

Державна служба спеціального зв'язку та захисту інформації України
Адміністрація державної служби спеціального зв'язку
та захисту інформації України

Одеська національна академія зв'язку ім. О. С. Попова

Кафедра теорії електричних кіл

ТЕОРІЯ ЕЛЕКТРИЧНИХ КІЛ І СИГНАЛІВ

Модуль 4

Перетворення сигналів

Частина 1 і 2

Навчальний посібник
для бакалаврів

Телекомунікація
Телекомунікаційні системи й мережі
Інформаційні мережі зв'язку

Одеса 2012

Калашніков А.Ю., Перетворення сигналів: навч. Посіб. Для бакалаврів./
Калашніков А.Ю., Шкуліпа А.В., Горелік С.М. – Одеса: ОНАЗ ім. О.С. Попова,
2012. – Ч. 1 і 2. – 100 с.

Навчальний посібник містить дві частини. У першій частині наведений короткий зміст теоретичного матеріалу, в якому розглянуті перетворення аналогових і дискретних сигналів. Друга частина містить методичні вказівки до лабораторних робіт. У додатках представлені тест-питання для виявлення ступеня готовності до виконання лабораторних робіт і приклади розв'язання типових задач за розглядуваними темами.

Висловлюємо свою подяку викладачеві Аркуші Тетяні Миколаївні за участь в оформленнях навчальних посібників з курсу «Теорія електричних кіл і сигналів».

ЗАТВЕРДЖЕНО
методичною радою
академії зв'язку

Протокол № 16
від 23.03.2012

СХВАЛЕНО
на засіданні кафедри
теорії електричних кіл
і рекомендовано до друку
Протокол №1
від 20.01.2012

ЗМІСТ

ЧАСТИНА 1 Перетворення сигналів.....	4
Зміст модуля 4.....	4
1 Перетворення аналогових сигналів.....	5
1.1 Перетворення сигналів нелінійними колами.....	5
1.1.1 Перетворення гармонічних коливань.....	5
1.1.2 Перетворення бігармонічних коливань.....	10
1.2 Аналогово-модульовані сигнали, їх опис.....	11
1.2.1 Властивості амплітудно-модульованих сигналів.....	12
1.2.2 Сигнали кутової модуляції.....	17
1.3 Кореляційні функції регулярних сигналів. Кореляційний аналіз.....	22
1.4 Перетворення спектрів аналоговими фільтрами.....	24
1.4.1 Основи теорії аналогових фільтрів.....	24
1.4.2 Введення у синтез аналогових фільтрів.....	27
1.4.3 Основи синтезу аналогових фільтрів.....	29
1.4.4 Розрахунок фільтрів за робочими параметрами.....	32
1.5 Коректування лінійно спотворених сигналів.....	40
1.5.1 Амплітудні коректори.....	40
1.5.2 Фазові коректори.....	42
2 Перетворення дискретних сигналів.....	44
2.1 Теорема відліків і її застосування.....	44
2.2 Типові дискретні сигнали в часовій області.....	47
2.3 Дискретні кола, їхній опис у часовій області.....	50
2.4 Часові функції дискретних кіл. Дискретна згортка.....	52
2.5 Дискретні сигнали в операторній області, z-перетворення.....	53
2.6 Операторні передавальні функції дискретних кіл.....	55
2.7 Дискретні сигнали й функції в частотній області.....	58
Список рекомендованої літератури.....	63
ЧАСТИНА 2 Методичні вказівки до виконання лабораторних робіт.....	64
Лабораторна робота № 4.1 Дослідження відгуку нелінійного кола при гармонічних впливах.....	64
Лабораторна робота № 4.2 Дослідження відгуку нелінійного кола при бігармонічних впливах.....	66
Лабораторна робота № 4.3 Дослідження модульованих коливань (АМ, ЧМ, ФМ).....	68
Лабораторна робота № 4.4 Дослідження аналогових фільтрів.....	70
Лабораторна робота № 4.5 Коректування частотних спотворень тракту передачі.....	74
Лабораторна робота № 4.6 Дослідження частотних характеристик дискретних кіл.....	75
ДОДАТОК А Тест-питання до лабораторних робіт.....	77
ДОДАТОК Б Приклади розв'язування задач модуля 4.....	82

ЧАСТИНА 1

Перетворення сигналів

Зміст модуля 4

Вид навч. навант.	Лк	Пр	Лб	Сам. роб.	Курс. робота	Кредити	Σ годин	Контроль
Годин	28	20	12	26	2 ч/р	2,5	60 + 26 = 86	Захист КР іспит

1. Перетворення аналогових сигналів:

- перетворення сигналів нелінійними колами: гармонічні впливи, бігармонічний вплив;
- властивості й опис модульованих сигналів;
- перетворення сигналів аналоговими фільтрами; аналіз і синтез аналогових фільтрів;
- коректування лінійно спотворених сигналів.

2. Перетворення дискретних сигналів:

- теорема відліків (Котельникова);
- типові дискретні сигнали;
- дискретні кола, опис дискретних кіл у часовій області;
- функції дискретних кіл, дискретна згортка;
- z-перетворення дискретних сигналів;
- передавальна функція дискретного кола;
- дискретні перетворення Фур'є, частотні властивості дискретних кіл;
- синтез дискретних фільтрів.

Лабораторні роботи

- 4.1 Дослідження відгуку нелінійного кола при гармонічних впливах.
- 4.2 Дослідження відгуку нелінійного кола при бігармонічних впливах.
- 4.3 Дослідження модульованих коливань (АМ, ЧМ, ФМ).
- 4.4 Дослідження аналогових фільтрів.
- 4.5 Коректування частотних спотворень тракту передачі.
- 4.6 Дослідження частотних характеристик дискретних кіл.

Курсова робота

Тема: Перетворення аналогових і дискретних сигналів:

- формування амплітудно-модульованого сигналу;
- перетворення сигналу аналоговим фільтром, розрахунок АФ;
- синтез дискретних фільтрів Баттерворта і Чебишева.

1 Перетворення аналогових сигналів

Нагадаємо, що до аналогових сигналів відносять такі коливання, які можна описати безперервними функціями часу. У попередніх розділах курсу ТЕКС була дана класифікація простих регулярних сигналів (модуль 1), у літературі [1, 2] їх ще називають детермінованими сигналами, тобто сигналами, які заздалегідь визначені. Під перетвореннями сигналів ми будемо розуміти зміни параметрів, таких як тривалість, спектр, амплітуда, фаза.

1.1 Перетворення сигналів нелінійними колами

Властивості аналогових кіл були розглянуті в попередніх розділах курсу ТЕКС (модулі 1, 2, 3). До аналогових кіл відносять кола, що містять зосереджені елементи R , L , C і M (взаємна індуктивність). До цих же кіл відносять кола з розподіленими параметрами, тобто будь-які фізичні лінії.

1.1.1 Перетворення гармонічних коливань

Розглянемо резистивне коло (рис. 1.1, а) і його властивості перетворювати гармонічні коливання (рис. 1.1, б).

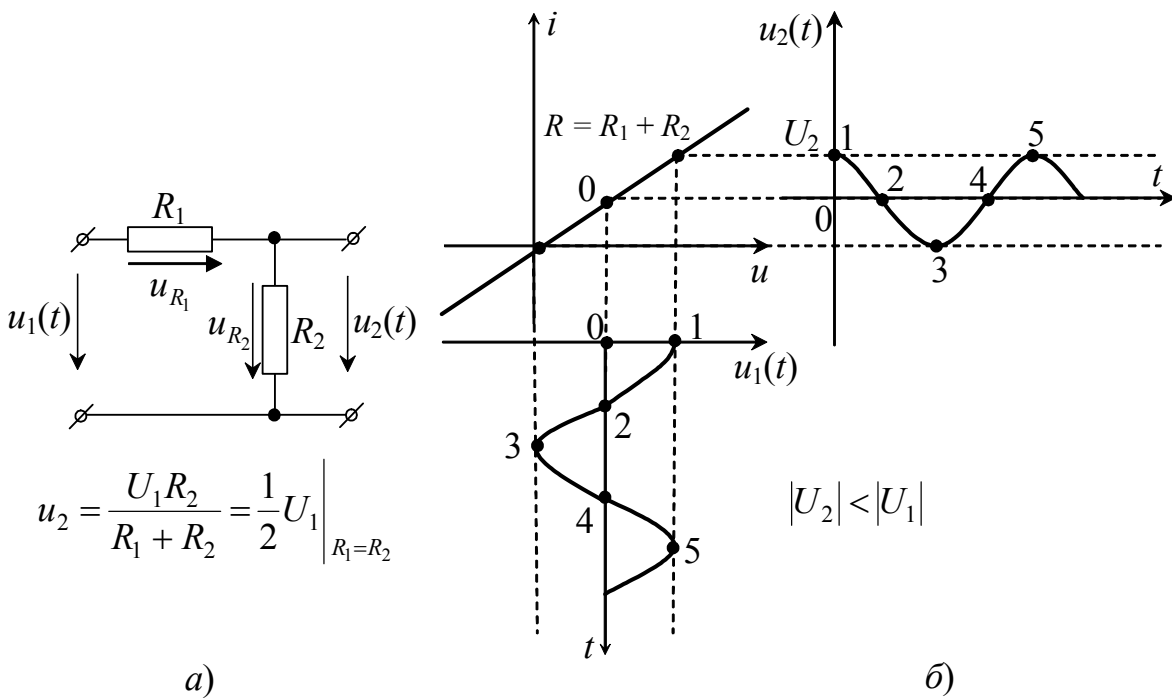


Рисунок 1.1 – Перетворення гармонічного коливання лінійними елементами:

а – резистивне коло; б – діаграми впливу $u_1(t)$ й відгуку $u_2(t)$

Якщо на вхід кола подається гармонічне коливання $u_1(t) = U_{1m} \cos(\omega_1 t + \varphi_1)$, то на виході цього ж кола буде $u_2(t) = U_{2m} \cos(\omega_1 t + \varphi_1)$. На рис. 1.1, б зображена вольт-амперна характеристика резистивного кола R ($R = R_1 + R_2$), на яке подається гармонічне коливання $u_1(t)$. Спектри вхідного $U_1(\omega_1)$ і вихідного $U_2(\omega_1)$ коливань зображені на рис. 1.2. Варто врахувати, що амплітуда вихідного коливання $U_2 = \frac{U_1 R_2}{R_1 + R_2}$, тому вона менша, ніж $U_1(\omega_1)$ (ділянка напруги).

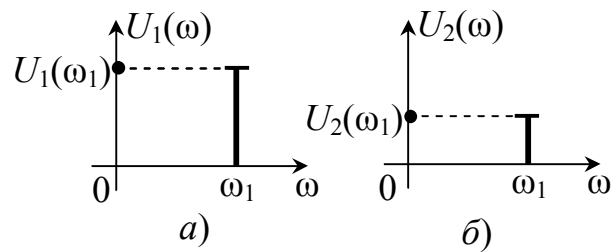


Рисунок 1.2 – Спектри коливань:
а – вхідного $U_1(\omega)$; б – вихідного $U_2(\omega)$

Аналогічна картина буде мати місце, якщо на вході резистивного кола буде діяти будь-який періодичний сигнал. Оскільки періодичний сигнал можна представити у вигляді суми гармонічних коливань (ряд Фур'є), то на виході кола також буде періодичний сигнал з таким самим спектром (діє властивість лінійності). Рекомендуємо самостійно зобразити спектри вхідного й вихідного коливань при впливі періодичного коливання.

Розглянемо нелінійне коло рис. 1.3, а. Властивості нелінійних кіл при постійних впливах розглядалися на початку курсу (модуль 1). Нелінійний елемент розглянемо в так званому квазілінійному режимі (начебто лінійному). Це значить, що на вольт-амперній характеристиці нелінійного елемента вибирається невелика ділянка “майже лінійна”. Вхідний сигнал $u_1(t)$ (періодичний) не повинен перевищувати по амплітуді величину цієї лінійної ділянки. Тоді відгук $u_2(t)$ буде мати той самий спектр, що й спектр впливу $u_1(t)$. На рис. 1.3, б зображені часові залежності впливу $u_1(t)$ і відгуку $u_2(t)$.

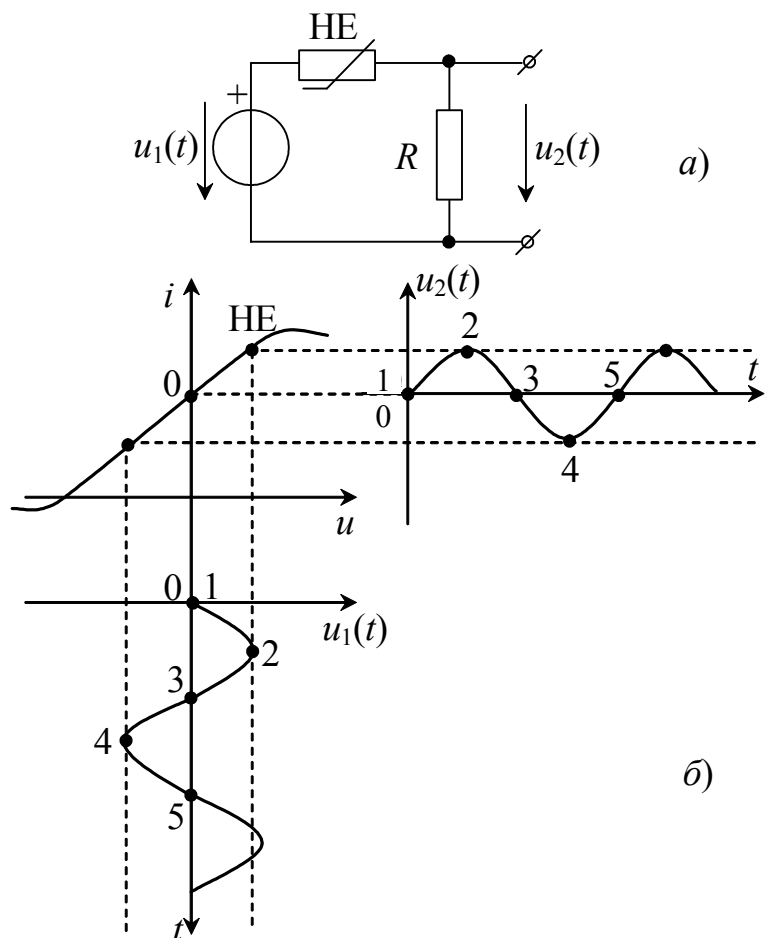


Рисунок 1.3 – Перетворення гармонічного коливання нелінійним колом:
а – нелінійне коло;
б – діаграми впливу $u_1(t)$ й відгуку $u_2(t)$

При розрахунку нелінійних кіл часто користуються параметром неліній-

ного елемента, що є величиною зворотною до динамічного опору НЕ: $S = \frac{di}{du}$ – крутизна вольт-амперної характеристики. Від цього параметра залежить посилення сигналу, що вносить нелінійний елемент.

На рис. 1.4 зображені часові діаграми відгуку $u_2(t)$ за різних значень крутизни ВАХ. Варто помітити, що цей факт не суперечить закону Ома. Розглянутий режим роботи нелінійного кола зветься: **режим малих амплітуд**. Це значить, що перетворений сигнал не виходить за межі лінійної ділянки

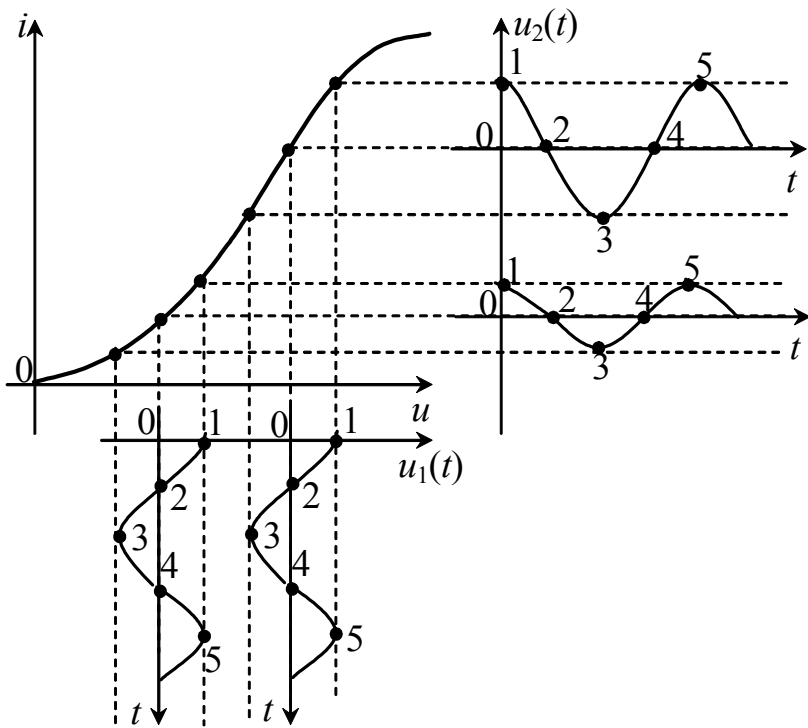


Рисунок 1.4 – Підсилювальні властивості нелінійного елемента

вольт-амперної характеристики НЕ.

