонах, равной указанной разности:

$$B_5 = \sum_{i=1}^{3} A_i - \sum_{j=1}^{4} B_j = 12000 - 8000 = 4000 \text{ номеров.}$$

Средние расстояния от станций до фиктивного района примем равными нулю, так как линии прокладываться не будут.

Составление математической модели задачи.

Рассматриваемая задача представлена на рис. 9.1 в виде сети с m исходными пунктами (станциями) и n пунктами назначения (районами).

На этом рисунке через x_{ij} обозначено количество номеров, предоставляемых i-ой станцией j-му району, а через c_{ij} – среднее расстояние между i-ой станцией и j-ым районом.

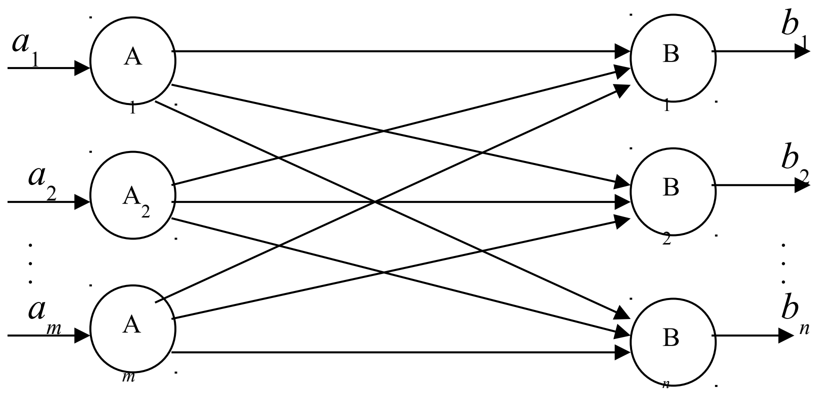

Рисунок 9.1 – Сеть связи с исходными пунктами (станциями) и пунктами назначения (районами)

Оптимизационная математическая модель содержит систему ограничений (условий) и целевую функцию.

В задаче нужно найти вариант распределения емкостей станций между районами, который обеспечивает минимальное значение L.

Выражение для определения L будет иметь вид:

$$L = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} ,$$

что представляет собой целевую функцию модели.

Ограничивающие условия задачи запишем, допуская *равенство* суммы свободных емкостей станций и суммарной потребности районов в номерах.

Система ограничений будет содержать две группы ограничений. Первая группа ограничивающих условий, количество которых равно m (количество станций), отображает тот факт, что вся свободная емкость каждой станции должна быть использована. Вторая группа ограничений, количество которых равно n (количество районов), отображает то обстоятельство, что потребность каждого района в номерах должна быть полностью удовлетворена. Модель также необходимо дополнить условиями неотрицательности переменных.

С учетом всех сделанных замечаний, математическую модель задачи представим в виде:

$$L = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} ;$$

$$\begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{n} x_{ij} = A_i, \quad \left(i = \overline{1, m}\right); \\ \sum\limits_{i=1}^{m} x_{ij} = B_j, \quad \left(j = \overline{1, n}\right); \\ x_{ij} \geq 0 \left(i = \overline{1, m};\ j = \overline{1, n}\right). \end{cases}$$

Переходим к построению математической модели задачи относительно исходных данных.

Запишем сначала ограничивающие условия для станций. Эта группа ограничений, количество которых равно 3, отображает тот факт, что вся свободная емкость каждой станции должна быть полностью использована:

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} = 3000, \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} + x_{25} = 4000, \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} + x_{35} = 5000. \end{cases}$$

Вторая группа ограничений, количество которых равно 5, отображает тот факт, что потребность каждого района в номерах должна быть полностью удовлетворенна:

$$\begin{cases} x_{11} + x_{21} + x_{31} = 1000, \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} = 1500, \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} = 2500, \\ x_{14} + x_{24} + x_{34} = 3000, \\ x_{15} + x_{25} + x_{35} = 4000. \end{cases}$$

Общая длина абонентских линий между станциями и районами будет равняться:

$$\begin{aligned} L = {} & c_{11}x_{11} + c_{12}x_{12} + c_{13}x_{13} + c_{14}x_{14} + c_{15}x_{15} + \\ & + c_{21}x_{21} + c_{22}x_{22} + c_{23}x_{23} + c_{24}x_{24} + c_{25}x_{25} + \\ & + c_{31}x_{31} + c_{32}x_{32} + c_{33}x_{33} + c_{34}x_{34} + c_{35}x_{35} \to \min. \end{aligned}$$

Последнее выражение представляет собой целевую функцию, которая минимизирует длину абонентских линий между станциями и районами города.