Розглянемо властивості нелінійного кола, коли вхідний сигнал $u_1(t)$ перевищує по амплітуді границі лінійної ділянки ВАХ. Такий режим роботи нелінійного кола називається **режимом великих амплітуд**. На рис. 1.5 зображений процес перетворення гармонічного коливання $u_1(t) = U_{1m} \cos \omega_1 t$, що подається на вхід кола рис. 1.3, а. Нехай ВАХ НЕ апроксимована поліномом n -го ступеня

$$i = a_0 + a_1 u_1 + a_2 u_1^2 + \dots + a_n u_1^n, \quad (1.1)$$

тоді відгук визначається як

$$u_2(t) = i R.$$

Можемо записати в (1.1) значення $u_1(t)$, тоді

$$u_2(t) = R \left[a_0 + a_1 (U_{1m} \cos \omega_1 t) + a_2 (U_{1m} \cos \omega_1 t)^2 + \dots + a_n (U_{1m} \cos \omega_1 t)^n \right].$$

Для більшої наочності покладемо $R = 1$ Ом, і коефіцієнти полінома (1.1), що дорівнюють одиниці відповідно. Проробивши нескладні математичні перетворення, і скориставшись тригонометричними формулами:

$$\cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2x;$$

$$\cos^3 x = \frac{3}{4} \cos x + \frac{1}{4} \cos 3x;$$

$$\cos^4 x = \frac{3}{8} + \frac{4}{8} \cos 2x + \frac{1}{8} \cos 4x;$$

$$\cos^5 x = \frac{10}{16} \cos x + \frac{5}{16} \cos 3x + \frac{1}{16} \cos 5x$$

і т.д., одержимо в результаті:

$$u_2(t) = U_{20} + U_{2m1} \cos \omega_1 t + U_{2m2} \cos 2\omega_1 t + \dots + U_{2mn} \cos n\omega_1 t,$$

що відповідає фрагменту ряду Фур'є

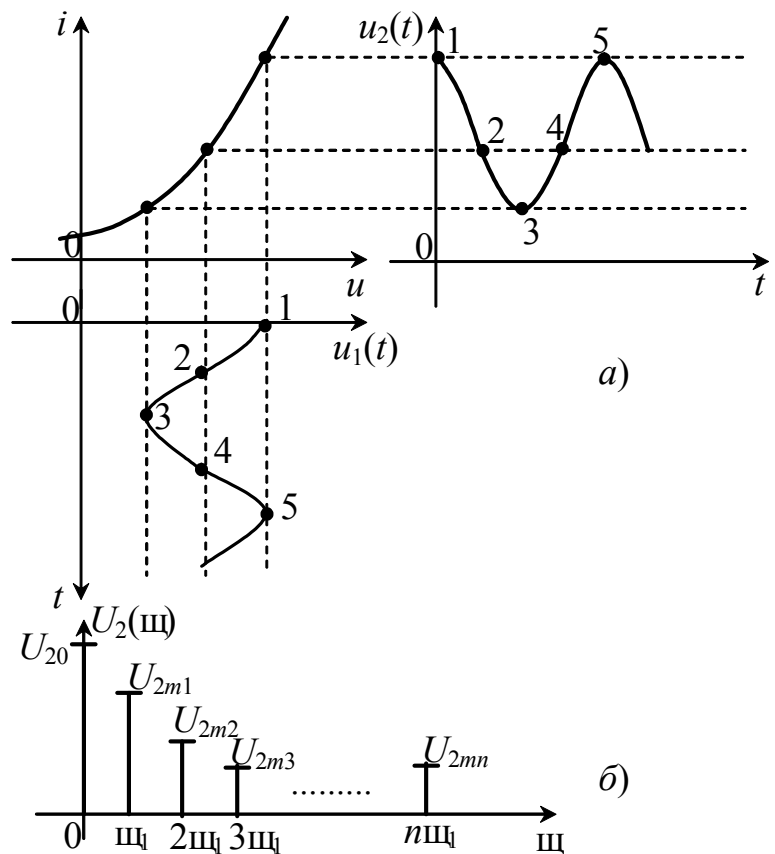


Рисунок 1.5 – Режим великих амплітуд:
а – часові діаграми; б – спектр відгуку

$$u_2(t) = U_{20} + \sum_{k=1}^n U_{2mk} \cos(k\omega_1 t + \varphi_k). \quad (1.2)$$

У такий спосіб відгук нелінійного кола в режимі великих амплітуд являє собою періодичний сигнал. Якщо цей сигнал подати на вхід аналізатора спектра, то на екрані одержимо спектрограму цього сигналу, аналогічну наведеній на рис. 1.5, б.

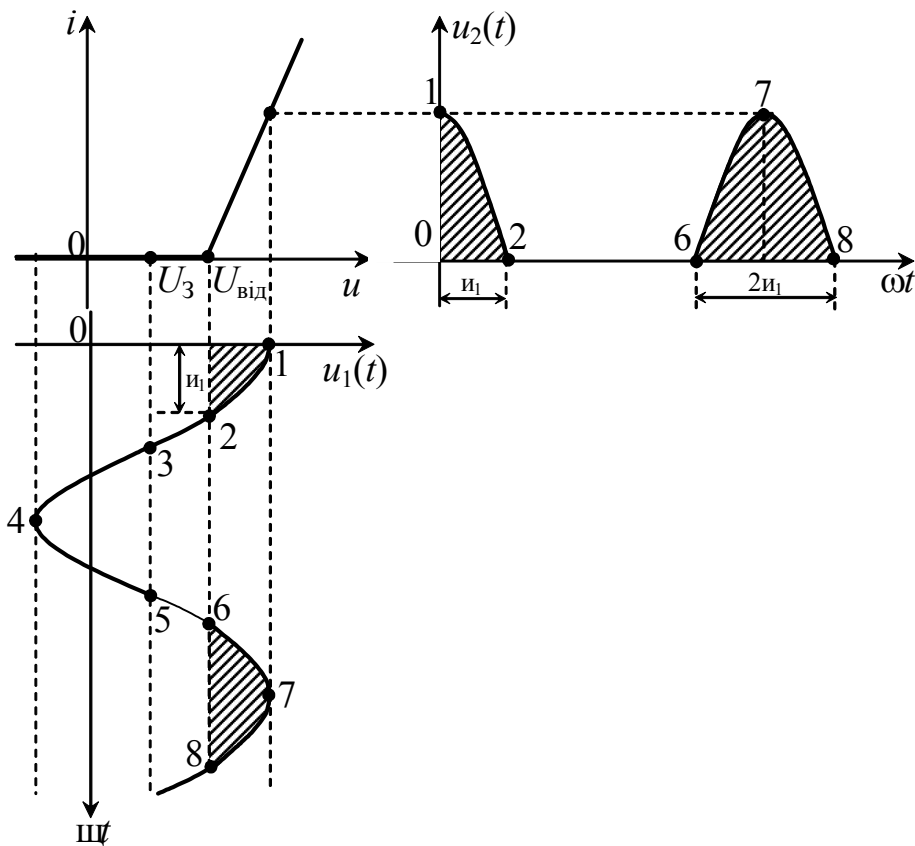
Існує спрощений метод аналізу нелінійного кола [1], коли розглядають апроксимацію ВАХ НЕ у вигляді відрізків прямих ліній (кусочно-лінійна апроксимація):

$$i(u) = \begin{cases} 0, & U \leq U_{\text{від}}; \\ S(U - U_{\text{від}}), & U > U_{\text{від}}, \end{cases}$$

де S – крутизна ВАХ НЕ,

$U_{\text{від}}$ – напруга відсікання.

На рис. 1.6 зображені ВАХ НЕ за кусочно-лінійної апроксимації, а також часові діаграми впливу й відгуку. На рисунку U_3 – початок відліку амплітудного значення гармонічного впливу (напруга зсуву); θ_1 – кут відсікання (половина інтервалу, протягом якого має місце сигнал відгуку). Величину цього кута можна розрахувати в такий спосіб. Вплив $u_1(t)$ описується виразом



$$u_1(t) = U_3 + U_{1m} \cos \omega_1 t.$$

При $\omega_1 t = \theta_1$ (точка 2 на графіку $u_1(t)$ рис. 1.6) можна записати:

$$U_3 + U_{1m} \cos \theta_1 = U_{\text{від}},$$

звідки

$$\cos \theta_1 = \frac{U_{\text{від}} - U_3}{U_{1m}},$$

а

$$\theta_1 = \arccos \frac{U_{\text{від}} - U_3}{U_{1m}}.$$

Рисунок 1.6 – Визначення відгуку нелінійного кола за кусочно-лінійної апроксимації ВАХ НЕ

Періодичну послідовність імпульсів відгуку $u_2(t)$ також

можна розкласти в ряд Фур'є, при цьому коефіцієнти ряду набувають вигляду:

$$U_{mk} = RI_{mk} = RSU_{1m} \gamma_k(\theta),$$

де коефіцієнти $\gamma_k(\theta)$ називають функціями Берга [1];

$$\gamma_0(\theta) = \frac{1}{\pi} (\sin \theta - \theta \cos \theta);$$

$$\gamma_1(\theta) = \frac{1}{\pi} (\theta - \theta \sin \theta \cos \theta);$$

$$\gamma_k(\theta) = \frac{2 \sin k\theta \cos \theta - k \cos k\theta \sin \theta}{\pi k(k^2 - 1)},$$

де $k = 2, 3, \dots$

Ці функції залежать від кута відсікання й можуть бути розраховані за таблицями або графіками функцій Берга, які приводяться в літературі [1, 2, 3].

На рис. 1.7 наведений фрагмент графіка функцій Берга.

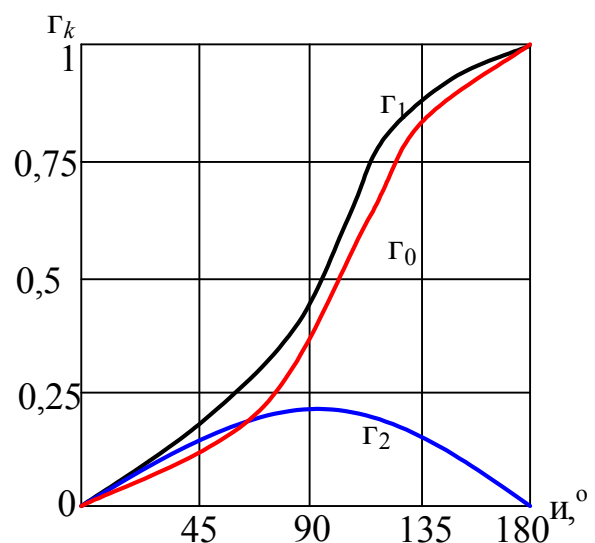


Рисунок 1.7 – Фрагмент графіка функцій Берга

1.1.2 Перетворення бігармонічних коливань

Розглянемо відгук нелінійного кола на бігармонічний сигнал. Вплив $u_1(t)$ при цьому містить два гармонічних коливання з різними частотами ω_1 і Ω_1 ($\omega_1 > \Omega_1$):

$$\begin{aligned} u_1(t) &= u_{11}(t) + u_{12}(t) = \\ &= U_{m1} \cos \omega_1 t + U_{m2} \cos \Omega_1 t. \end{aligned} \quad (1.3)$$

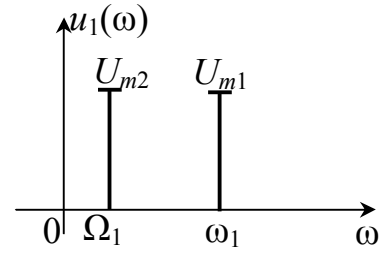


Рисунок 1.8 – Спектр бігармонічного сигналу

Спектр цього сигналу представлений на рис. 1.8. Бігармонічний сигнал подається на вхід нелінійного кола рис. 1.9, а. Розглянемо відгук нелінійного кола, якщо ВАХ НЕ апроксимована поліномом другого ступеня $i = au^2$. У цьому випадку струм нелінійного кола визначиться як:

$$\begin{aligned} i &= au^2 = a[(u_{11} + u_{12})^2] = a[u_{11}^2 + u_{12}^2 + 2u_{11}u_{12}] = \\ &= a[(U_{m1} \cos \omega_1 t)^2 + (U_{m2} \cos \Omega_1 t)^2 + \\ &\quad + 2(U_{m1} \cos \omega_1 t \cdot U_{m2} \cos \Omega_1 t)]. \end{aligned}$$

Скориставшись тригонометричними формулами й виконавши математичні перетворення, одержимо:

$$\begin{aligned} i &= a \left[\frac{1}{2} (U_{m1}^2 + U_{m2}^2) + \frac{U_{m1}^2}{2} \cos 2\omega_1 t + \frac{U_{m2}^2}{2} \cos 2\Omega_1 t + \right. \\ &\quad \left. + U_{m1}U_{m2} \cos (\omega_1 - \Omega_1)t + U_{m1}U_{m2} \cos (\omega_1 + \Omega_1)t \right], \end{aligned}$$

а

$$\begin{aligned} u_2(t) &= iR = U_{20} + U_{m2\Omega} \cos 2\Omega_1 t + \\ &\quad + U_{m4} \cos (\omega_1 - \Omega_1)t + \\ &\quad + U_{m6} \cos (\omega_1 + \Omega_1)t + \\ &\quad + U_{m2\omega} \cos 2\omega_1 t. \end{aligned} \quad (1.4)$$

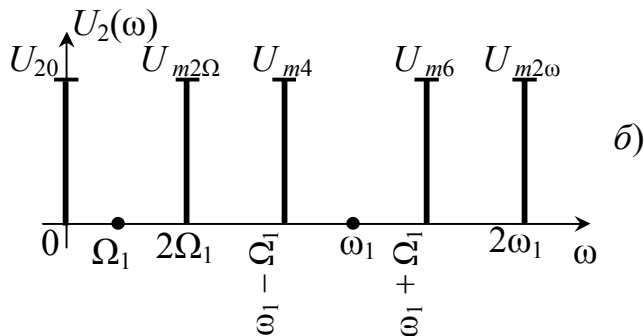
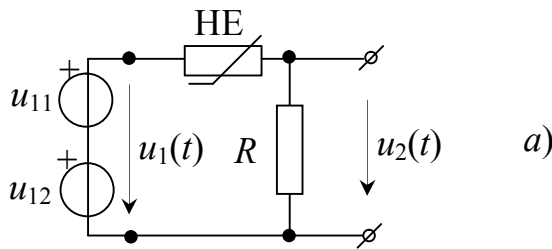


Рисунок 1.9 – Нелінійне коло при бігармонічному впливі:

а – схема кола; б – спектр відгуку

Спектр відгуку (1.4) можна представити так, як показано на рис. 1.9, б. При розгляді спектрів впливу рис. 1.8 і відгуку рис. 1.9, б видно, що в спектрі відгуку відсутні спектральні складові впливу. Можна стверджувати, що спектр впливу трансформувався в інший спектр з іншими спектральними складовими.

Якщо покласти, що $\omega_1 \gg \Omega_1$, і

що сигнал має деяку смугу частот $\Delta\Omega$, то **комбінаційні частоти** відгуку будуть містити комбінації $(\omega_1 + \Delta\Omega)$ і $(\omega_1 - \Delta\Omega)$ і тоді спектр відгуку буде мати вигляд рис. 1.10.

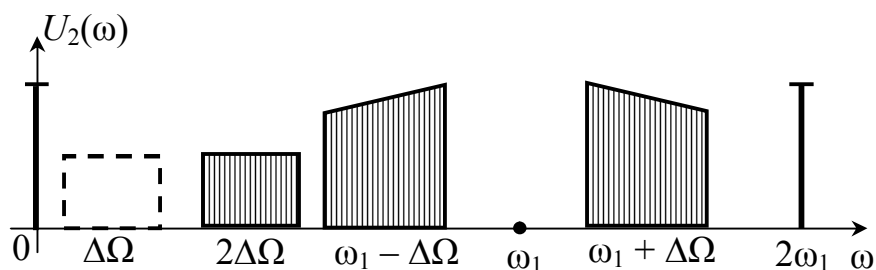


Рисунок 1.10 – Спектр відгуку нелінійного кола при впливі смугою частот $\Delta\Omega$

Ця властивість нелінійних елементів лягла в основу створення багатоканальної системи передачі сигналів із частотним розподілом каналів. Більш докладно про це буде викладено в наступному параграфі й у наступних курсах.

Якщо за апроксимуючу функцію нелінійного елемента взяти поліном ступеня n , наприклад (1.1), то спектр відгуку буде ще більш насичений. Рекомендуємо самостійно розглянути це твердження як домашнє завдання.

У висновку підведемо деякі підсумки розглянутого параграфа. Нелінійні кола являють собою з'єднання лінійних і нелінійних елементів. Нелінійні кола відрізняються від лінійних низкою нових властивостей, у результаті яких відбувається перетворення спектра вхідного сигналу.

При передачі телекомунікаційних сигналів ці властивості широко використовуються на практиці. На цих властивостях засновані процеси модуляції, демодуляції, розподіл і множення частоти сигналів, обмеження амплітуд і т.ін. Лінійні кола не змінюють спектр впливу, нелінійні кола в режимі малих амплітуд майже не змінюють спектр впливу. Відгук нелінійного кола в режимі великих амплітуд являє собою періодичне коливання, тому його спектр містить суму гармонічних складових (ряд Фур'є). За кусочно-лінійної апроксимації ВАХ нелінійного елемента значно спрощується аналіз процесів нелінійних кіл, хоча точність такого аналізу поступається іншим методам.

При впливі на нелінійне коло бігармонічним сигналом у відгуку з'являються складові з комбінаційними частотами.

1.2 Аналогово-модульовані сигнали, їх опис

Під модуляцією розуміють процес зміни в часі одного або декількох параметрів сигналу переносника відповідно до переданого сигналу з метою передавання інформації по каналах зв'язку. На рис. 1.11 представлена функціональна схема модулятора, де $b(t)$ – вхідний сигнал (модулюючий сигнал); $s(t)$ – вихідний сигнал (модульований сигнал); $s_0(t)$ – сигнал

переносник. У такий спосіб можна сказати, що **модуляція** – процес керування коливаннями: керування параметрами одного сигналу (коливання переносника) іншим сигналом.

В якості сигналу переносника застосовують гармонічне коливання:

$$s_0(t) = S_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0) = S_0 \cos \theta(t), \quad (1.5)$$

де S_0 – амплітуда коливання;

$\omega_0 = 2\pi f_0$ – кутова частота;

φ_0 – початкова фаза;

$\theta(t)$ – повна фаза.

Розрізняють два основних види модуляції: амплітудну (АМ) і кутову (КМ). Якщо в процесі модуляції змінюється амплітуда сигналу переносника (S_0), то сигнал буде **амплітудно-модульований** ($s_{AM}(t)$). При зміні повної фази $\theta(t)$ виходить сигнал з **кутовою модуляцією** ($s_{KM}(t)$).

Сигнали з кутовою модуляцією поділяться на два види: частотно-модульовані (ЧМ) $s_{ЧМ}(t)$ і фазомодульовані (ФМ) $s_{ФМ}(t)$. Ці два види модуляції тісно пов'язані між собою.

На практиці зустрічаються змішані види модуляції: амплітудно-фазова, амплітудно-частотна та ін.

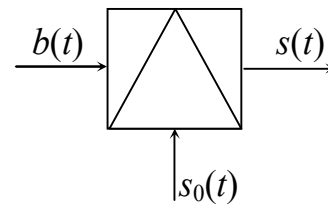


Рисунок 1.11 – Функціональна схема модулятора

1.2.1 Властивості амплітудно-модульованих сигналів

У процесі амплітудної модуляції сигнал переносник одержує збільшення амплітуди ΔS пропорційно функції інформаційного сигналу (частіше НЧ сигналу) $b(t)$. У результаті виходить модульований сигнал $s_{AM}(t)$:

$$\begin{aligned} s_{AM}(t) &= [S_0 + \Delta S b(t)] \cos \omega_0 t = S_0 \left[1 + \frac{\Delta S}{S_0} b(t) \right] \cos \omega_0 t = \\ &= S_0 [1 + m_{AM} b(t)] \cos \omega_0 t, \end{aligned} \quad (1.6)$$

де ΔS – максимальне збільшення амплітуди, постійна величина;

$b(t)$ – сигнал, що модулює ($-1 \leq b(t) \leq 1$);

$0 < m_{AM} \leq 1$ – коефіцієнт модуляції (коефіцієнт глибини модуляції), практично набуває значення в межах 0,4...0,6.

У загальному випадку сигнал, що модулює, $b(t)$ – це сигнал довільної форми. Для більш зрозумілого подання процесу модуляції розглянемо в якості модулюючого сигналу гармонічне коливання:

$$b(t) = \cos \Omega t. \quad (1.7)$$

На рис. 1.12 представлені часові діаграми при одержанні АМ сигналу. Підставимо вираз (1.7) в (1.6), одержимо:

$$s_{AM}(t) = S_0[1 + m_{AM} \cos \Omega t] \cos \omega_0 t. \quad (1.8)$$

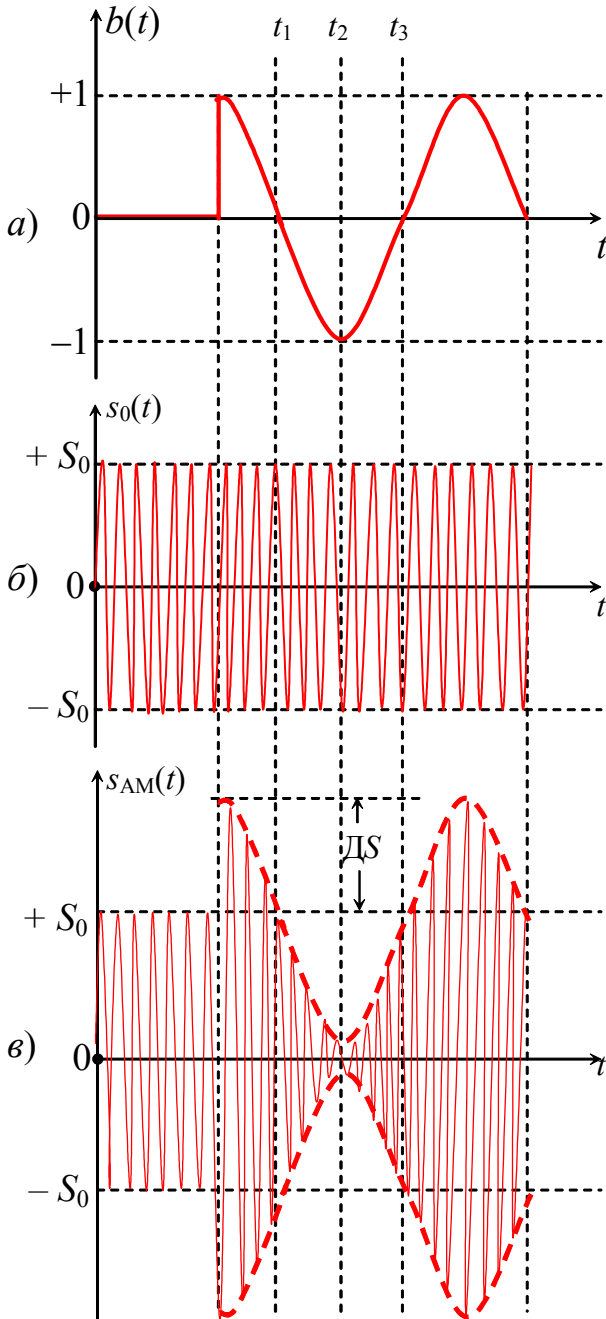


Рисунок 1.12 – Часові діаграми АМ сигналу:

- a* – сигнал впливу (НЧ сигнал);
- б* – сигнал переносника;
- в* – модульований сигнал

Розкривши дужки й виконавши тригонометричні перетворення, одержимо (рекомендуємо студентам самостійно проробити перетворення):

$$s_{AM}(t) = S_0 \cos \omega_0 t + \frac{m_{AM} S_0}{2} \cos(\omega_0 + \Omega)t + \frac{m_{AM} S_0}{2} \cos(\omega_0 - \Omega)t. \quad (1.9)$$

Із виразу (1.9) видно, що функція АМ сигналу складається із трьох частин: коливання з частотою переносника ω_0 і двох коливань із комбінаційними частотами $(\omega_0 + \Omega)$ і $(\omega_0 - \Omega)$, які називаються „верхньою” і „нижньою” боковими частотами відповідно. Амплітуди цих коливань однакові $\frac{m_{AM} S_0}{2}$, фази симетричні щодо фази переносника.

Складові АМ сигналу й сам сигнал можна зобразити у вигляді спектрів. На рис. 1.13 зображені спектри цих коливань до (рис. 1.13, *a*) і після (рис. 1.13, *б*) модуляції. Ці спектри дискретні. Ширина смуги частот, яку займає АМ сигнал становить 2Ω – різниця двох частот, максимальної й мінімальної: $(\omega_0 + \Omega) - (\omega_0 - \Omega)$.

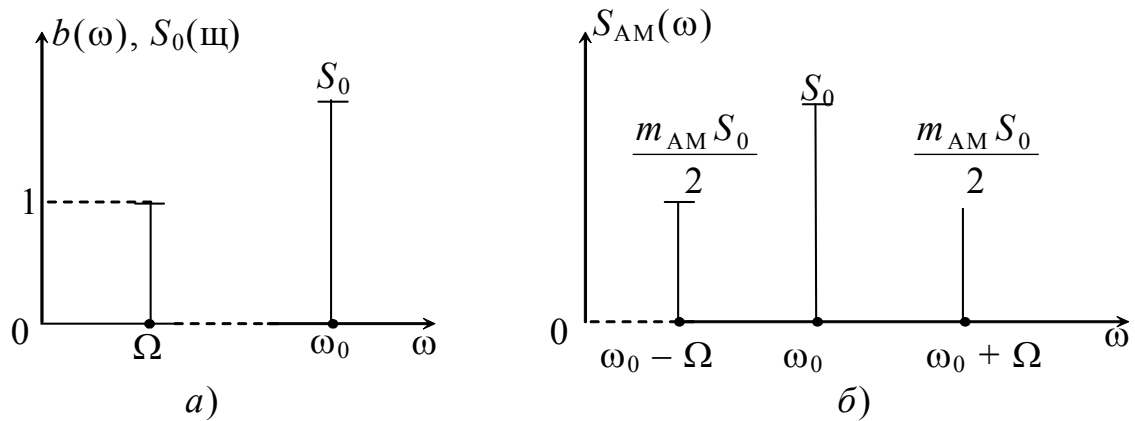
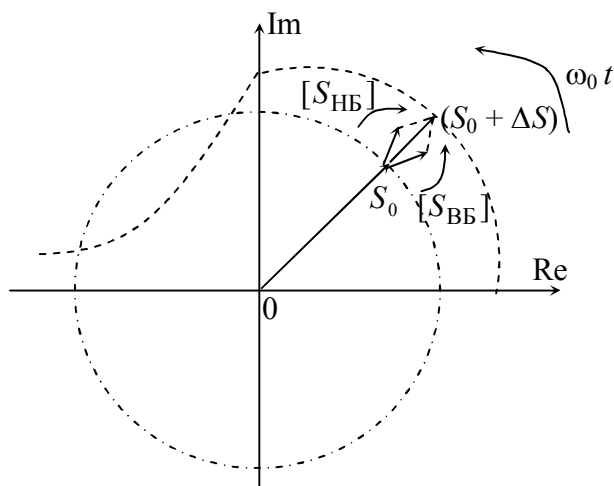


Рисунок 1.13 – Спектри амплітуд до (а) і після (б) модуляції

Представимо складові АМ сигналу у вигляді векторних діаграм. На рис. 1.14 зображені вектори коливань рис. 1.12 для фіксованого моменту часу t_1 . Вектори для випадку t_2 і t_3 рис. 1.12 рекомендуємо побудувати самостійно. У такий спосіб геометричне місце точок кінців вектора $(S_0 \pm \Delta S)$ опише обвідну АМ сигналу рис. 1.12, в. Вектори складових $S_{НБ}$ і $S_{ВБ}$ обертаються відносно вектора переносника в протилежних напрямках.

Амплітуда модульованого сигналу змінюється в межах від мінімальної



$$S_{AM \min} = S_0 - \frac{m_{AM} S_0}{2} - \frac{m_{AM} S_0}{2} = S_0 (1 - m_{AM})$$

до максимальної

$$S_{AM \max} = S_0 + \frac{m_{AM} S_0}{2} + \frac{m_{AM} S_0}{2} = S_0 (1 + m_{AM})$$

Рисунок 1.14 – Векторні діаграми АМ сигналу для фіксованого моменту часу

величин.

Зі зміною амплітуди S_{AM} змінюється й миттєва потужність сигналу:
– потужність режиму мовчання (за відсутності сигналу, що модулює)

$$P_0 = \frac{S_0^2}{2};$$

– потужність у максимальному режимі

$$P_{\max} = \frac{S_{\text{AM max}}^2}{2} = \frac{S_0^2(1 + m_{\text{AM}})^2}{2} = P_0(1 + m_{\text{AM}})^2;$$

– потужність у мінімальному режимі

$$P_{\min} = \frac{S_{\text{AM min}}^2}{2} = \frac{S_0^2(1 - m_{\text{AM}})^2}{2} = P_0(1 - m_{\text{AM}})^2.$$

Максимальна потужність при $m_{\text{AM}} = 1$ становить

$$P_{\max} = 4P_0.$$

Слід зазначити, що для передавання інформації використовують тільки одну бокову смугу частот.

Модифікації амплітудної модуляції. Існує два види модифікації АМ сигналів: сигнали балансної (БМ) і односмугової модуляції (ОМ).

Сигнал балансної модуляції відрізняється від сигналу АМ відсутністю складової на частоті переносника.

У загальному виді

$$s_{\text{БМ}}(t) = b(t) \cdot s_0(t) = S_0 b(t) \cos \omega_0 t.$$

Вираз для функції сигналу БМ може бути отриманий з (1.9), якщо перший доданок буде відсутній.

$$s_{\text{БМ}}(t) = \frac{S_0}{2} \cos(\omega_0 + \Omega)t + \frac{S_0}{2} \cos(\omega_0 - \Omega)t. \quad (1.10)$$

Коефіцієнт модуляції m_{AM} за БМ дорівнює одиниці: $m_{\text{AM}} = 1$.

На рис. 1.15 зображені часові (рис. 1.15, а) і спектральні (рис. 1.15, б) діаграми БМ сигналу:

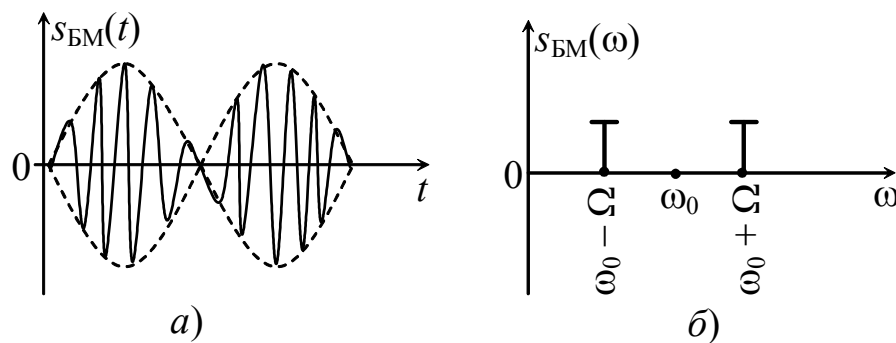


Рисунок 1.15 – Сигнал балансної модуляції:
а – часова діаграма; б – спектр сигналу БМ

Відсутність складової на частоті переносника у спектрі АМ сигналу доцільна тому, що вона не пов'язана з переданою інформацією. При цьому канал менше завантажений.

За односмугової модуляції у спектрі сигналу відсутня складова на частоті переносника, а також одна з бічних частот.

У загальному вигляді функція сигналу ОМ може бути записана у вигляді:

$$s_{\text{ОМ}}(t) = b(t)s_0(t) \pm \tilde{b}(t)\tilde{s}_0. \quad (1.11)$$

Причому знак „+” ставиться до НБС, а знак „-” до ВБС.

Символом « \sim » позначена математична операція, називана *перетворенням Гільберта*:

$$\tilde{b}(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{b(\tau)}{\tau - t} d\tau.$$

Фізичний зміст цієї операції полягає у тому, що у сигналі $b(t)$ відбувається поворот початкових фаз складових спектра на 90° .

Для гармонічних коливань $b(t) = \cos \Omega t$ і $s_0(t) = S_0 \cos \omega_0 t$ це буде

$$\tilde{b}(t) = \sin \Omega t \text{ й } \tilde{s}_0(t) = S_0 \sin \omega_0 t.$$

Вираз (1.11) у випадку ОМ ВБС буде мати вигляд:

$$s_{\text{ОМ}}(t) = S_0 \cos \Omega t \cos \omega_0 t - S_0 \sin \Omega t \sin \omega_0 t.$$

Після кількох тригонометричних перетворень* одержимо:

$$s_{\text{ОМ}}(t) = S_0 \cos(\omega_0 + \Omega)t. \quad (1.12)$$

Розглянемо більш загальний випадок одержання АМ сигналу. Нехай модулюючий сигнал $b(t)$ являє собою ряд

$$b(t) = \sum_{k=1}^N b_{mk} \cos(\Omega_k t + \varphi_k).$$

У нормованому вигляді запишемо його так

$$\hat{b}(t) = \sum_{k=1}^N \hat{b}_{mk} \cos(\Omega_k t + \varphi_k),$$

* $\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)]$; $\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)]$.

де $\hat{b}_{mk} = \frac{b_{mk}}{b_{\max}}$, а b_{\max} – максимальне значення амплітуди періодичного сигналу.

Уведемо узагальнений коефіцієнт модуляції

$$m_k = m_{\text{AM}} \hat{b}_{mk},$$

тоді для багатотонального АМ сигналу можна записати

$$s_{\text{AM}}(t) = S_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0) + \frac{S_0}{2} \sum_{k=1}^N m_k \cos[(\omega_0 \pm \Omega_k)t + \varphi_0 + \varphi_k]. \quad (1.13)$$

Для сигналу балансної модуляції

$$s_{\text{БМ}}(t) = \frac{S_0}{2} \sum_{k=1}^N \hat{b}_{mk} \cos[(\omega_0 \pm \Omega_k)t + \varphi_0 + \varphi_k]. \quad (1.14)$$

де φ_0 – початкова фаза переносника;

φ_k – початкова фаза амплітуд модулюючого коливання $b(t)$.

1.2.2 Сигнали кутової модуляції

До кутових видів модуляції відносяться: частотна (ЧМ) і фазова (ФМ) модуляції.

За **частотній модуляції** частота модульованого сигналу одержує збільшення щодо частоти переносника ω_0 на величину $\Delta\omega_d$, пропорційне модулюючому сигналу $b(t)$:

$$\omega(t) = \omega_0 + \Delta\omega_d b(t), \quad (1.15)$$

де $\Delta\omega_d$ – девіація частоти (максимальне відхилення частоти в процесі модуляції).

Відомо, що миттєві значення повної фази (кута) $\theta(t)$ в (1.5) і частоти коливання $\omega(t)$ пов'язані між собою співвідношенням:

$$\begin{aligned} \omega(t) &= \frac{d\theta(t)}{dt}, \text{ звідки} \\ \theta(t) &= \int_0^t \omega(t) dt + \varphi_0, \end{aligned} \quad (1.16)$$

де φ_0 – початкова фаза коливання при $t = 0$.

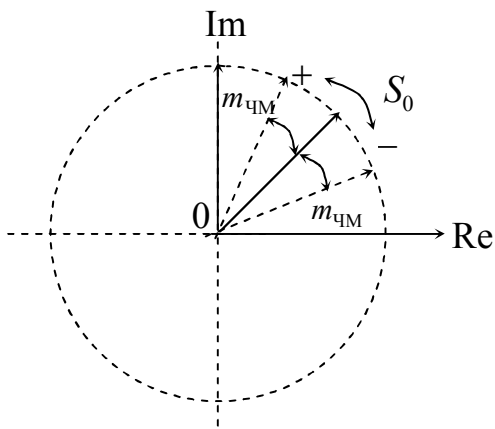


Рисунок 1.16 – Векторна діаграма ЧМ сигналу

Зауважимо, що кутова частота $\omega(t)$ є не що інше, як швидкість зміни фази коливання. Якщо змінювати частоту ω , то змінюється й фаза $\theta(t)$, якщо змінювати фазу, то змінюється частота.

Це положення є визначальним і вказує на спільність, що існує між двома різновидами кутової модуляції – ЧМ і ФМ.

Повна фаза $\theta(t)$ ЧМ коливання записується у вигляді:

$$\begin{aligned} \theta(t) &= \int (\omega_0 + \Delta\omega_d \cdot b(t)) dt = \\ &= \omega_0 t + \Delta\omega_d \int b(t) dt + \varphi_0. \end{aligned} \quad (1.17)$$

З виразу (1.17) видно, що має місце й зміна фази.

Підставимо значення повної фази з (1.17) в (1.5) і запишемо функцію ЧМ сигналу (покладемо $\varphi_0 = 0$)

$$s_{\text{ЧМ}}(t) = S_0 \cos(\omega_0 t + \Delta\omega_d \int b(t) dt). \quad (1.18)$$

Розглянемо окремий випадок, коли $b(t)$ гармонічна функція (1.7). Тоді ЧМ сигнал запишемо у вигляді:

$$\begin{aligned} s_{\text{ЧМ}}(t) &= S_0 \cos(\omega_0 t + \Delta\omega_d \int \cos \Omega t dt) = S_0 \cos\left(\omega_0 t + \frac{\Delta\omega_d}{\Omega} \sin \Omega t\right) = \\ &= S_0 \cos(\omega_0 t + m_{\text{ЧМ}} \sin \Omega t), \end{aligned} \quad (1.19)$$

де $m_{\text{ЧМ}} = \frac{\Delta\omega_d}{\Omega}$ – індекс частотної модуляції ($m > 1$), величина безрозмірна, але фактично є нормованою частотою, тобто показує у скільки разів максимальне відхилення частоти більше частоти Ω сигналу, що модулює, $b(t)$.

Векторне подання ЧМ сигналу показане на рис. 1.16.

При **фазовій модуляції** фаза модульованого коливання одержує збільшення відносно фази переносника пропорційне модулюючому коливанню:

$$\theta(t) = \omega_0 t + \varphi_0 + \Delta\varphi_d b(t), \quad (1.20)$$

де $\Delta\varphi_d$ – девіація фази (максимальне відхилення фази в процесі модуляції).

Підставимо вирази (1.20) в (1.5) і запишемо функцію ФМ коливання:

$$s_{\text{ФМ}}(t) = S_0 \cos(\omega_0 t + \Delta\varphi_d b(t)). \quad (1.21)$$

Для простого прикладу, коли $b(t)$ гармонічне коливання (1.7), одержимо:

$$s_{\text{ФМ}}(t) = S_0 \cos(\omega_0 t + \Delta\varphi_d \cos \Omega t) = S_0 \cos(\omega_0 t + m_{\text{ФМ}} \cos \Omega t), \quad (1.22)$$

де $m_{\text{ФМ}} = \Delta\varphi_d$ – індекс фазової модуляції (максимальне відхилення фази).

Порівнюючи вирази функцій (1.19) і (1.22) двох видів модуляцій ЧМ і ФМ бачимо, що вони майже однакові. Векторне подання ФМ сигналу таке ж саме як і ЧМ, зображеного на рис. 1.16.

На рис. 1.17 зображені часові діаграми ЧМ і ФМ сигналів за гармонічного впливу.

Якщо коливання, що модулює, має складну форму, то структура модульованого коливання при ЧМ і ФМ буде суттєво відрізнятися [3].

Пояснимо це на прикладі. На рис. 1.18 зображені ЧМ і ФМ коливання, коли сигнал, що модулює, $b(t)$ представлений відеоімпульсом (прямокутним імпульсом).

Спектри коливань з кутовою модуляцією. Розглянемо спектр коливань при гармонічній кутовій модуляції. Вираз функції (1.19) $s_{\text{ЧМ}}(t)$ і (1.20) $s_{\text{ФМ}}(t)$ можна подати у вигляді

$$s_{\text{КМ}}(t) = S_0 \cos(\omega_0 t + m \sin \Omega t).$$

Замінивши косинус суми двох кутів за відомою тригонометричною формулою, одержимо

$$s_{\text{КМ}}(t) = S_0 \cos(m \sin \Omega t) \cos \omega_0 t - S_0 \sin(m \sin \Omega t) \sin \omega_0 t. \quad (1.23)$$

Функції $\cos(m \sin \Omega t)$ й $\sin(m \sin \Omega t)$ можна представити у вигляді тригонометричних рядів.