Математическую модель следует дополнить условием неотрицательности переменных:

$$x_{ij} \geq 0 \left(i = \overline{1,3}; \quad j = \overline{1,5} \right).$$

Для решения распределительной задачи разработаны методы, которые разрешают найти опорный и оптимальный планы как ручным способом, так с применением ЭВМ.

Решение распределительной задачи включает два этапа:

- определение опорного плана;
- определение оптимального плана.

При проведении расчетов вручную используются таблицы установленной формы и содержания, в которые заносятся исходные данные задачи и с помощью которых находится решение задачи (табл. 9.5). Центральная часть (кроме строк и столбцов внешней части таблицы) содержит количество строк и столбцов, равное количеству станций и районов соответственно. В выделенных верхних правых углах клеток таблицы указываются средние длины абонентских линий между станциями и районами.

Таблица 9.5 – Исходные данные транспортной задачи

Районы / Станции	B_1	B_2	B_3	B_4	B^{ϕ}_5	a_i
A_1	8 x_{11}	7 x_{12}	6 x_{13}	10 x_{14}	0 x_{15}	3000
A_2	6 x_{21}	15 x_{22}	11 x_{23}	6 x_{24}	0 x_{25}	4000
A_3	4 x_{31}	7 x_{32}	10 x_{33}	10 x_{34}	0 x_{35}	5000
b_j	1000	1500	2500	3000	4000	12000

Определение опорного плана.

Определение оптимального плана распределительной задачи начинают с нахождение какого-нибудь ее опорного плана. Этот план может быть найден одним из следующих методов:

- методом северо-западного угла (диагональный метод);
- методом минимального элемента;
- методом аппроксимации Фогеля.

Опорный план во всех случаях находят последовательно за $m + n - 1$ шагов, на каждом из которых заполняют одну клетку, которую называют занятой (заполненной).

Методика составления опорного плана этими методами рассмотрена в п. 7.4.

В нашем примере составим опорный план методом северо-западного угла (см. табл. 9.6). С целью сокращения записей, в этой и последующих таблицах значения емкостей приводятся в сотнях номеров.

Полученный в табл. 9.6 опорный план необходимо проверить на вырожденность. План невырожденный так как количество заполненных клеток равно $m + n - 1 = 3 + 5 - 1 = 7$.

Таблица 9.6 – Опорный план составлен методом северо-западного угла

u_i \ v_j	$v_1 = 8$	$v_2 = 7$	$v_3 = 6$	$v_4 = 1$	$v_5 = -9$	a_i
$u_1 = 0$	8 – **10**	7 **15**	6 + **5**	10	0	30
$u_2 = 5$	6	15	11 – **20**	6 + **20**	0	40
$u_3 = 9$	4 + *	7	10	10 – **10**	0 **40**	50
b_j	10	15	25	30	40	120

Определим общую длину абонентских линий по данному варианту. Для этого для каждой x_{ij}-ой заполненной клетки найдем произведение $c_{ij}x_{ij}$ и результаты просуммируем:

$$L = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{5} c_{ij}x_{ij} = c_{11}x_{11} + c_{12}x_{12} + c_{13}x_{13} + c_{23}x_{23} + c_{24}x_{24} + c_{34}x_{34} + c_{35}x_{35} =$$

$$= 8 \cdot 10 + 7 \cdot 15 + 6 \cdot 5 + 11 \cdot 20 + 6 \cdot 20 + 10 \cdot 10 + 0 \cdot 40 = 66500 \text{ км}.$$

(В последнем результате учтено, что емкость приводилась в сотнях номеров).

Определение оптимального плана.

Для определения оптимального плана распределительной задачи разработаны несколько методов. Одним из более часто используемых методов является *метод потенциалов,* с помощью которого найденный опорный план (например, методом северо-западного угла) последовательно улучшается до получения оптимального плана. Оптимальное решение находят путем осуществления ряда повторяемых вычислительных процедур и итераций. Основная особенность итерационной процедуры заключается в том, что на каждом шаге получают решение, более близкое к оптимальному, чем предыдущее решение. Метод потенциалов обеспечивает монотонное убывание значения целевой функции и позволяет за конечное число итераций найти ее минимум. Рассмотрим алгоритм метода потенциалов.

Итерация 1

***Шаг 1. Определение потенциалов*.**

Потенциалами называются числа, приписанные соответственно каждой строке и каждому столбцу. Потенциал, который определяется для каждой строки, обозначим u_i ($i = \overline{1,3}$), а потенциал для каждого столбца v_j ($j = \overline{1,5}$).

Для каждой заполненной клетки, т.е. для каждой базисной переменной строится соотношение:

$$u_i + v_j = c_{ij}.$$

Полученная система должна содержать $m + n - 1$ уравнений (так как количество базисных переменных равно $m + n - 1$) с $m + n$ неизвестными. Такая система имеет множество решений и каждая из них будет содержать искомые потенциалы. Чтобы найти одно из решений, значение одного потенциала в системе задается произвольно. Обычно принимают $u_1 = 0$, и находят значение остальных потенциалов.

Запишем соотношения и определим потенциалы:

x_{11}:	$u_1 + v_1 = 8$,	$u_1 = 0$,	$v_1 = 8$,
x_{12}:	$u_1 + v_2 = 7$,	$u_2 = 5$,	$v_2 = 7$,
x_{13}:	$u_1 + v_3 = 6$,	$u_3 = 9$,	$v_3 = 6$,
x_{23}:	$u_2 + v_3 = 11$,		$v_4 = 1$,
x_{24}:	$u_2 + v_4 = 6$,		$v_5 = -9$.
x_{34}:	$u_3 + v_4 = 10$,		
x_{35}:	$u_3 + v_5 = 0$,		

Значения потенциалов заносим в табл. 9.6.

Шаг 2. Определение оценок.

Для каждой незаполненной клетки, т.е. для каждой небазисной переменной, рассчитывается величина оценки по формуле: $\bar{c}_{ij} = u_i + v_j - c_{ij}$.

Рассчитаем величины оценок

$x_{14} \Rightarrow \bar{c}_{14} = u_1 + v_4 - c_{14} = 0 + 1 - 10 = -9$,

$x_{15} \Rightarrow \bar{c}_{15} = u_1 + v_5 - c_{15} = 0 - 9 - 0 = -9$,

$x_{21} \Rightarrow \bar{c}_{21} = u_2 + v_1 - c_{21} = 5 + 8 - 6 = 7$,

$x_{22} \Rightarrow \bar{c}_{22} = u_2 + v_2 - c_{22} = 5 + 7 - 15 = -3$,

$x_{25} \Rightarrow \bar{c}_{25} = u_2 + v_5 - c_{25} = 5 - 9 - 0 = -4$,

$x_{31} \Rightarrow \bar{c}_{31} = u_3 + v_1 - c_{31} = 9 + 8 - 4 = \mathbf{13}$**,**

$x_{32} \Rightarrow \bar{c}_{32} = u_3 + v_2 - c_{32} = 9 + 7 - 7 = 9$,

$x_{33} \Rightarrow \bar{c}_{33} = u_3 + v_3 - c_{33} = 9 + 6 - 10 = 5$.

Шаг 3. Проверяем полученный план на оптимальность.

Если для каждой незаполненной клетки выполняется условие $\bar{c}_{ij} \le 0$, то план является оптимальным. В противном случае план не оптимальный и необходимо переходить к новому базисному плану.

Шаг 4. Определение переменной, вводимой в базис.

Рассматриваем все свободные клетки, для которых $\bar{c}_{ij} > 0$, и среди оценок выбираем ту, которая имеет максимальное значение. Переменная, что соответствует этой клетке, вводится в базис. В нашем случае это переменная x_{31}. Если максимальные одинаковые оценки имеют две и более клетки, то выбирается первая по порядку. Выбранная клетка обозначается в табл. 9.6 «*».

***Шаг 5. Построение цикла*.**

Для правильного распределения свободной емкости станций строится цикл. Правила построения цикла подробно рассмотрены в п. 7.5 (шаг 4).

Шаг 6. Определение переменной, выводимой из базиса.

При правильном построении опорного плана для любой свободной клетки можно построить лишь один цикл. После того как для выбранной свободной клетки он построен, следует перейти к новому базисному плану. Для этого необходимо изменить значения базисных переменных в пределах клеток связанных с выбранной клеткой. Эти значения переменных находятся по следующим правилам:

1) в каждой клетке цикла, начиная с клетки, которая соответствует переменной вводимой в базис (x_{31}), проставляются поочередно знаки «+» и «–» (будем называть эти клетки плюсовыми и минусовыми);

2) в клетках со знаком „–” выбирают минимальную величину. В нашем примере эта величина 10. Переменные, что входят в цикл, корректируются на эту величину в зависимости от знаков „+” и „–”, что стоят в клетках цикла (это число прибавляют к соответствующим числам, которые

находятся в плюсовых клетках, и отнимают от чисел, которые находятся в минусовых клетках);

3) выбранная клетка становится занятой, а минусовая клетка, в которой было минимальное из чисел x_{ij} – считается свободной. Переменная, что соответствует этой клетке выводится из базиса. В нашем случае это переменная x_{11}. При этом, если в минусовых клетках есть два или более одинаковых минимальных числа x_{ij}, то освобождают лишь одну из таких клеток, а остальные оставляют занятыми (с нулевыми значениями базисных переменных).

Значения переменных, включенных в цикл, после описанной корректировки переносятся в новую таблицу. Значения переменных, которые не входят в цикл, переносятся в новый базисный план без изменений. Новый базисный план отображен в табл. 9.7.