У теорії функції Бесселя доводяться наступні співвідношення [4]:

$$\left. \begin{aligned} \sin(m \sin \Omega t) &= 2 \sum_{n=1}^{\infty} J_{2n-1}(m) \sin(2n-1)\Omega t; \\ \cos(m \sin \Omega t) &= J_0(m) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} J_{2n}(m) \cos(2n\Omega t), \end{aligned} \right\} \quad (1.24)$$

де $J_n(m)$ – функція Бесселя першого роду n -го порядку від аргументу m .

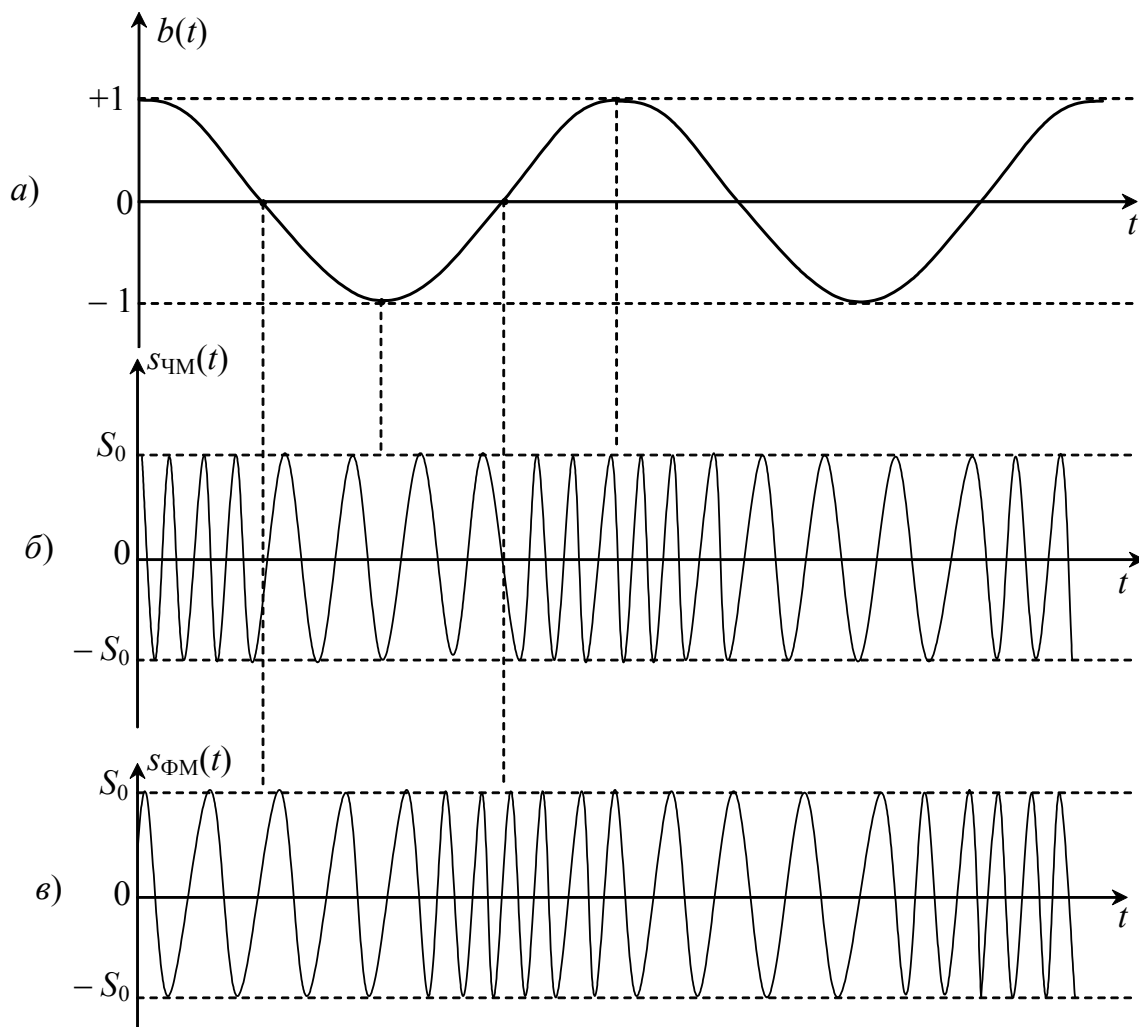


Рисунок 1.17 – Часові діаграми сигналів ЧМ і ФМ:
 а – сигнал, що модулює; б – модульований ЧМ сигнал;
 в – модульований ФМ сигнал

На рис. 1.19 представлені графіки функцій Бесселя.

Підставивши вирази (1.24) в (1.23) і зробивши перетворення, одержимо функцію сигналу з кутовою модуляцією

$$\begin{aligned}
 s_{\text{КМ}}(t) = S_0 J_0(m) \cos \omega_0 t + \sum_{n=1}^{\infty} S_0 J_n(m) \cos(\omega_0 + n\Omega)t + \\
 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n S_0 J_n(m) \cos(\omega_0 - n\Omega)t.
 \end{aligned}
 \tag{1.25}$$

Аналізуючи вираз (1.25) бачимо, що спектр коливання за кутової модуляції складається з нескінченного числа бокових частот, що відрізняються від частоти переносника ω_0 на $\pm n\Omega$, де n – будь-яке ціле число. Амплітуди цих бокових частот визначаються $J_n(m)S_0$ і залежать від індексу m ; в міру віддалення від ω_0 їхня величина зменшується.

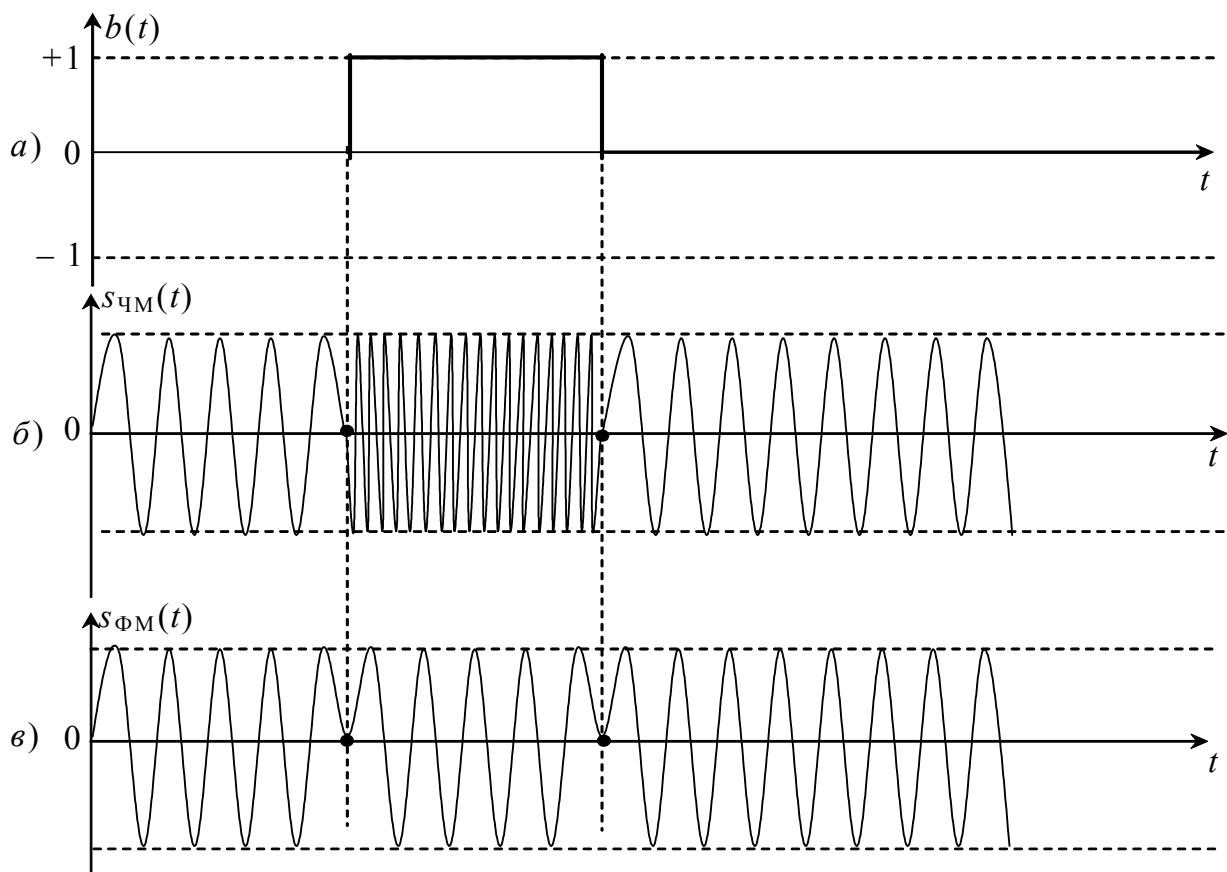


Рисунок 1.18 – Часові діаграми сигналів ЧМ і ФМ при впливі відеоімпульсом:
 а – модулюючий сигнал $b(t)$; б – модульований сигнал ЧМ;
 в – модульований сигнал ФМ

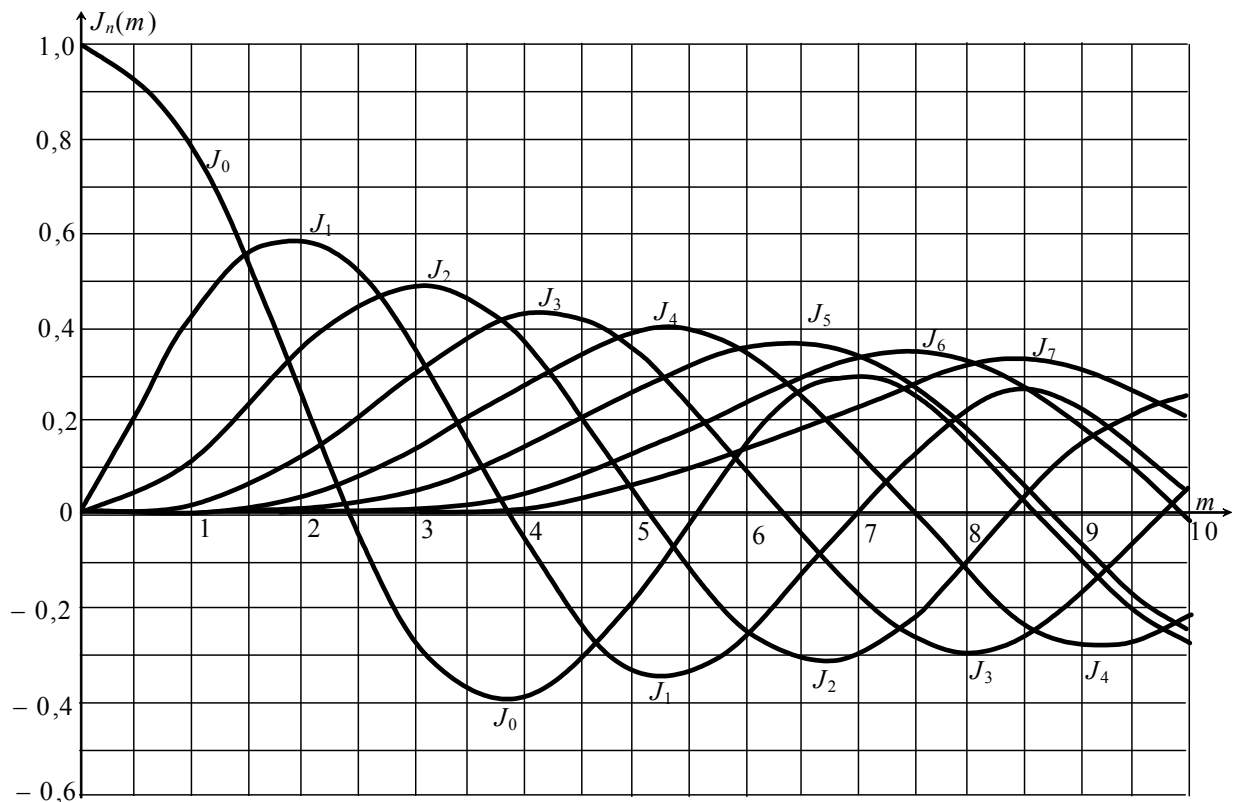


Рисунок 1.19 – Графіки функцій Бесселя

Пропонуємо самостійно зобразити приблизний вигляд спектра коливань з кутовою модуляцією гармонічним сигналом з частотою Ω при $m = 5$.

Варто помітити, що для кутової модуляції при $\omega_d \ll \Omega$ ширина спектра модульованого коливання близька до величини 2Ω . Ширина спектра модульованого коливання при $\omega_d \gg \Omega$ близька до величини $2\omega_d$.

1.3 Кореляційні функції регулярних сигналів. Кореляційний аналіз

Під кореляцією розуміють ступінь “подібності” або схожості двох функцій. Якщо $s_1(t)$ і $s_2(t)$ функції двох сигналів, то

$$\frac{\int_{-\infty}^{\infty} s_1 s_2 dt}{\int_{-\infty}^{\infty} s_2^2 dt} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} s_1 s_2 dt}{\int_{-\infty}^{\infty} s_1^2 dt} = k_k -$$

– коефіцієнт кореляції двох сигналів. Цей коефіцієнт показує яку частину одного сигналу варто вилучити з іншого сигналу, щоб частина сигналу, що залишилася мала б мінімальну енергію. Якщо коефіцієнт k_k дорівнює нулю, то два сигнали називаються **ортogonalними** [2] й енергія їхньої суми дорівнює сумі їхніх енергій $(w_1 + w_2)^2 = w_1^2 + w_2^2$. Для двох обмежених за тривалістю однакових сигналів, один із яких зміщується за часом, існує **автокореляційна функція (АКФ)** (взаємна кореляційна функція) – залежність кореляції (подібності) від величини зсуву $t_{зс}$:

$$k_{ак}(t_{зс}) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)s(t \pm t_{зс}) dt. \quad (1.26)$$

Зсув можливий вправо й вліво, тобто $+t_{зс}$ і $-t_{зс}$.

Видно, що при $t_{зс} = 0$, автокореляційна функція стає рівною енергії сигналу, тому існує зв'язок між автокореляційною функцією сигналу й енергетичним спектром сигналу. Цей зв'язок встановлюється за допомогою теореми Релея (1842-1919)

$$\int_{-\infty}^{\infty} s^2(t) dt = \pi \int_{-\infty}^{\infty} S^2(\omega) d\omega. \quad (1.27)$$

Енергетичний спектр S_E сигналу $s(t)$ є квадрат модуля спектральної щільності $S^2(\omega)$ і не залежить від фази сигналу:

$$S_E = S(j\omega)S^*(j\omega) = S^2(\omega),$$

де $S(j\omega)$ й $S^*(j\omega)$ – спектральна щільність і комплексно-спряжена спектральна щільність сигналу відповідно.

Якщо сигнал зміщений у часі, то його спектральна щільність відповідає $s(t \pm t_{zc}) \leftrightarrow S(j\omega)e^{\pm j\omega t_{zc}}$, що теж не впливає на енергетичний спектр. Енергетичний спектр сигналу й автокореляційна функція сигналу пов'язані парою перетворень Фур'є:

$$s(t)s(t \pm t_{zc}) \leftrightarrow S^2(\omega).$$

Кореляційні характеристики сигналів мають велике значення для вибору оптимальних сигналів при передаванні інформації, виборі сигналів зі спеціальними, наперед заданими властивостями.

Розглянемо приклад.

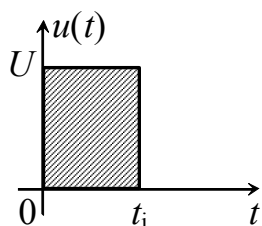


Рисунок 1.20 – Відеоімпульс

Визначити АКФ сигналу “відеоімпульс”, зображеного на рис. 1.20. Скориставшись формулою (1.26)

$$\begin{aligned} k_{ак}(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} u(t)u(t \pm t_{zc})dt = \\ &= \int_0^{t_i} U \cdot U(t \pm t_{zc})dt = U^2 \int_0^{t_i} (t \pm t_{zc})dt. \end{aligned}$$

Для обчислення інтегралів існують стандартні машинні програми, тому для обчислення в запропонованому прикладі вдаємося до однієї із них.

Нехай $U = 1$ В, $t_i = 1$ с, тоді

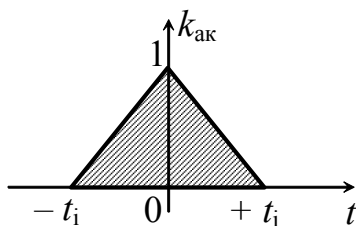


Рисунок 1.21 – Автокореляційна функція відеоімпульсу

$$k_{ак}(t_{zc}) = \begin{cases} 0, & t_{zc} = -t_i; \\ 1, & t_{zc} = 0; \\ 0, & t_{zc} = +t_i. \end{cases}$$

Для сигналів $s_1(t)$ і $s_2(t)$, які відрізняються один від одного, застосовують взаємні кореляційні функції, які записуються виразами

$$k_{s_1 s_2}(t_{zc}) = \int_{-\infty}^{\infty} s_1(t)s_2(t \pm t_{zc})dt,$$

$$k_{S_2S_1}(t_{3c}) = \int_{-\infty}^{\infty} s_1(t \pm t_{3c}) s_2(t) dt$$

причому функції $k_{S_1S_2}(t_{3c})$ й $k_{S_2S_1}(t_{3c})$ не будуть симетричні. Між ними буде мати місце наступна залежність $k_{S_1S_2}(t_{3c}) = k_{S_2S_1}(-t_{3c})$.

Пропонуємо самостійно розглянути приклади визначення взаємних кореляційних функцій двох сигналів, що зсувається спочатку в один бік, а потім в інший. Після цього зробити відповідні висновки.

1.4 Перетворення спектрів аналоговими фільтрами

Фільтр – пристрій (частіше чотириполюсник 2×2), коефіцієнт передачі $\left(H_{uu} = \frac{U_2}{U_1} \right)$ якого в різних діапазонах частот різний (в одних близький до 1, в інших близький до 0). Діапазони частот з великим коефіцієнтом передачі називаються **смугами пропускання (СП)**, а діапазони частот з малим коефіцієнтом передачі називаються **смугами затримування (СЗ)**.

Всі фільтри, схеми заміщення яких містять аналогові елементи R , L , C і M будемо називати **аналоговими**. Аналогові фільтри перетворюють здебільшого аналогові сигнали.

1.4.1 Основи теорії аналогових фільтрів

Розглянемо класифікацію фільтрів за **діапазонами частот**. Всі фільтри можна представити декількома класами:

– **фільтр нижніх частот (ФНЧ)** – смуга пропускання (СП) розташована від 0 до частоти f_1 ;

– **фільтр верхніх частот (ФВЧ)** – смуга пропускання (СП) розташована від частоти f_1 до ∞ ;

– **смуговий фільтр (СФ)** – смуга пропускання (СП) розташована в діапазоні від f_1 до f_2 ;

– **режекторний фільтр (РФ)** – смуга затримування (СЗ) розташована в діапазоні від f_1 до f_2 ;

– **гребенчатий фільтр (ГФ)** – смуги пропускання (СП) і смуги затримування (СЗ) на частотній осі чергуються (їх може бути декілька).

За конструкцією фільтри можна класифікувати на RC -пасивні, RC -активні, LC , п'єзоелектричні, магнітострикційні, електромеханічні, фільтри на відрізках ліній передачі, полоскові, фільтри на поверхнево-акустичних хвилях (ПАХ) і безліч інших [1, 5].

За електричними схемами заміщення фільтри можна поділити на мостові (рис. 1.22), сходові (рис. 1.23), диференційно-мостові (рис. 1.24).

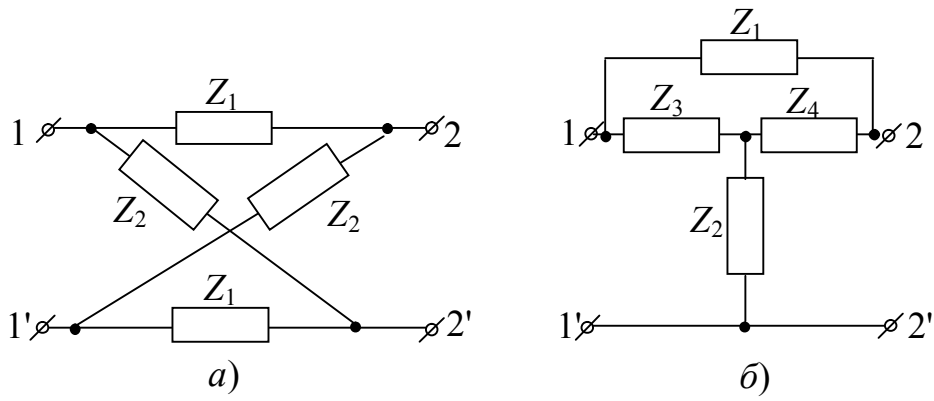


Рисунок 1.22 – Мостові схеми заміщення фільтрів:
a – симетрична врівноважена;
б – несиметрична неврівноважена

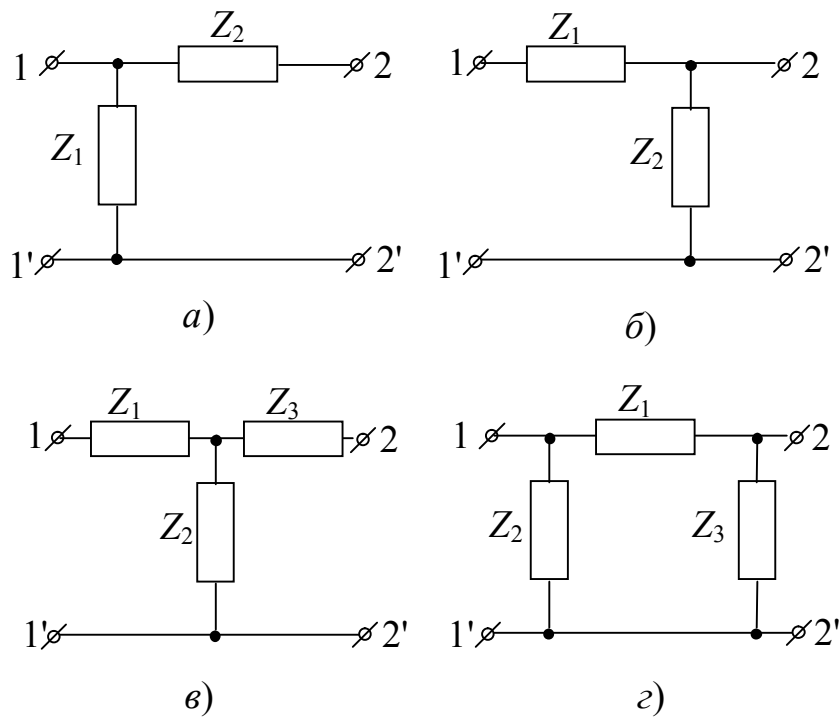


Рисунок 1.23 – Сходові схеми заміщення ланок фільтрів:
a – Γ -подібна напівланка; *б* – обернена Γ -подібна напівланка;
в – Γ -подібна ланка; *г* – Π -подібна ланка

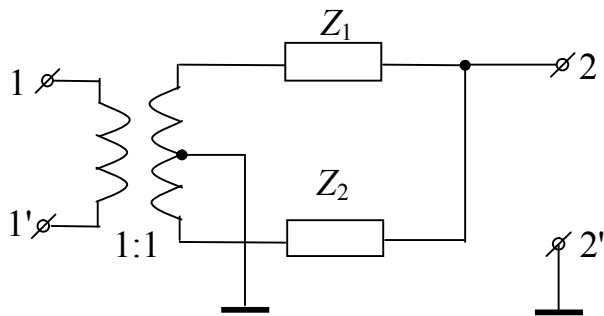


Рисунок 1.24 – Диференційно-мостова схема заміщення

У схемах заміщення двополіусники Z_1, Z_2, Z_3, Z_4 містять реактивні елементи; 1–1' – вхідні затискачі, 2–2' – вихідні затискачі.

Аналіз фільтрів, як прийнято в теорії кіл, починають з поняття „ідеальний фільтр”. Схему такого фільтра зобразити не є можливим, можна тільки розглядати якийсь „чорний ящик”, у якого є вхід і вихід, і який має наступні властивості: у смузі пропускання коефіцієнт передачі $H_{сп} = 1$, а в смузі затримування $H_{сз} = 0$. Якщо врахувати, що загасання A чотириполіусника пов'язане з коефіцієнтом передачі H наступною залежністю $20 \lg \frac{1}{H} = A$ [дБ] (розмірність децибелі), то для ідеального фільтра $A_{сп} = 0$, $A_{сз} \rightarrow \infty$. Можна зобразити графіки $H(f)$ і $A(f)$ ідеальних фільтрів (рис. 1.25).

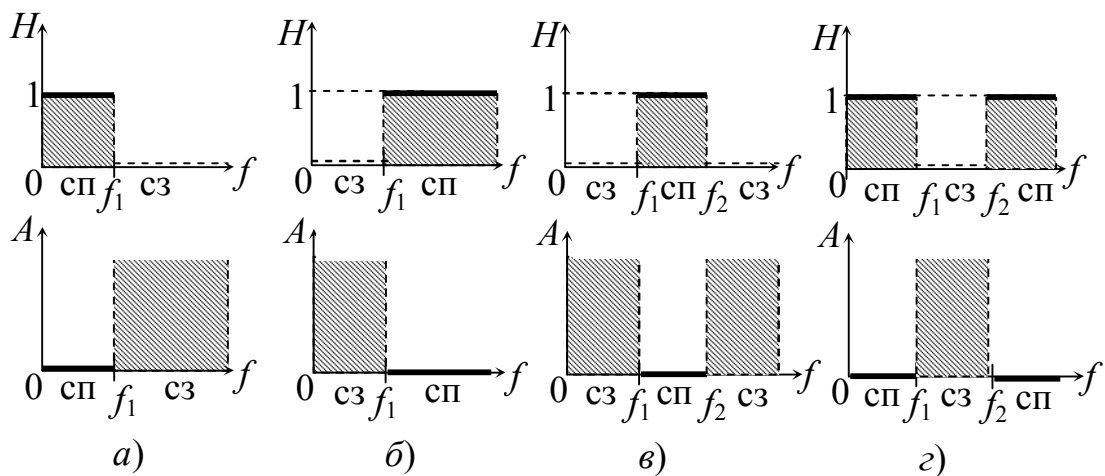


Рисунок 1.25 – Частотні характеристики ідеальних фільтрів:
а – ФНЧ; б – ФВЧ; в – СФ; з – РФ

Наступний етап аналізу фільтрів – це **фільтри без втрат**. Для цих фільтрів можна зобразити схеми й частотні характеристики (рис. 1.26). Із графіків частотних характеристик видно, що вони суттєво відрізняються від характеристик ідеальних фільтрів (рис. 1.25). При цьому варто врахувати, що навантаження фільтрів R впливає на крутизну частотних характеристик. Настійно рекомендуємо розрахувати й побудувати АЧХ кожного з фільтрів (рис. 1.26) за різних значень R . Якщо розглядати схеми з втратами, то частотні характеристики схожі на частотні характеристики схем рис. 1.26 з тією лише різницею, що загасання в СП $A_{сп} \neq 0$, а в СЗ $A_{сз} \neq \infty$ на жодній із частот у тому числі й при $f=0$.

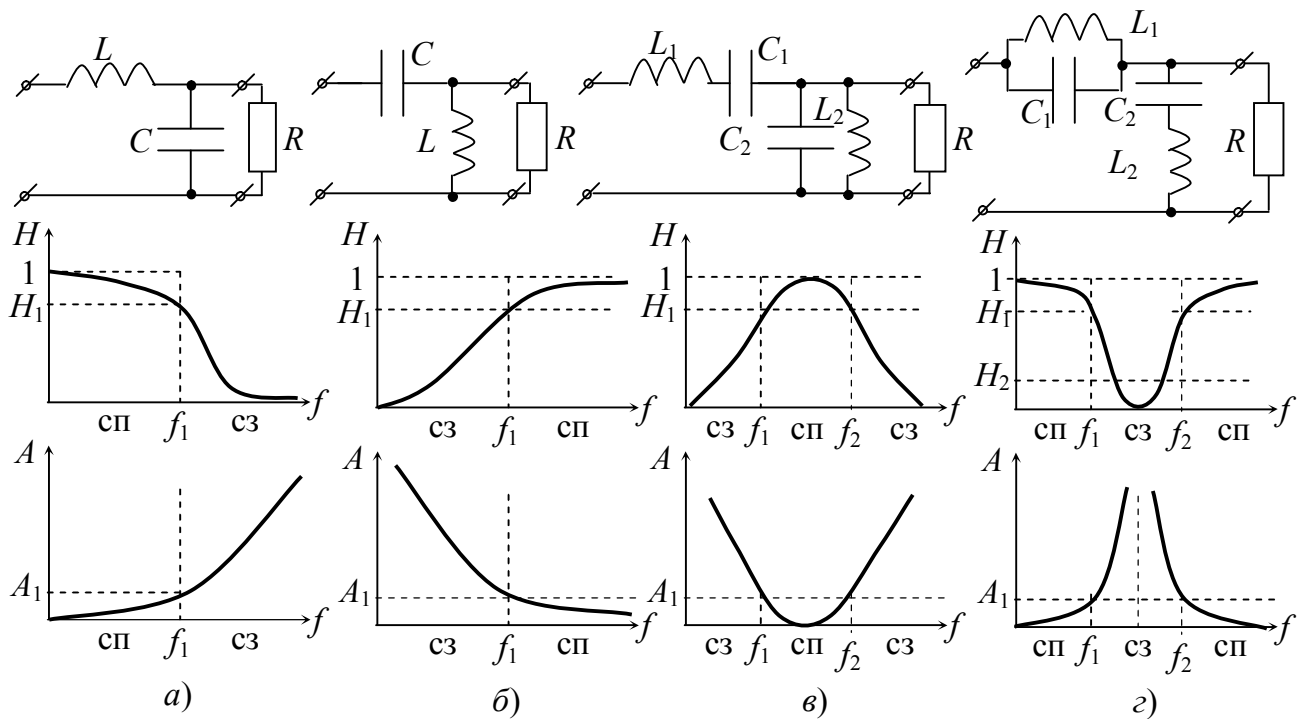


Рисунок 1.26 – Схеми заміщення й частотні характеристики найпростіших навантажених ланок фільтрів без втрат:
 a – ФНЧ; $б$ – ФВЧ; $в$ – СФ; $г$ – РФ

1.4.2 Введення у синтез аналогових фільтрів

Під синтезом фільтра розуміють знаходження схем заміщення, що реалізують деякі вимоги до їхніх характеристик.

Вимоги до частотних характеристик:

- розподіл частот у смугах пропускання й затримання для конкретного типу фільтра;
- граничні коефіцієнти передачі (H) або загасання (A) для кожної зі смуг.

Виходячи із цих вимог роблять операцію синтезу. Завдання синтезу фільтрів (як і будь-якого кола) – завдання не однозначне. У результаті можна одержати кілька схем заміщення. За необхідності ці схеми оптимізують і залишають одну з декількох можливих.

Для синтезу фільтрів можна використовувати такі методи:

- за характеристичними параметрами;
- за робочими параметрами.

Метод синтезу фільтрів за характеристичними параметрами і його різновид – один із класичних методів. У цей час він застосовується рідко.

Суть методу полягає в наступному: будь-яке коло складається з елементів („цеглинок”), схема будь-якого аналогового фільтра містить елементарні ланки (рис. 1.26), які з'єднуються між собою касадно (вихід одного із входом наступного). При цьому варто враховувати, що в місцях з'єднання ланок не повинне бути відбиття енергії. Ця умова називається **узгодження характеристикних опорів**.

Характеристичним опором чотириполюсника Z_C називається такий опір, за якого вхідний опір Z_{BX} і опір навантаження Z_H виявляються однаковими $Z_{BX} = Z_H = Z_C$ (рис. 1.27, а).

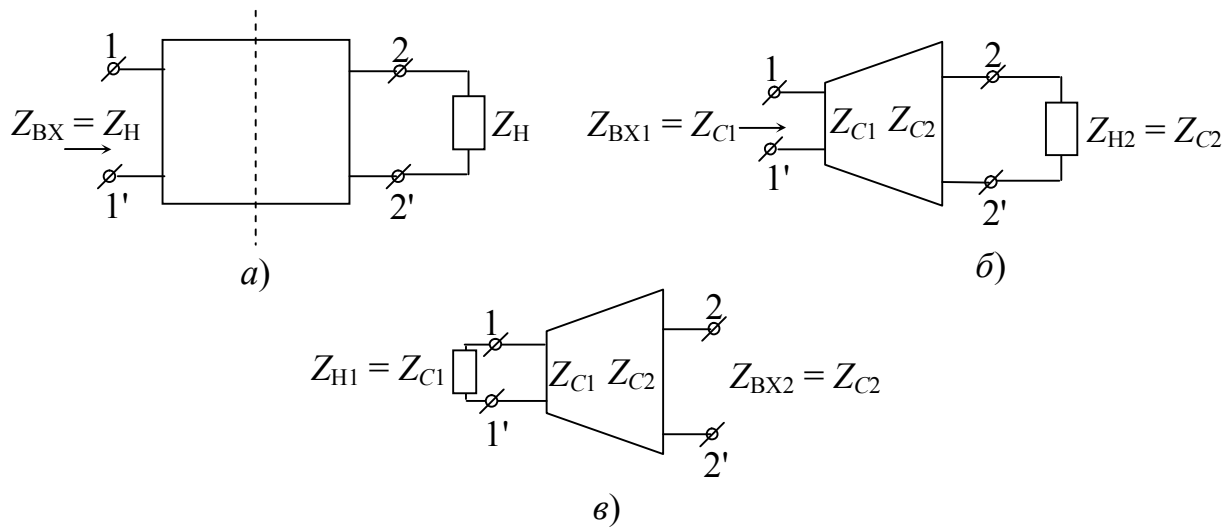


Рисунок 1.27 – Характеристичні параметри чотириполюсників:
 а – симетричний; б – несиметричний, навантаження праворуч;
 в – несиметричний, навантаження ліворуч

Для симетричних обернених чотириполюсників це один опір (у симетричних чотириполюсниках (рис. 1.27, а) вхідні (1–1') і вихідні (2–2') затискачі можна змінювати місцями). Для несиметричних чотириполюсників характеристичних опорів два (з кожної сторони) Z_{C1} і Z_{C2} відповідно (рис. 1.27, б і в). Для розрахунку передачі сигналу вводять параметр „характеристична постійна передачі” – $\dot{\Gamma}_C$, яка визначається за умови, що навантаження чотириполюсника узгоджене з характеристичним опором Z_C ($Z_H = Z_C$):

$$\dot{\Gamma}_C = A_C + jB_C = 20 \lg \frac{\dot{U}_1}{\dot{U}_2} \Big|_{Z_H=Z_C} = 20 \lg \frac{\dot{I}_1}{\dot{I}_2} \Big|_{Z_H=Z_C} \quad (1.28)$$

У формулі (1.28) A_C – характеристичне загасання; B_C – характеристична фаза.

Загасання A_C визначається як

$$A_C = 20 \lg \frac{U_1}{U_2} \Big|_{Z_H=Z_C} = 20 \lg \frac{I_1}{I_2} \Big|_{Z_H=Z_C} \quad [\text{дБ}] \text{ (децибели),}$$

а фаза B_C :

$$B_C = \varphi_{u1} - \varphi_{u2} = \varphi_{i1} - \varphi_{i2} \quad [\text{рад}], [\text{град}] \text{ (радіани або градуси).}$$

Якщо чотириполюсник несиметричний і обернений, то він характеризується трьома параметрами: Z_{C1} , Z_{C2} , \dot{I}_C .

Якщо чотириполюсник несиметричний і необернений, то характеристичних параметрів чотири: Z_{C1} , Z_{C2} , \dot{I}_{C1} , \dot{I}_{C2} . У такого чотириполюсника умови передачі сигналів зліва направо і справа наліво не однакові [1].

Теорія характеристичних параметрів знаходить і сьогодні застосування у системах, де необхідне узгоджене з'єднання. Наприклад, при монтажі ліній передачі. З'єднання будівельних довжин ліній передачі між собою ефективно тільки за узгодженого їхнього включення.

Недоліком методу розрахунку фільтрів за характеристичними параметрами є його громіздкість, наявність багатьох елементів підбора; повне узгодження можливо тільки у вузькому діапазоні частот.

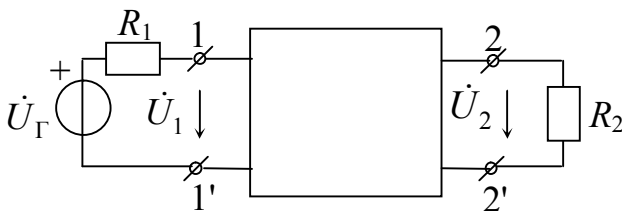


Рисунок 1.28 – Система передачі сигналів

передавальна функція визначається формулою:

$$\dot{H}_{\text{роб}} = \frac{2\dot{U}_2}{\dot{U}_G} \sqrt{\frac{R_1}{R_2}},$$

а робоче загасання може бути розраховано:

$$A_p = 20 \lg \frac{1}{|\dot{H}_{\text{роб}}|} = 20 \lg \frac{U_G}{2U_2} \sqrt{\frac{R_2}{R_1}}, \text{ дБ.} \quad (1.29)$$

Якщо навантаження симетричні ($R_1 = R_2$), то загасання розраховується за формулою:

$$A_p = 20 \lg \frac{1}{H_{\text{роб}}} = 20 \lg \frac{U_G}{2U_2}. \quad (1.29a)$$

1.4.3 Основи синтезу аналогових фільтрів

Насамперед необхідно апроксимувати передавальну функцію за заданими вимогами. Причому, функція, що апроксимує дану передавальну, повинна відповідати умовам фізичної реалізованості:

- 1) всі полюси функції повинні лежати в лівій напівплощині p -площини (умова стійкості кола);

- 2) функція повинна бути раціональною з дійсними коефіцієнтами;
- 3) ступінь полінома чисельника повинен бути рівним або меншим ступеня полінома знаменника.