Таблица 9.7 – Опорный план на итерации 1

u_i \ v_j	$v_1 = -5$	$v_2 = 7$	$v_3 = 6$	$v_4 = 1$	$v_5 = -9$	a_i
$u_1 = 0$	8	7 – **15**	6 + **15**	10	0	30
$u_2 = 5$	6	15	11 – **10**	6 + **30**	0	20
$u_3 = 9$	4 **10**	7 + *	10	10 – **0**	0 **40**	50
b_j	10	15	25	30	40	100

Полученный в табл. 9.7 новый базисный план прежде всего необходимо проверить на вырожденность. План не вырожденный, так как количество заполненных клеток равно $m + n - 1 = 3 + 5 - 1 = 7$.

Значения базисных переменных:

$x_{12} = 15$, $x_{13} = 15$, $x_{23} = 10$, $x_{24} = 30$, $x_{31} = 10$, $x_{34} = 0$, $x_{35} = 40$.

Общая длина абонентских линий по данному варианту:

$$L = \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{5} c_{ij} x_{ij} = c_{12}x_{12} + c_{13}x_{13} + c_{23}x_{23} + c_{24}x_{24} + c_{31}x_{31} + c_{34}x_{34} + c_{35}x_{35} =$$

$$= 7 \cdot 15 + 6 \cdot 15 + 11 \cdot 10 + 6 \cdot 30 + 4 \cdot 10 + 10 \cdot 0 + 0 \cdot 40 = 58500 \text{ км}.$$

Шаг 7. Переход к шагу 1 следующей итерации.

Процесс получения оптимального плана иллюстрируется табл. 9.7–9.9 и нет необходимости в дальнейших объяснениях. На каждой итерации определяется значение целевой функции и монотонное ее убывание свидетельствует о правильности выполнения расчетов.

Таблица 9.8 – Опорный план на итерации 2

u_i \ v_j	$v_1 = 4$	$v_2 = 7$	$v_3 = 6$	$v_4 = 1$	$v_5 = 0$	a_i
$u_1 = 0$	8	7 – **15**	6 + **15**	10	0	30
$u_2 = 5$	6	15	11 – **10**	6 **30**	0 + *	40
$u_3 = 0$	4 **10**	7 + **0**	10	10	0 – **40**	50
b_j	10	15	25	30	40	100

Полученный в табл. 9.8 базисный план невырожденный.

Значения базисных переменных:

$x_{12} = 15$, $x_{13} = 15$, $x_{23} = 10$, $x_{24} = 30$, $x_{31} = 10$, $x_{32} = 0$, $x_{35} = 40$.

Общая длина абонентских линий по данному варианту:

$$L = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{5} c_{ij}x_{ij} = c_{12}x_{12} + c_{13}x_{13} + c_{23}x_{23} + c_{24}x_{24} + c_{31}x_{31} + c_{34}x_{34} + c_{35}x_{35} =$$

$$= 7 \cdot 15 + 6 \cdot 15 + 11 \cdot 10 + 6 \cdot 30 + 4 \cdot 10 + 7 \cdot 0 + 0 \cdot 40 = 58500 \text{ км}.$$

Таблица 9.9 – Оптимальный план

u_i \ v_j	$v_1 = 4$	$v_2 = 7$	$v_3 = 6$	$v_4 = 6$	$v_5 = 0$	a_i
$u_1 = 0$	8	7 **5**	6 **25**	10	0	30
$u_2 = 0$	6	15	11	6 **30**	0 **10**	40
$u_3 = 0$	4 **10**	7 **10**	10	10	0 **30**	50
b_j	10	15	25	30	40	100

Значения базисных переменных в оптимальном плане (табл. 9.9):

$x_{12} = 5$, $x_{13} = 25$, $x_{24} = 30$, $x_{25} = 10$, $x_{31} = 10$, $x_{32} = 10$, $x_{35} = 20$.

Общая длина абонентских линий по данному варианту:

$$L = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{5} c_{ij}x_{ij} = c_{12}x_{12} + c_{13}x_{13} + c_{24}x_{24} + c_{25}x_{25} + c_{31}x_{31} + c_{32}x_{32} + c_{35}x_{35} =$$

$$= 7 \cdot 5 + 6 \cdot 25 + 6 \cdot 30 + 0 \cdot 10 + 4 \cdot 10 + 7 \cdot 10 + 0 \cdot 30 = 57500 \text{ км}.$$

На этом рассмотрение решения задачи заканчивается. Следует отметить, что при заданных условиях не существует другого варианта распределения емкостей станций между районами, при котором общая длина абонентских линий была бы меньшей и, таким образом, затраты на их прокладку будут минимальными.