Нагадаємо, що операторна передавальна функція кола в загальному випадку має вигляд:

$$\begin{aligned}
 H(p) &= \frac{b_m p^m + b_{(m-1)} p^{(m-1)} + \dots + b_1 p + b_0}{a_n p^n + a_{(n-1)} p^{(n-1)} + \dots + a_1 p + a_0} = \\
 &= H_0 \frac{(p - p_{01})(p - p_{02}) \dots (p - p_{0m})}{(p - p_1)(p - p_2) \dots (p - p_n)} = H_0 \frac{\prod_{k=1}^m (p - p_{0k})}{\prod_{l=1}^n (p - p_l)}, \quad (1.30)
 \end{aligned}$$

де $p_{01}, p_{02}, \dots, p_{0m}$ – нулі функції $H(p)$, корені полінома чисельника;
 p_1, p_2, \dots, p_n – полюси функції $H(p)$, корені полінома знаменника;
 H_0 – коефіцієнт передачі при $p = 0$.

У такий спосіб характеристики ідеальних фільтрів (рис. 1.25) реалізувати практично неможливо. Що стосується характеристик фільтрів без втрат

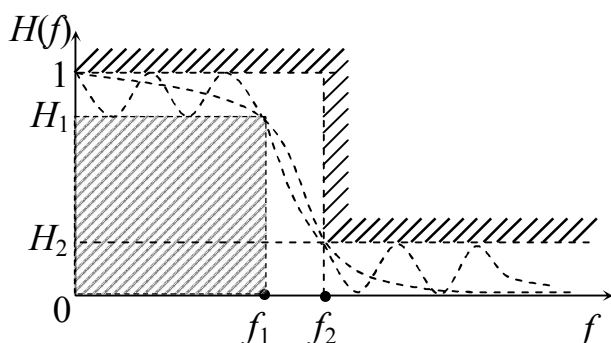


Рисунок 1.29 – Шаблон вимог до ФНЧ

(рис. 1.26), то вони можуть бути апроксимовані. На рис. 1.29 зображений шаблон вимог до характеристики „базового” ФНЧ. Світлий коридор на цьому рисунку – простір, в який можна вписати функцію коефіцієнта передачі фільтра. Смуга пропускання перебуває на осі частот між 0 і f_1 , а смуга затримування від f_2 і вище. У смузі частот між частотами f_1 і f_2 вимоги не

відповідають жодній із смуг (СП, СЗ). Цей діапазон звичайно називають **смугою розфільтровки**. Властивості цієї смуги частот такі: чим вище вимоги до фільтра, тим ця смуга вужче, тобто характеристика ближче до ідеального.

Способів апроксимації в цей час є безліч [5]. Розглянемо деякі з них. Фільтр із монотонно спадаючою (зростаючою) характеристикою АЧХ (рис. 1.26) називають **фільтром Баттерворта**. Іноді таку характеристику називають максимально гладкою. Фільтр із рівнохвильовою у смузі пропускання й монотонною в смузі затримування характеристикою називають **фільтром Чебишева** (рис. 1.30).

Порядок фільтра (число реактивних елементів) визначається кількістю точок перетинання рівнохвильової характеристики із прямою лінією, проведеною паралельно осі частот у СП. **Фільтром Золотарьова-Кауера** називають фільтр із рівнохвильовою характеристикою в смузі пропускання й у

смузі затримування (рис. 1.31). Такий фільтр ще називають **еліптичним** або **подвійним Чебишева** [5].

Апроксимація функції Баттерворта для фільтра без втрат записується

$$|H_B(\Omega^2)| = \frac{1}{1 + \Omega^{2n}}, \quad (1.31)$$

де $\Omega = \frac{f}{f_0}$ – нормована частота ФНЧ,

f_0 – границя СП при $H_1 = 0,707$,

n – порядок фільтра ($n = 1, 2, 3 \dots$)...

Залежно від порядку фільтра змінюється крутість характеристики – вона зростає зі зростанням порядку (рис. 1.32). Якщо допустити, що $n \rightarrow \infty$, то характеристика наближається до характеристики ідеального ФНЧ. Функція (1.31) є квадратом модуля передавальної функції.

Апроксимація фільтра Чебишева для фільтра без втрат записується виразом

$$|H_C(\Omega^2)| = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 P_n(\Omega)}, \quad (1.32)$$

де $P_n(\Omega)$ – поліном Чебишева n -го порядку;

ε – величина нерівномірності передачі (на рис. 1.30 $\varepsilon = 1 - H_1$);

Ω – нормована частота.

Функція (1.32) має наступні властивості:

- 1) при $|\Omega| \leq 1$ коливається між 1 і $\frac{1}{1 + \varepsilon^2}$. На рис. 1.30 ці коливання видні;
- 2) при $|\Omega| > 1$ монотонно спадає до нуля. Крутість спаду залежить від порядку n , чим вище порядок, тим крутіше характеристика;

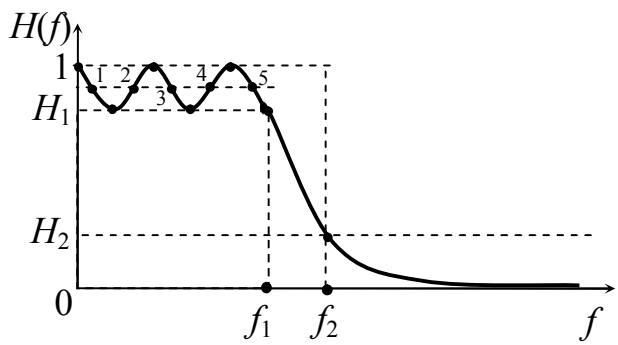


Рисунок 1.30 – Характеристика фільтра Чебишева п'ятого ($n = 5$) порядку

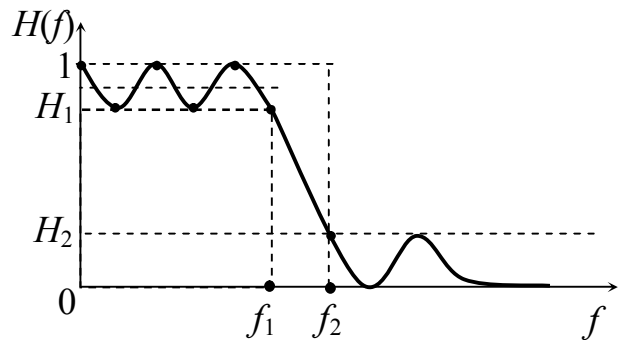


Рисунок 1.31 – Характеристика фільтра Золотарьова-Кауера ($n = 5$)

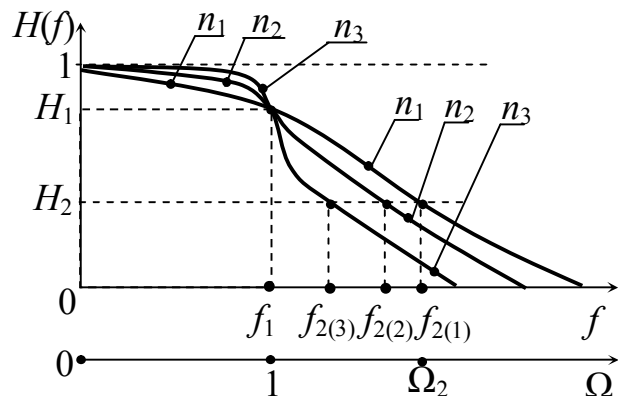


Рисунок 1.32 – Сімейство АЧХ фільтра Баттерворта в залежності від n ($n_1 < n_2 < n_3$)

3) $|H(1)|^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon^2}$, $|H(0)|^2 = 1$ – якщо n непарний; $|H(0)|^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon^2}$ – якщо n парний.

У 1931 р. Кауер дійшов висновку, що можна проектувати фільтр із рівнохвильовими характеристиками у смузі пропускання й у смузі затримування (рис. 1.31). Функція передачі такого фільтра визначається виразом

$$|H_{\text{ЗК}}(\Omega^2)| = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 F_n^2(\Omega)}, \quad (1.33)$$

де ε – величина нерівномірності передачі;

$F(n)$ – дрібно-раціональна функція (дріб Золотарьова).

1.4.4 Розрахунок фільтрів за робочими параметрами

Розрахунок фільтрів виконується виходячи з технічних умов (ТУ): їх надають або розробляють.

Вихідними даними для розрахунку еквівалентних схем заміщення фільтрів (на прикладі смугового фільтра) є [1, 5]:

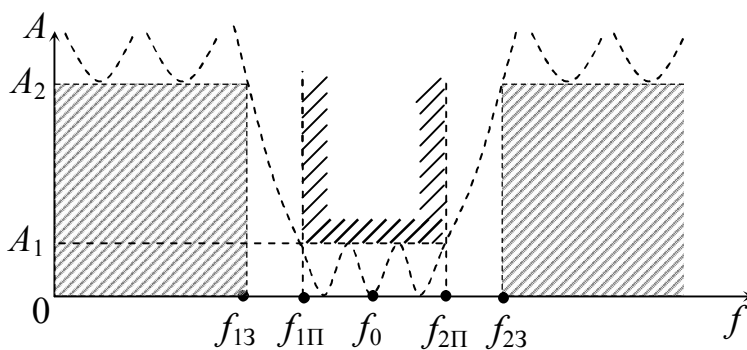


Рисунок 1.33 – Шаблон вимог до смугового фільтра

1 – границі смуги пропускання СП [Гц] ($f_{1П} \dots f_{2П}$); 2 – максимально-припустиме загасання у смузі пропускання – A_1 [дБ];

3 – границі смуги затримування СЗ [Гц] ($f_{13} \dots f_{23}$);

4 – мінімально-допустиме загасання у смузі затримування – A_2 [дБ];

5 – величини опорів

генератора ($R_{\Gamma} = R_1$) і навантаження ($R_{\text{Н}} = R_2$) (R_1, R_2) [Ом].

Для технічної реалізації фільтрів необхідні додаткові умови, такі як елементна база, габарити, вага, кліматичні умови й багато інших. Як приклад розглянемо деякі етапи розрахунку смугового фільтра. На рис. 1.33 представлений шаблон основних вимог до СФ. Розрахунок будь-якого класу фільтра починають з приведення вимог до фільтра прототипу, тобто до ФНЧ і його розрахунку. Перерахування вимог здебільшого стосується діапазонів частот СП і СЗ. Смуга пропускання прототипу перераховується за формулою $f_1 = f_{2П} - f_{1П}$, а границя смуги затримування визначається $f_2 = f_{23} - f_{13}$. Для того щоб характеристика смугового фільтра була симетричною щодо частоти f_0 , необхідно уточнити частоти так щоб виконувалася умова

$$f_{1\Pi} \cdot f_{2\Pi} = f_{13} \cdot f_{23} = f_0^2.$$

На рис. 1.34 зображена додаткова вісь нормованих частот $\Omega = \frac{f}{f_1}$. Частота $\Omega_2 = \frac{f_2}{f_1}$ відповідає границі смуги затримування фільтра прототипу. Потім вибирають тип фільтра за частотними характеристиками і визначають порядок фільтра n . Порядок фільтра можна розрахувати за формулами, за таблицями або за графіками.

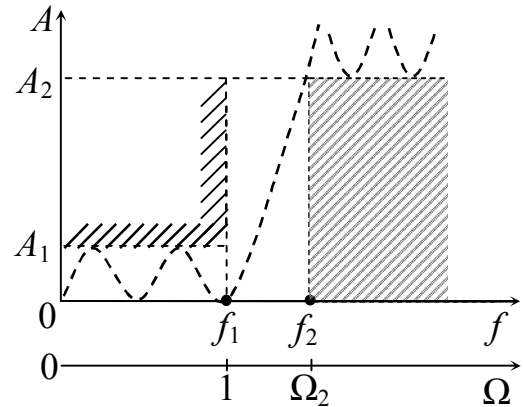


Рисунок 1.34 – Шаблон вимог до прототипу ФНЧ

Для фільтра з характеристикою Баттерворта можна використовувати таку формулу [1]:

$$n_{\text{Б}} \geq \frac{A_2 - 10 \lg(10^{0,1A_1} - 1)}{20 \lg \Omega_2}, \quad (1.34)$$

де A_1, A_2 і Ω_2 – задані (A_1, A_2) і розраховані (Ω_2) величини.

Для фільтра з характеристикою Чебишева порядок визначається як

$$n_{\text{Ч}} \geq \frac{A_2 + 6 - 10 \lg(10^{0,1A_1} - 1)}{20 \lg(\Omega_2 + \sqrt{\Omega_2^2 - 1})}. \quad (1.35)$$

Порядок фільтра Золоторьова-Кауера (еліптичного) визначається за формулою

$$n_{\text{ЗК}} \geq \frac{A_2 + 12 - 10 \lg(10^{0,1A_1} - 1)}{10 \lg \left(2 \frac{\sqrt{\Omega_2 + \sqrt{\Omega_2^2 - 1}}}{\sqrt{\Omega_2 - \sqrt{\Omega_2^2 - 1}}} \right)}. \quad (1.36)$$

У формулах (1.34...136) нерівності пояснюються тим, що порядок будь-якого фільтра визначається кількістю реактивних елементів. Тому це повинні бути цілі числа. При одержанні дробових n результат округляють до найближчого більшого цілого.

Перш ніж приступити до розрахунку елементів схем фільтра, поговоримо про такий прийом для уніфікації розрахунків, як нормування опорів елементів. Раніше в курсі вже зустрічалася операція нормування, наприклад, у розділі про

резонанси в електричних колах нормували струм $\frac{I}{I_0} = n_i$, де I_0 – струм послідовного контуру в момент резонансу; $\frac{U}{U_0} = n_u$, де U_0 – напруга на затискачах паралельного контуру в момент резонансу струмів; $\frac{\omega}{\omega_0} = \frac{f}{f_0} = \Omega$ – нормована частота, де $\omega_0 = 2\pi f_0$ – частота резонансу.

Нормування опорів елементів при розрахунку фільтрів проводиться в такий спосіб. Всі опори кола діляться на один „базовий” опір, зазвичай це опір навантаження R_H . На рис. 1.35 зображене вихідне коло, а на рис. 1.36 це коло приводиться до одиничного опору навантаження. У такий спосіб $\frac{Z}{R_H} = \hat{Z}$ – нормований опір.

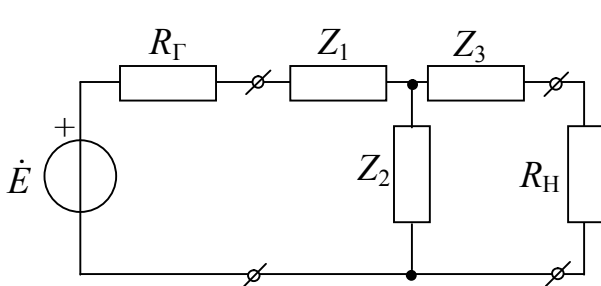


Рисунок 1.35 – Вихідне коло до нормування

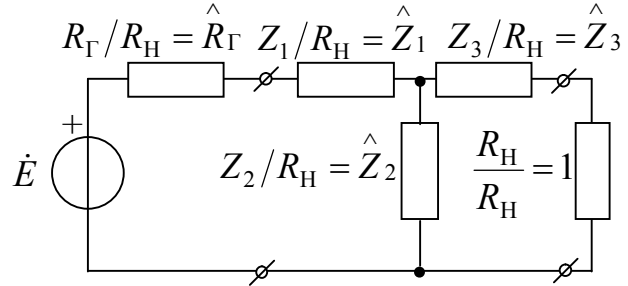


Рисунок 1.36 – Нормування за опором навантаження R_H

Якщо ще нормувати за частотною $\omega_1 = 2\pi f_1$ (границя смуги пропускання ФНЧ прототипу (ФНЧП)), то одержимо для опору індуктивності

$$\hat{X}_L = \frac{\omega L \cdot \omega_1}{\omega_1 \cdot R_H} = \Omega \hat{L},$$

де $\hat{L} = \frac{\omega_1 L}{R_H}$ – «нормована індуктивність» (нормована величина індуктивності).

Для ємності

$$\hat{X}_C = \frac{\omega_1}{\omega_1 \omega C R_H} = \frac{1}{\Omega \omega_1 C R_H} = \frac{1}{\Omega \hat{C}},$$

де $\omega_1 C R_H = \hat{C}$ – «нормована ємність» (нормована величина ємності).

На рис. 1.37 зображена схема ФНЧ, що перетворює сигнал джерела напруги із внутрішнім опором R_Γ і подає його на опір R_H . На рис. 1.38 зображена та ж сама схема з нормованими елементами.

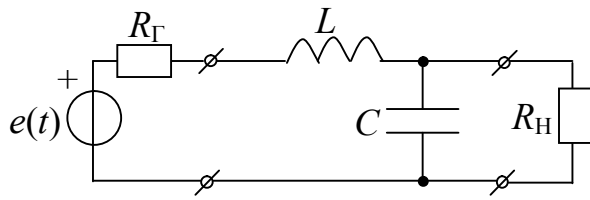


Рисунок 1.37 – ФНЧ другого порядку, навантажений з двох боків

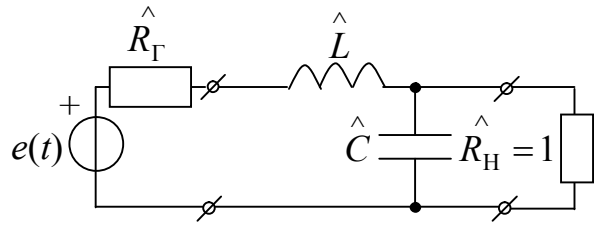


Рисунок 1.38 – Схема ФНЧ з нормованими елементами

Нормування елементів при розрахунках фільтрів – дуже ефективний прийом, що дозволяє уніфікувати розрахунки. Всі розрахунки ФНЧ звичайно зведені в таблиці [6], залежно від типу характеристики й порядку фільтра. Нормовані величини їхніх елементів уже розраховані. Досить їх тільки вибрати й денормувати. Денормування – це операція, за допомогою якої всі нормовані елементи приводять до вихідного (не нормованого) вигляду, тобто R , L , C .

Коефіцієнтами денормування при цьому є величини $K_L = \frac{R_H}{2\pi f_1}$, $K_C = \frac{1}{2\pi f_1 R_H}$, а

дійсні величини елементів розраховуються $R = \hat{R} \cdot R_H$, $L = K_L \cdot \hat{L}$, $C = K_C \cdot \hat{C}$. Після розрахунку елементів можна зобразити схему прототипу ФНЧ і її характеристики.

На рис. 1.39 зображені схеми ФНЧ n -го порядку, схеми еквівалентні й дуальні. На схемі рис. 1.39, а індуктивність L_1 з поздовжнього плеча переходить у ємність C_1 поперечного плеча (рис. 1.39, б), C_2 в L_2 і т.д.