Полученные результаты задачи можно интерпретировать таким образом:

- первому району предоставляет 1000 номеров третья станция;

- второму району предоставляет 500 номеров первая станция и 1000 номеров третья станция;

- третий район получит 2500 номеров от первой станции;

- четвертый район получит 3000 номеров от второй станции.

Таким образом, вся потребность районов в номерах удовлетворена, полностью распределена свободная емкость первой станции, остаются нераспределенными 1000 номеров на второй станции и 3000 номеров на третьей станции.

Приложение 1. – Исходные данные к задачам №9.1 и №9.2

№ варианта	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{31}	a_{32}	a_{33}	b_1	b_2	b_3 c,	c_1	c_2	c_3
1	8	20	14	16	10	13	12	9	21	360	250	350	16	14	13
2	9	10	21	14	13	20	14	15	10	400	270	360	17	16	8
3	10	11	16	10	12	19	15	13	9	380	280	370	20	9	14
4	11	12	10	11	15	17	16	14	7	360	280	380	15	10	17
5	12	13	11	12	13	10	17	12	8	510	420	390	5	13	16
6	13	14	12	13	9	12	19	10	12	490	410	400	7	11	12
7	14	15	13	14	11	7	20	17	13	470	400	430	9	12	13
8	11	16	14	16	10	9	18	15	10	450	390	420	11	13	14
9	10	17	15	18	9	17	16	13	11	430	370	410	13	14	11
10	2	18	16	20	7	17	14	11	16	410	350	390	15	15	8
11	7	19	17	19	8	16	12	10	11	390	330	400	17	16	9
12	8	20	18	18	9	15	9	12	19	370	310	340	19	17	10
13	9	21	19	17	10	9	11	13	9	350	200	350	21	18	11
14	10	18	16	16	13	18	13	14	8	330	210	360	20	19	13
15	11	17	19	15	14	6	15	18	7	310	230	370	19	20	15
16	12	8	20	14	16	7	17	19	9	320	250	356	18	8	17
17	13	14	8	13	20	9	19	17	11	340	270	290	17	9	19
18	14	9	16	12	22	8	10	15	8	360	290	260	16	10	6
19	15	10	20	11	21	14	12	13	9	380	290	330	15	12	7
20	16	12	19	10	20	11	14	11	15	400	300	320	14	14	8
21	17	13	18	9	19	12	16	10	16	420	320	310	13	16	9
22	18	14	17	8	18	15	18	9	14	440	340	300	12	18	16
23	19	15	16	7	17	15	22	8	12	460	360	290	11	21	15
24	18	17	15	6	16	14	9	16	13	480	380	280	10	20	14
25	21	16	14	5	15	13	12	14	9	500	400	270	9	19	13
26	22	9	10	4	14	12	11	12	17	520	420	260	8	18	12
27	14	20	7	21	9	16	19	17	15	280	410	380	14	12	9
28	20	17	8	20	8	15	18	9	12	290	420	390	13	11	10
29	19	24	9	19	7	14	17	10	8	300	400	400	9	14	12
30	18	23	10	18	19	13	16	13	10	310	410	410	10	9	8
31	17	22	22	17	20	12	15	15	7	320	300	420	11	7	9
32	16	21	14	16	21	7	14	13	12	330	290	430	11	13	5
33	15	20	17	15	22	8	13	11	14	340	260	440	8	12	8
34	14	15	22	14	23	9	12	13	11	350	270	430	7	11	12
35	13	14	20	7	24	15	9	19	8	360	280	420	9	14	13
36	12	13	16	8	23	17	10	14	13	370	290	410	5	10	9
37	11	12	17	9	22	19	11	8	19	380	300	400	6	13	8
38	10	11	18	10	21	16	12	9	11	390	360	390	10	12	7
39	9	10	19	11	20	14	13	11	7	400	370	380	9	11	12
40	8	9	21	12	19	11	14	13	12	410	230	370	5	10	15
41	7	6	23	13	18	10	16	15	9	420	220	360	6	9	14
42	6	7	22	14	17	9	15	14	13	430	270	260	7	9	12
43	23	8	16	15	16	8	14	9	15	440	400	270	14	8	11
44	21	9	15	16	15	21	13	8	11	450	390	280	13	6	13
45	19	10	14	17	14	20	12	10	7	460	370	290	12	7	12
46	17	18	10	18	13	16	11	13	15	470	350	400	11	12	9
47	15	18	7	19	12	17	10	12	16	480	360	410	10	6	8
48	13	17	8	22	11	16	9	10	13	490	340	420	9	12	5
49	11	17	9	21	10	15	8	9	14	500	320	430	8	7	11
50	9	16	12	20	9	14	7	10	12	510	260	440	7	14	10

№ варианта	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{31}	a_{32}	a_{33}	b_1	b_2	b_3 |c,	c_1	c_2	c_3
51	8	20	14	16	10	13	12	9	21	260	350	150	15	11	10
52	9	10	21	14	13	20	14	15	10	300	370	360	15	16	9
53	10	11	16	10	12	19	15	13	9	280	280	270	10	19	12
54	11	12	10	11	15	17	16	14	7	160	180	280	13	131	16
55	12	13	11	12	13	10	17	12	8	40	420	40	6	13	16
56	13	14	12	13	9	12	19	10	12	300	410	45	8	11	12
57	14	15	13	14	11	7	20	17	13	30	30	300	9	12	13
58	11	16	14	16	10	9	18	15	10	200	290	320	12	14	14
59	10	17	15	18	9	17	16	13	11	530	560	410	12	16	12
60	2	18	16	20	7	17	14	11	16	210	250	290	18	16	8
61	7	19	17	19	8	16	12	10	11	490	430	400	14	16	9
62	8	20	18	18	9	15	9	12	19	380	320	340	22	14	10
63	9	21	19	17	10	9	11	13	9	360	200	340	20	18	10
64	10	18	16	16	13	18	13	14	8	340	240	360	18	16	12
65	11	17	19	15	14	6	15	18	7	320	240	380	18	20	14
66	12	8	20	14	16	7	17	19	9	220	250	350	12	8	14
67	13	14	8	13	20	9	19	17	11	440	480	280	16	8	18
68	14	9	16	12	22	8	10	15	8	360	260	160	16	10	6
69	15	10	20	11	21	14	12	13	9	340	190	430	15	12	6
70	16	12	19	10	20	11	14	11	15	420	320	220	14	14	8
71	17	13	18	9	19	12	16	10	16	220	320	210	13	16	9
72	18	14	17	8	18	15	18	9	14	440	340	400	12	16	18
73	19	15	16	7	17	15	22	8	12	360	380	260	12	26	16
74	18	17	15	6	16	14	9	16	13	480	380	280	12	20	18
75	21	16	14	5	15	13	12	14	9	500	400	300	6	18	14
76	22	9	10	4	14	12	11	12	17	520	420	320	8	18	12
77	14	20	7	21	9	16	19	17	15	380	410	370	10	12	9
78	20	17	8	20	8	15	18	9	12	390	420	380	14	16	10
79	19	24	9	19	7	14	17	10	8	300	400	500	10	14	12
80	18	23	10	18	19	13	16	13	10	320	420	420	12	10	8
81	17	22	22	17	20	12	15	15	7	310	200	420	12	6	8
82	16	21	14	16	21	7	14	13	12	340	260	450	15	11	6
83	15	20	17	15	22	8	13	11	14	240	260	240	8	12	8
84	14	15	22	14	23	9	12	13	11	360	280	480	8	18	12
85	13	14	20	7	24	15	9	19	8	160	180	120	6	14	12
86	12	13	16	8	23	17	10	14	13	420	480	410	5	10	9
87	11	12	17	9	22	19	11	8	19	280	200	220	6	12	8
88	10	11	18	10	21	16	12	9	11	380	380	380	10	12	8
89	9	10	19	11	20	14	13	11	7	400	440	360	6	16	12
90	8	9	21	12	19	11	14	13	12	420	240	380	5	10	15
91	7	6	23	13	18	10	16	15	9	320	320	360	6	6	14
92	6	7	22	14	17	9	15	14	13	420	220	260	8	9	12
93	23	8	16	15	16	8	14	9	15	460	440	220	14	8	10
94	21	9	15	16	15	21	13	8	11	440	380	280	12	6	12
95	19	10	14	17	14	20	12	10	7	460	470	490	12	8	10
96	17	18	10	18	13	16	11	13	15	460	360	400	10	12	10
97	15	18	7	19	12	17	10	12	16	280	260	240	10	6	8
98	13	17	8	22	11	16	9	11	13	460	440	420	9	12	8
99	11	17	9	21	10	15	8	9	14	500	400	300	8	10	12
100	8	16	12	20	9	14	7	10	12	410	460	440	6	14	10