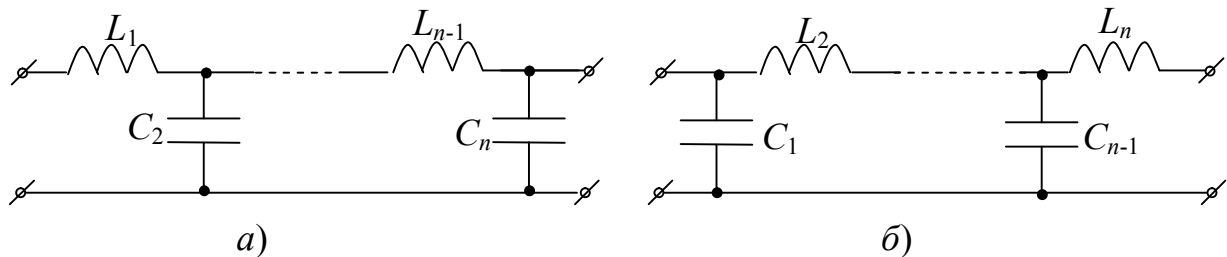


Рисунок 1.39 – Схеми ФНЧ n -порядку:
а – з Т-подібним входом; б – з П-подібним входом

На рис. 1.40 зображені частотні характеристики фільтра Баттерворта. Загасання ФНЧ Баттерворта розраховується за формулою

$$A_B = 10 \lg(1 + \varepsilon^2 \Omega^{2n}), \text{ [дБ]}, \quad (1.37)$$

де $\Omega = \frac{f}{f_1}$ – нормована частота;

$\varepsilon = \sqrt{10^{0,1A_1} - 1}$ – коефіцієнт нерівномірності передачі.

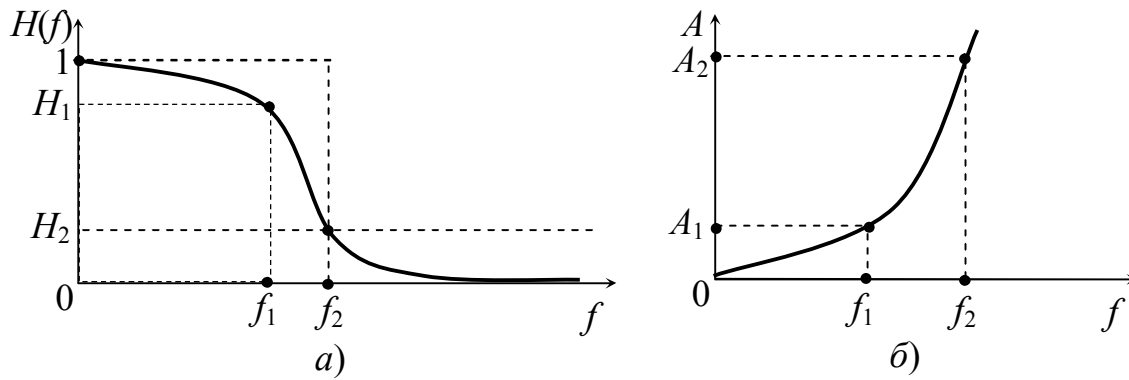


Рисунок 1.40 – Частотні характеристики ФНЧ Баттерворта:
a – АЧХ; *б* – характеристика загасання $A(f)$

Нагадаємо, що коефіцієнт передачі H і загасання A пов'язані рівностями:

$$H = \frac{U_2}{U_1} = 10^{-\frac{A}{20}}, \text{ а } A = 20 \lg H^{-1}.$$

На рис. 1.41 зображені графіки модулів передавальних функцій ФНЧ типу Чебишева.

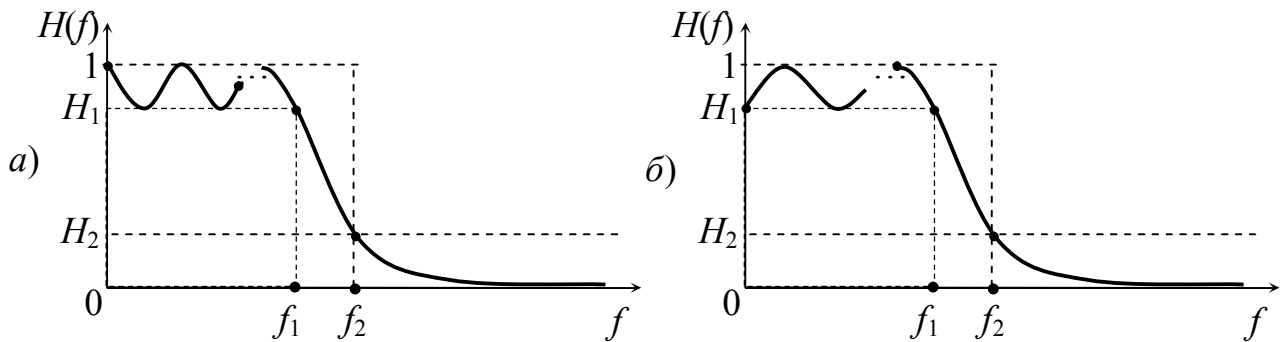


Рисунок 1.41 – Частотні характеристики (АЧХ) ФНЧ Чебишева:
a – для непарного порядку; *б* – для парного порядку

На рис. 1.42 зображені частотні характеристики загасання ФНЧ Чебишева.

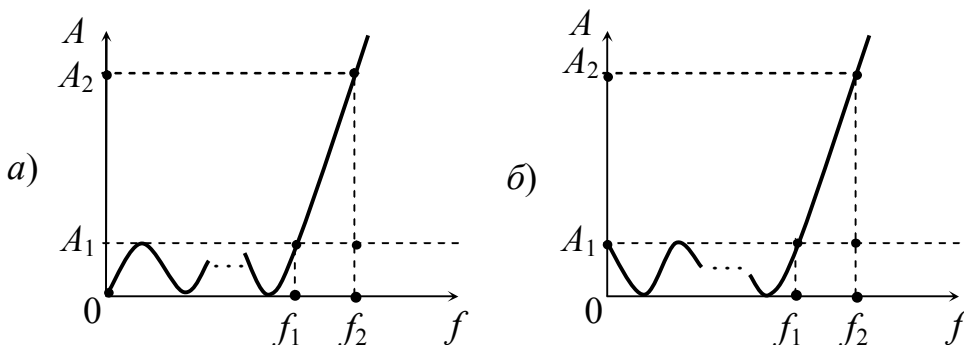


Рисунок 1.42 – Частотні характеристики загасання ФНЧ Чебишева:
a – для непарного порядку; *б* – для парного порядку

Загасання фільтра Чебишева розраховують за формулою

$$A_{\text{ч}} = 10 \lg \left[1 + \left(10^{0,1A_1} - 1 \right) P_n^2(\Omega) \right], \quad (1.38)$$

де $P_n(\Omega)$ – поліном Чебишева записується:

– у смузі пропускання від 0 до f_1

$$P_n(\Omega) = \cos(n \arccos \Omega);$$

– у смузі затримування від f_1

$$P_n(\Omega) = \text{ch}(n \text{ arch} \Omega).$$

Схеми заміщення ФНЧ Чебишева такі ж самі, як і у ФНЧ Баттерворта (рис. 1.39).

Схеми ФНЧ із характеристиками Золотарьова-Кауера зображені на рис. 1.43. Ці схеми еквівалентні (мають однакові частотні характеристики) і дуальні. Графіки передавальних функцій цих фільтрів зображені на рис. 1.44. Загасання фільтра Золотарьова-Кауера розраховують за формулою:

$$A_{\text{ЗК}} = 10 \lg \left[1 + \left(10^{0,1A_1} - 1 \right) F_n^2(\Omega) \right], \quad (1.39)$$

де $F_n(\Omega)$ – дріб Золотарьова.

Від фільтра прототипу ФНЧ можна перейти до будь-якого частотного фільтра (ФВЧ, СФ, РФ). Потрібно лише скористатися перетвореннями схем і частот (табл. 1.1).

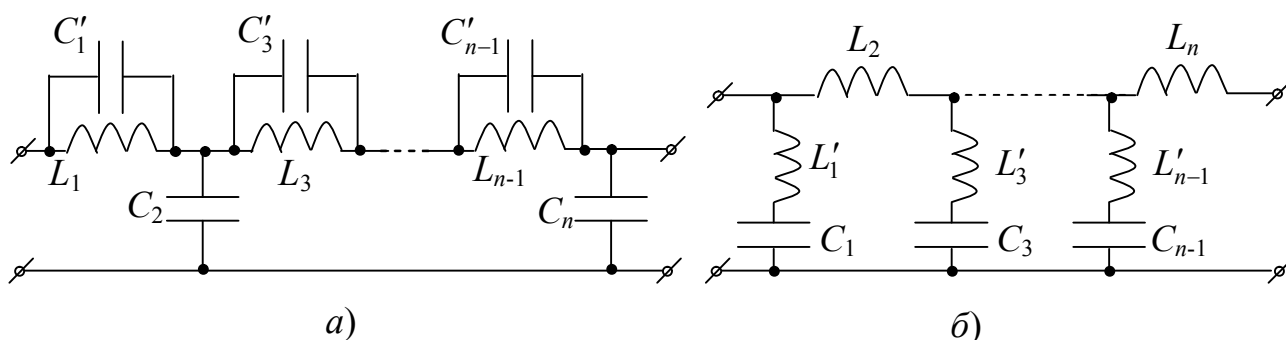


Рисунок 1.43 – Схеми фільтрів з характеристиками Золотарьова-Кауера:
а – з паралельними контурами; б – з послідовними контурами

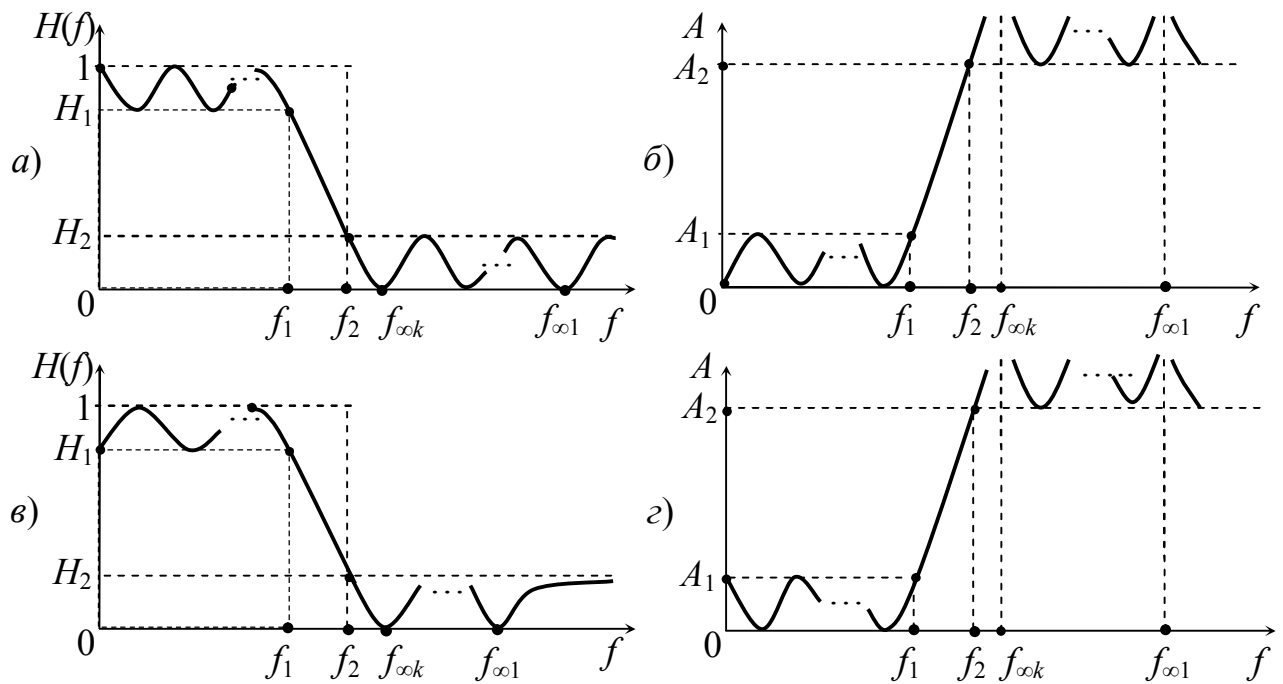


Рисунок 1.44 – Частотні характеристики ФНЧ Золотарьова-Кауера АЧХ (а) і загасання (б) для непарного порядку; АЧХ (в) і загасання (г) для парного порядку

Таблиця 1.1 – Перетворення елементів і частот фільтрів

Тип фільтра	ФНЧ	ФВЧ	СФ	РФ
Перетворення	2	3	4	5
Елементи				
Оператори	p_H	$p_B = \frac{1}{p_H}$	$p_C = p_H + \frac{1}{p_H}$	$p_P = \frac{1}{p_H + \frac{1}{p_H}}$
Частоти	$\Omega_H = \frac{f_2}{f_1}$	$\Omega_B = \frac{1}{\Omega_H} = \frac{f_1}{f_2}$	$\Omega_C = \left(\Omega_H + \frac{1}{\Omega_H} \right) k$	$\Omega_P = \frac{1}{\left(\Omega_H + \frac{1}{\Omega_H} \right) k}$

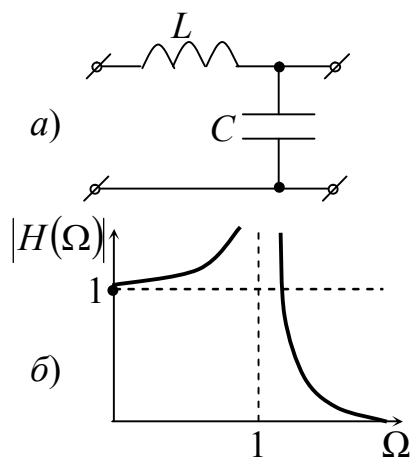


Рисунок 1.45 – ФНЧ:
 а – схема;
 б – частотна характеристика

У табл. 1.1 коефіцієнт $k = \frac{\sqrt{f_{2П} \cdot f_{1П}}}{f_{2П} - f_{1П}}$, де $f_{1П}$ і $f_{2П}$ – границі смуги пропускання [6].

Розглянемо на прикладі перетворення фільтрів. На рис. 1.45, а представлена схема ненавантаженого ФНЧ без втрат. Комплексна передавальна функція напруги цього чотирьохполюсника запишеться як:

$$\begin{aligned} \dot{H}_{uu} &= \frac{\dot{U}_2}{\dot{U}_1} = \frac{Z_C}{Z_C + Z_L} = \frac{1}{1 + \frac{Z_L}{Z_C}} = \\ &= \frac{1}{1 + j\omega L \cdot j\omega C} = \frac{1}{1 - \omega^2 LC}. \end{aligned}$$

На підставі формули $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ зробимо заміну $LC = \frac{1}{\omega_0^2}$, де ω_0 – резонансна частота LC-контуру. Виконавши подальші перетворення, одержимо:

$$\dot{H} = H = \frac{1}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2} = \frac{1}{1 - \Omega^2},$$

де $\Omega = \frac{\omega}{\omega_0}$ – нормована частота. Графік АЧХ

$|H| = \left| \frac{1}{1 - \Omega^2} \right|$ за цим виразом має вигляд рис. 1.45, б.

Замінімо елементи фільтра рис. 1.45, а на дуальні ($L \leftrightarrow C$), одержимо схему рис. 1.46, а. Комплексну передавальну функцію напруги цього кола можна записати так:

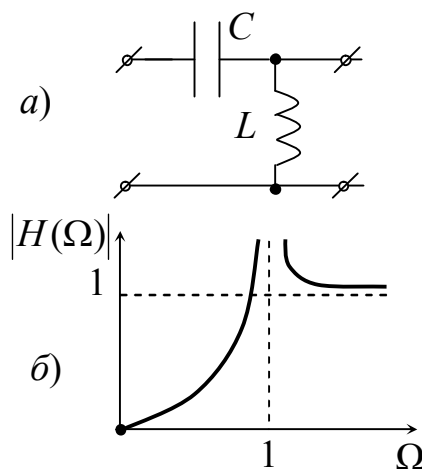


Рисунок 1.46 – ФВЧ:
 а – схема;
 б – частотна характеристика

$$\begin{aligned} \dot{H}_{uu} &= \frac{\dot{U}_2}{\dot{U}_1} = \frac{Z_L}{Z_C + Z_L} = \frac{1}{1 + \frac{Z_C}{Z_L}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{j\omega L \cdot j\omega C}} = \frac{1}{1 - \frac{1}{\omega^2 LC}} = \frac{1}{1 - \left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2} = \frac{1}{1 - \frac{1}{\Omega^2}}. \end{aligned}$$

Частотна характеристика АЧХ $|H| = \left| 1 / \left(1 - \frac{1}{\Omega^2} \right) \right|$ має вигляд рис. 1.46, б.

Порівнюючи графіки рис. 1.45, б і 1.46, б, бачимо, що вони симетричні щодо нормованої частоти $\Omega = 1$.

Рекомендуємо самостійно виконати вправи, перетворюючи фільтри за допомогою табл. 1.1.

1.5 Коректування лінійно спотворених сигналів

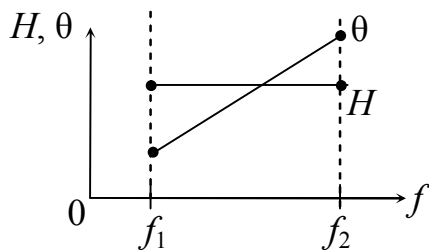


Рисунок 1.47 – Характеристики тракту передачі, не спотворюючого сигнал

У процесі передачі по телекомунікаційних каналах сигнали, як правило, перетерплюють спотворення. При цьому можуть змінюватися форма, амплітуда. Будь-яка фізична лінія має у схемі заміщення елементи R , L , C , а це значить, що лінія має вибірні властивості. Умовами неспотвореної передачі сигналів

(ми розглядали раніше) є постійна АЧХ ($H = \text{const}$) і лінійна фаза $\theta = 2\pi f t_0$ (рис. 1.47). Якщо порушуються ці умови, сигнал перетерплює спотворення. Наприклад, якщо коефіцієнт передачі каналу $H(f)$ у діапазоні $(f_1 \dots f_2)$ змінюється, то сигнал спотворюється за амплітудою, а якщо фазова характеристика каналу нелінійна, то мають місце фазові спотворення сигналів.

Раніше (у модулі 3) розглядалися кола, що містять елементи RL , RC . У них імпульси, що мають П-подібну форму на вході кола перетворилися в експонентні імпульси на виході. Щоб передати сигнали по існуючих каналах, необхідно тракт, по якому передаються сигнали, виконати таким чином, щоб коефіцієнт передачі й фазова характеристика були в нормі (максимально гладкими). Тому каскадно з трактом, що спотворює, підключають пристрої, що виправляють АЧХ і ФЧХ (рис. 1.48): амплітудні коректори (АК) або амплітудні вирівнювачі й фазові коректори (ФК) або фазообертачі.

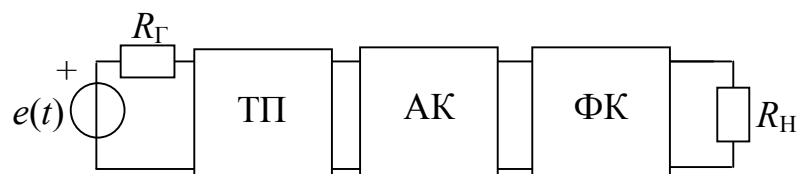


Рисунок 1.48 – Включення коректорів у тракт передачі

1.5.1 Амплітудні коректори

Пасивні амплітудні коректори являють собою схему Т перекритого чотириполюсника (рис. 1.49), в якого два плеча Z_1 і Z_2 – двополюсники з реактивними елементами, а два інших плеча – резистивні.