Продолжение

Приложение 2. – Исходные данные к задаче №9.3

№ варианта	**A_1**	**A_2**	**A_3**	**B_1**	**B_2**	**B_3**	**B_4**
1	30	40	30	25	15	25	25
2	30	42	28	15	31	33	17
3	25	45	30	27	33	15	18
4	33	30	37	17	27	25	17
5	40	40	20	23	19	32	18
6	27	33	40	21	31	16	21
7	22	43	35	13	18	40	19
8	31	37	32	16	27	17	29
9	29	39	32	22	29	19	23
10	27	37	36	14	31	27	25
11	21	39	40	21	22	28	20
12	25	35	40	15	31	33	17
13	28	38	34	20	19	30	20
14	33	33	34	17	27	25	17
15	19	21	60	23	19	32	18
16	43	37	20	25	35	19	13
17	35	27	38	13	18	40	19
18	24	41	35	21	23	27	20
19	31	37	32	21	23	27	20
20	22	43	35	16	27	17	29
21	42	27	31	22	29	19	23
22	27	33	40	14	31	27	25
23	42	27	31	21	22	28	20
24	43	37	20	14	31	27	25
25	35	27	38	16	27	17	29
26	23	47	30	16	27	17	29
27	42	27	31	27	33	15	18
28	23	47	30	21	23	27	20
29	30	42	28	20	J9	30	20
30	25	45	30	17	27	25	17
31	33	30	37	23	19	32	18
32	40	40	20	21	31	16	21
33	26	24	50	13	18	40	19
34	27	33	40	21	23	27	20
35	40	36	24	16	27	17	29
36	32	33	35	22	29	19	23
37	31	37	32	14	31	27	25
38	29	39	32	21	22	28	20
39	27	37	36	15	31	33	17
40	25	50	25	25	35	19	13
41	21	39	40	27	33	15	18
42	22	34	44	20	19	30	20
43	23	47	30	17	27	25	17
44	28	38	34	23	19	32	18
45	33	33	34	21	31	16	21
46	19	21	60	13	18	40	19
47	43	37	20	21	23	27	20
48	35	27	38	16	27	17	29
49	24	41	35	22	29	19	23
50	29	43	28	14	31	27	25

Продолжение

№ варианта	A_1	A_2	A_3	B_1	B_2	B_3	B_4
51	35	40	32	25	14	25	24
52	32	42	28	12	30	32	16
53	24	45	30	26	32	25	28
54	34	30	35	18	26	25	27
55	40	40	20	24	19	34	18
56	27	35	42	21	36	16	24
57	22	43	35	15	16	40	18
58	34	37	32	14	26	16	29
59	29	38	32	22	29	18	26
60	27	38	36	14	32	28	25
61	22	38	40	21	22	26	20
62	24	35	40	25	31	33	17
63	26	38	34	20	18	32	30
64	35	33	34	17	28	35	17
65	19	21	60	25	16	32	16
66	42	37	20	25	35	20	13
67	35	27	28	13	28	40	18
68	24	40	35	20	24	27	20
69	31	35	32	22	23	27	22
70	22	48	35	18	27	15	28
71	42	27	30	20	29	19	26
72	27	36	40	14	36	27	25
73	42	28	31	26	22	26	20
74	44	37	20	14	34	27	25
75	35	25	38	16	25	17	35
76	23	48	30	16	28	17	29
77	42	25	31	25	35	15	18
78	23	45	35	25	25	28	20
79	30	45	26	20	19	35	20
80	23	45	30	15	28	26	16
81	33	30	33	23	19	39	19
82	45	40	20	21	35	16	20
83	26	24	50	13	18	40	19
84	27	32	40	22	23	28	20
85	40	36	25	15	25	15	25
86	32	35	36	22	24	19	24
87	35	37	32	15	34	24	25
88	29	35	32	21	25	28	25
89	28	37	36	15	35	33	16
90	25	50	25	25	38	19	14
91	21	39	41	28	34	16	19
92	22	44	45	20	29	33	25
93	23	48	32	18	28	24	18
94	28	35	34	20	18	34	18
95	33	30	34	20	30	16	20
96	19	20	60	12	18	42	18
97	43	37	20	22	22	28	20
98	35	22	38	16	27	17	29
99	22	42	36	22	29	19	23
100	28	43	28	12	32	28	26

РЕКОМЕНДОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

Основная

1. Акоф Р. Л., Сасиени М. В. Основы исследования операций / Пер. с англ. – М.: Мир, 1971.-536 с.
2. Акулич И.Л. Математическое программирование в примерах и задачах. – М.: Высшая школа, 1986. – 317 с.
3. Акулич И.Л. Математическое программирование в примерах и задачах: Учеб. пособие - 2-е изд., испр. и доп. – М.: Высш. шк. ,1993. - 336 с.
4. Барсук В.А., Губин Н.М., Батый А.Р. Экономико-математические методы и модели в планировании и управлении в отрасли связи. – М.: Радио и связь, 1964.
5. Вагнер Г. Основы исследования операций. – М.: Мир.- Т.1, 1972, 335 с. - Т.2, 1973, 488 с. - Т.3, 1973. - 501 с.
6. Вентцель Е.С. Исследование операций. – М.: Высшая школа, 2001. – 208 с.
7. Вентцель Е.С. Исследование операций. – М.: Советское радио, 1980. – 272 с.
8. Вітлінський В.В., Наконечний С.І. Математичне програмування. Навчально-методичний посібник для самостійного вивчення дисципліни. – К.: КНЕУ, 2001. – 248 с.
9. Гетьманцев В.Д. Лінійна алгебра і математичне програмування. - К.: Либідь, 2001. - 254 с.
10. Гранберг А.Г. Математические модели социалистической экономики. Учебное пособие для экон. вузов и фак. – М.: Экономика, 1978. - 351 с.
11. Дж. Данциг. Линейное программирование, его применение и обобщения.– М.:Прогресс,1966. – 450 с.
12. Зайченко Ю.П. Дослідження операцій. – К.: Слово, 2003. - 685 с.
13. Зайченко Ю.П. Исследование операций. – К.: Высшая школа. 1988. – 550 с.
14. Калихман И.Л. Сборник задач по линейной алгебре и программированию. – М.: Высшая школа, 1969. - 160 с.
15. Канторович Л.В. Математические методы организации и планирования производства. Л.: Изд-во ЛГУ, 1939. – 68 с.
16. Карасёв А.И., Кремер Н.Ш., Савельева Т.И. Математические методы и модели в планировании. – М.: Экономика, 1987. - 240 с.
17. Конюховский П.В. Математические методы исследования операций в экономике. Серия "Краткий курс". – СПб.: Питер, 2000. - 208 с.
18. Кремер Н.Ш., Путко Б.А., Тришин И.М. и др. Исследование операций в экономике. Под ред. Кремера Н.Ш. – М.: Банки и биржи,1999. – 407 с.
19. Лотов А.В. Введение в экономико-математическое моделирование. – М.: Наука, 1984. – 392 с.

20. Математичне програмування. Методичні вказівки. // Укл.: Бурий В.В., Олешко Т.І. – К.: НАУ. 2002.
21. Мину М. Математическое программирование. Теория и алгоритмы. – М.: Наука, 1990. – 488 с.
22. Морозов В.В. и др. Исследование операций в задачах и упражнениях. - М.: Высшая школа, 1986. - 285 с.
23. Наконечний С.І., Савіна С.С. Математичне програмування. Навчальний посібник.– К.: КНЕУ, 2003. – 452 с.
24. Романюк Т.П., Терещенко Т.А., Присенко Г.В., Городкова І.М. Математичне програмування. Навчальний посібник. – К.: ІЗМН, 1996. – 312 с.
25. Цегелик Г.Г. Лінійне програмування. – Львів: Світ, 1995. – 216 с.

Дополнительная

1. Васильев Ф.П. Численные методы решения экстремальных задач. Изд. 2-е, перераб. и доп. – М.: Наука, 1988. – 549 с.
2. Давыдов Э.Т. Исследование операций.- М.: Высш.шк., 1990. – 383 с.
3. Деордица Ю.С., Нефедов Ю.М. Исследование операций в планировании и управлении - К.: Вища школа 1991. – 270с.
4. Захарченко Н.В., Князева Н.А. Оптимизация и моделирование систем связи: Учеб. пособие. / ОЭИС, – Одесса, 1990. Ч. 2. – 76 с.
5. Интрилигатор М. Математические методы оптимизации и экономическая теория.– М.: Прогресс, 1975. – 604 с.
6. Исследование операций: В 2-х томах. Под. ред. Дж. Моудера, С. Элмаграби. – М.:Мир,1981.Т.1. – 712 с.
7. Исследование операций: В 2-х томах. Под. ред. Дж. Моудера, С. Элмаграби. – М.: Мир,1981.Т.2. – 677 с.
8. Калихман И.Л. Сборник задач по математическому программированию. – М.: Высш.школа, 1975. – 272 с.
9. Карлин С. Математические методы в теории игр, программировании и экономике. – М., 1964. – 839 с.
10. Ляшенко И.Н., Карагодова Е.А., Чернишова Н.В., Шор Н.Э. Линейное и нелинейное программирование. – К.: Вища школа, 1975. – 372с.
11. Морозов В.В., Сухарев А.Г., Федоров В.В. Исследование операций в задачах и упражнениях: Учебное пособие для студентов вузов, обуч. по спец. «Прикладная математика».– М.:Высш.шк.,1986. – 287с.
12. Сакович В.А. Исследование операций (детерминированные методы и. модели): Справочное пособие. – Минск: Выш. шк., 1985. – 256 с.
13. Таха Х. Введение в исследование операций: В 2-х книгах. Кн. 1. – М.: Мир, 1985.- 496 с.
14. Таха Х. Введение в исследование операций: В 2-х книгах. Кн. 2. – М.: Мир, 1985.- 479 с.
15. Уоткин Т.Дж., Параммоу К. Количественные методы в финансах – М.: Финансы, ЮНИТИ, 1999. – 527с.

16. Фомин Г.П. Математические методы и модели в коммерческой деятельности" – М.: Финансы и статистика, 2001. – 544 с.

СОДЕРЖАНИЕ