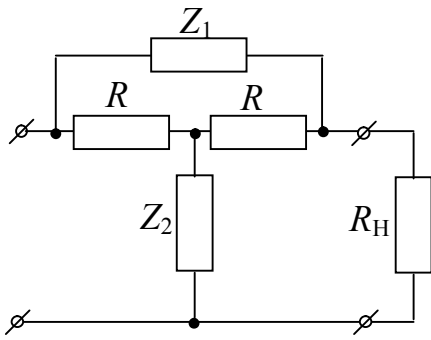


Рисунок 1.49 – Схема заміщення навантаженого амплітудного коректора

Необхідними й достатніми умовами для коректорів амплітуд є:

- 1) $Z_1 \cdot Z_2 = R^2$ – двополюсники повинні бути зворотними;
- 2) $Z_{ВХ} = R_H = R$ – навантаження коректора повинно бути таким, за якого вхідний опір „повторює” опір навантаження.

Загасання коректора в цьому випадку можна розрахувати за формулою

$$A_K = 20 \lg \left(1 + \frac{|Z_1|}{R} \right), \text{ дБ.} \quad (1.40)$$

З формули видно, що загасання A_K залежить від модуля опору плеча $|Z_1|$. Якщо загасання тракту передачі $A_{ТП}$ зі зростанням частоти збільшується, то загасання коректора $A_{АК}$ необхідно підібрати таким, щоб сума ($A_{ТП} + A_{АК}$) у діапазоні спектра сигналу практично залишалася постійною величиною. Це можна записати так:

$$H_{ТП} = 10^{-\frac{A_{ТП}}{20}}, \quad H_{АК} = 10^{-\frac{A_{АК}}{20}},$$

тоді при каскадному з'єднанні ТП і АК

$$H = H_{ТП} \cdot H_{АК} = 10^{-\frac{(A_{ТП} + A_{АК})}{20}}.$$

На рис. 1.50, а зображена схема коректора з плечима Z_1 і Z_2 , а на рис. 1.50, б зображені частотні характеристики загасань цього коректора й передбачуваного тракту передачі, а також сумарного їхнього значення в діапазоні частот $(f_1 \div f_2)$.

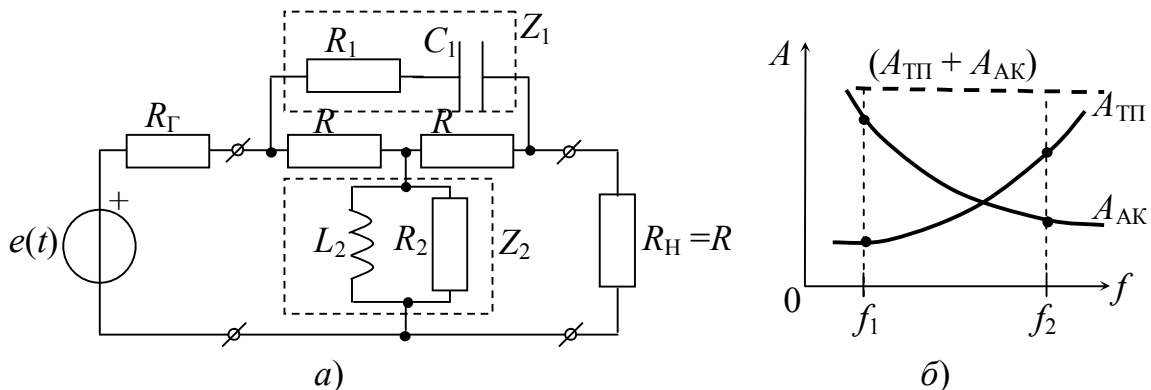


Рисунок 1.50 – Коригування амплітудно-частотних спотворень:
 а – схема навантаженого коректора;
 б – графіки загасань ТП, АК та їх каскадного з'єднання

Розглянемо деякі етапи розрахунку амплітудного коректора. При проектуванні АК виходять із загасання тракту передачі $A_{ТП}$ (рис. 1.51) у діапазоні частот каналу або групи каналів ($f_1 \div f_2$), загасання якого необхідно коректувати. На цьому ж графіку проводять лінію A_{Σ} – постійна величина, що є бажаною характеристикою всього тракту після корекції. Від постійного загасання A_{Σ} необхідно відняти загасання $A_{ТП}$ ($A_{\Sigma} - A_{ТП}$) – ця різниця буде A_K – загасанням коректора. Далі необхідно синтезувати двополюсник Z_1 амплітудного коректора таким чином, щоб за формулою (1.40) можна було розрахувати задану характеристику A_{AK} . Вивчивши матеріал за темою „двополюсники” (аналіз і синтез) можна зобразити будь-які варіанти схем. Наприклад, якщо графік загасання представлений монотонною кривою (зростає або спадає), то плечі Z_1 і Z_2 містять по одному реактивному елементу L_1 і C_2 (C_1 і L_2). Якщо графік має точку перегину, то плече Z_1 (Z_2) містить LC контур і т. ін. На рис. 1.52, а зображений графік загасання коректора. Виходячи з формули (1.40) доходимо того, що графік модуля опору плеча Z_1 має такий самий характер.

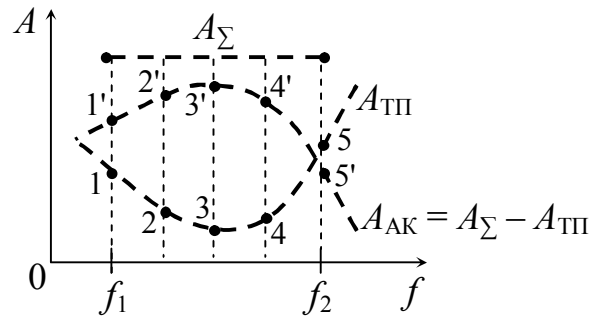


Рисунок 1.51 – Процес підбору загасання коректора

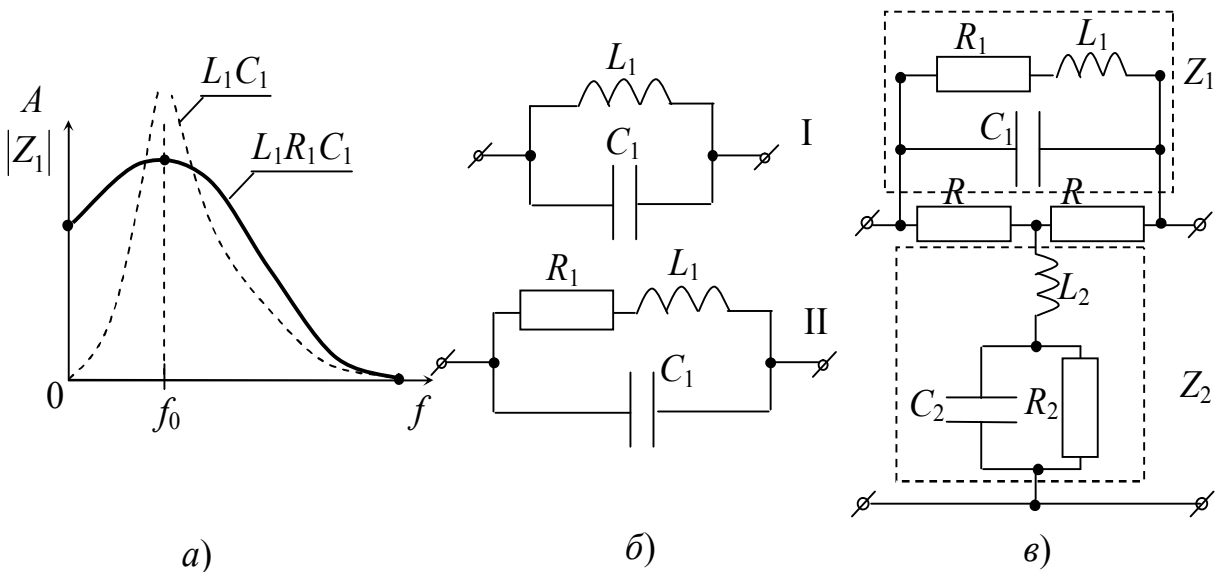


Рисунок 1.52 – Підбір плечей Z_1 і Z_2 АК за заданим загасанням A_{AK} :

а – графіки $A(f)$ і $|Z_1|(f)$; б – підбір плеча Z_1 ;

в – схема АК з заданим загасанням

1.5.2 Фазові коректори

Фазові коректори (ФК) являють собою також мостові схеми, плечі Z_1 і Z_2 яких – реактивні двополюсники $\pm jX_1$ й $\mp jX_2$.

Схеми фазових коректорів повинні відповідати умовам:

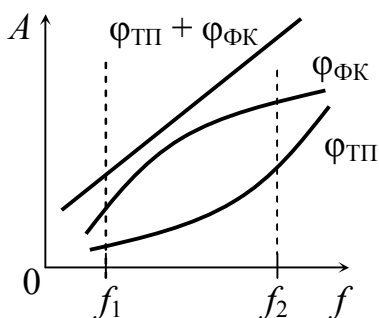


Рисунок 1.53 – Принцип коректування фази

1) $Z_1 \cdot Z_2 = R^2$ – двополосники повинні бути зворотними, тому вхідний опір ФК – постійна величина $R_{BX} = R = R_H$;

2) $A_{ФК} = \text{const}$ – загасання ФК постійне в діапазоні частот коректування.

Результат роботи ФК полягає у тому, щоб нелінійну залежність фази тракту передачі зробити лінійною (рис. 1.53) $\varphi_{ТП} + \varphi_{ФК} = 2\pi f t_0$.

На практиці коректують не фазу, а груповий час пробігу сигналу (ГЧП)

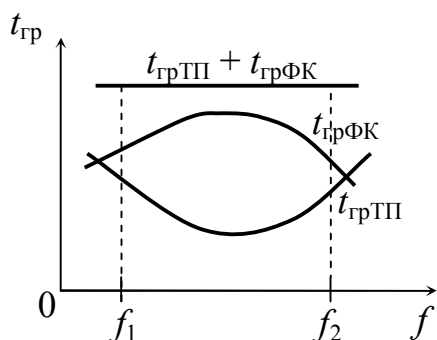


Рисунок 1.54 – Графіки ГЧП у діапазоні частот $f_1 \dots f_2$

$$t_{гр} = t_0 = -\frac{d\varphi(\omega)}{d\omega} = -\frac{d\theta}{d\omega}$$

Якщо фазова характеристика лінійна, то графік $t_{гр}$ – пряма лінія паралельна осі частот, постійна величина. Всі складові сигналу проходять тракт передачі від входу до виходу за той самий час. Тому графік $t_{гр}$ тракту передачі ФК має вигляд рис. 1.54. На рис. 1.55, б і в зображені схеми фазових коректорів.

Фазовий коректор рис. 1.55, б називають фазовим контуром першого роду. Він може змінювати фазу сигналу від 0 до π , при зміні частот від 0 до ∞ .

Розрахувати ГЧП такої схеми можна за формулою

$$t_{гр} = \frac{2 \frac{R}{L_1}}{(2\pi f)^2 + \left(\frac{R}{L_1}\right)^2},$$

де L_1 – величина індуктивності плеча Z_1 ;

$$R - \text{коефіцієнт оберненості } Z_1 \cdot Z_2 = j\omega L_1 \frac{1}{j\omega C_1} = \frac{L_1}{C_1} = R^2;$$

f – поточна частота.

Фазовий коректор (рис. 1.55, в) називають фазовим контуром другого роду. Він може змінювати фазу сигналу в межах від 0 до 2π , при зміні частоти від 0 до ∞ .

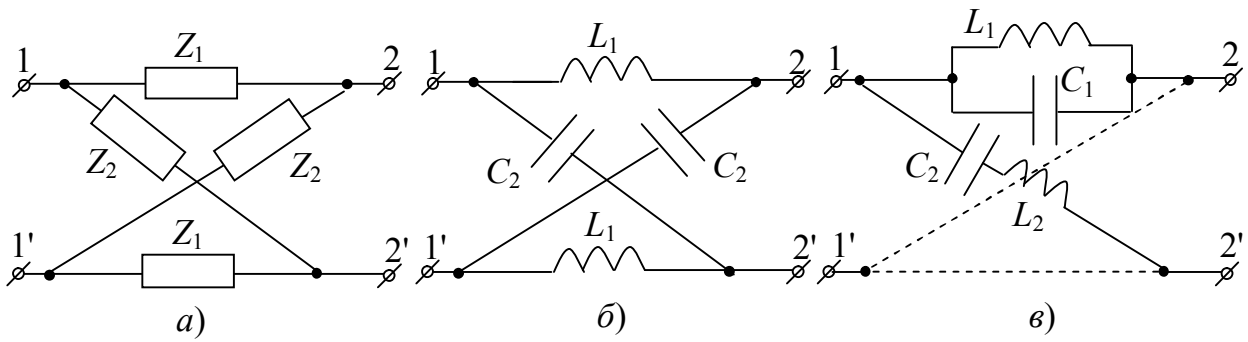


Рисунок 1.55 – Схеми фазових коректорів:
a – схема заміщення; *б* – фазовий контур першого роду;
в – фазовий контур другого роду

Груповий час пробігу такого коректора визначається за формулою

$$t_{гр} = \frac{2 \left[(2\pi f)^2 + \frac{1}{L_1 C_1} \right]}{RC_1 \left[(2\pi f)^2 - \frac{1}{L_1 C_1} \right] + \frac{(2\pi f)^2}{RC_1}},$$

де L_1, C_1 – величини елементів плеча Z_1 ;
 f – поточна частота;
 R – коефіцієнт оберненості.

У цей час в апаратурі телекомунікацій застосовують коректори, параметри яких змінюються швидко й автоматично при зміні параметрів тракту передачі. При цьому передана інформація не переривається [7].

2 Перетворення дискретних сигналів

2.1 Теорема відліків і її застосування

Основою сучасної телекомунікації є передача інформації за допомогою цифрових сигналів. Теоретичною основою цифрової обробки сигналів (ЦОС) є **теорема відліків (Котельникова)**. При вивченні систем ЦОС необхідно освоїти теоретичні основи дискретних сигналів і дискретних кіл, їхнього опису, методи аналізу й синтезу.

Математичні описи аналогових сигналів у різних областях (часовій, частотній, операторній) розглядаються в аналоговій теорії кіл. Загальний підхід до розгляду дискретних сигналів і дискретних кіл зберігається й за цифровою обробки сигналів. Сигнал, функція $x(t)$ якого безперервна, називається **аналоговим**. При передаванні аналогових сигналів по телекомунікаційних каналах виникає низка проблем: погана завадостійкість, частотні спотворення й ін. Цифрові сигнали мають багато переваг перед аналоговими сигналами. Більшість аналогових сигналів можна перетворити у цифрові. За допомогою

теорему відліків доведено, що безперервний сигнал, з обмеженим спектром, повністю визначається своїми миттєвими значеннями, відлікованими через інтервал часу $T_d \leq \frac{1}{2f_b}$, де f_b – найвища частота спектра аналогового сигналу.

Наприклад, телефонний канал обмежений спектром і в нього $f_b \approx 4$ кГц. Для цього сигналу період відліку (період дискретизації) визначається $T_d \leq \frac{1}{2 \cdot 4 \cdot 10^3} = 0,125 \cdot 10^{-3}$ с або $f_d \geq \frac{1}{T_d} \geq 2f_b \geq 8$ кГц, де f_d – частота дискретизації (тактова частота). На рис. 2.1, а зображена функція $x(t)$, квантована за часом T . На рис. 2.1, б зображений дискретний сигнал $x(n)$, що вийшов у результаті дискретизації. Цей сигнал представляє сукупність відліків.

Будь-який дискретний сигнал $x(n)$ отриманий, виходячи з вимог теореми відліків, може бути відновлений, тобто перетворений у сигнал $x(t)$. Для доказу цього проводять розкладання функції з обмеженим спектром у ряд Котельникова, виду [8]:

$$x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} x(nT_d) \left| \frac{\sin \omega_b (t - nT_d)}{\omega_b (t - nT_d)} \right|, \quad (2.1)$$

де $\omega_b = 2\pi f_b$ – максимальна частота спектра сигналу;

T_d – період дискретизації;

$n = 0, 1, 2, \dots$ – номери відліків.

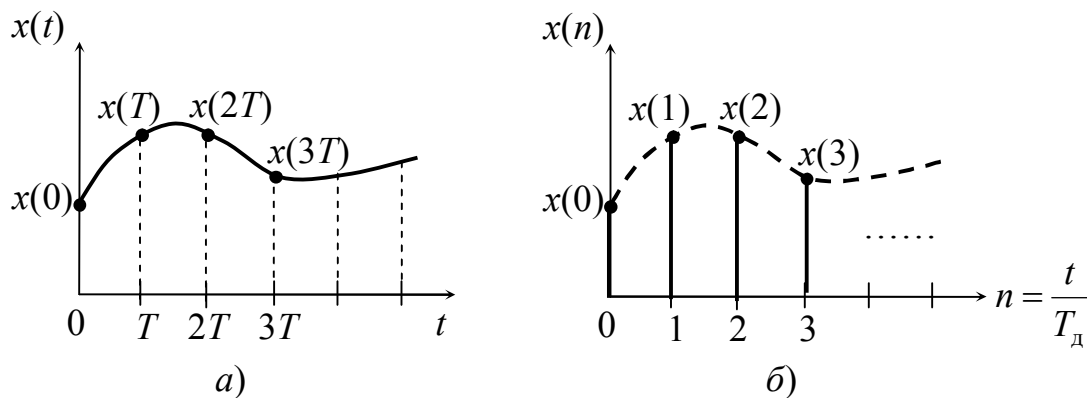


Рисунок 2.1 – Перетворення аналогового сигналу:
а – аналоговий сигнал; б – дискретний сигнал

Існують й інші модифікації запису ряду (2.1) [3].

Розглянемо наглядний доказ справедливості теореми відліків [3]. Функція $\frac{\sin x}{x}$ описує спектр прямокутного відеоімпульсу (рис. 2.2).

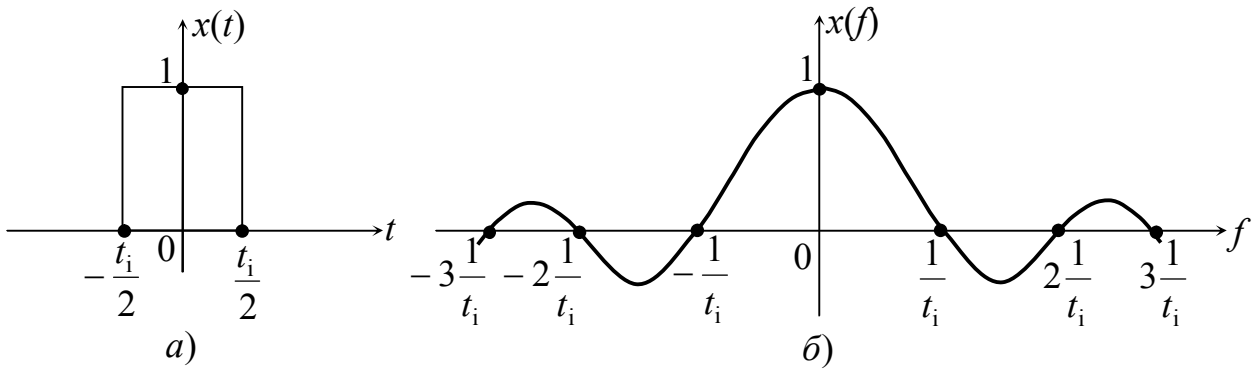


Рисунок 2.2 – П-подібний сигнал (відеоімпульс) (а) і його спектр (б)

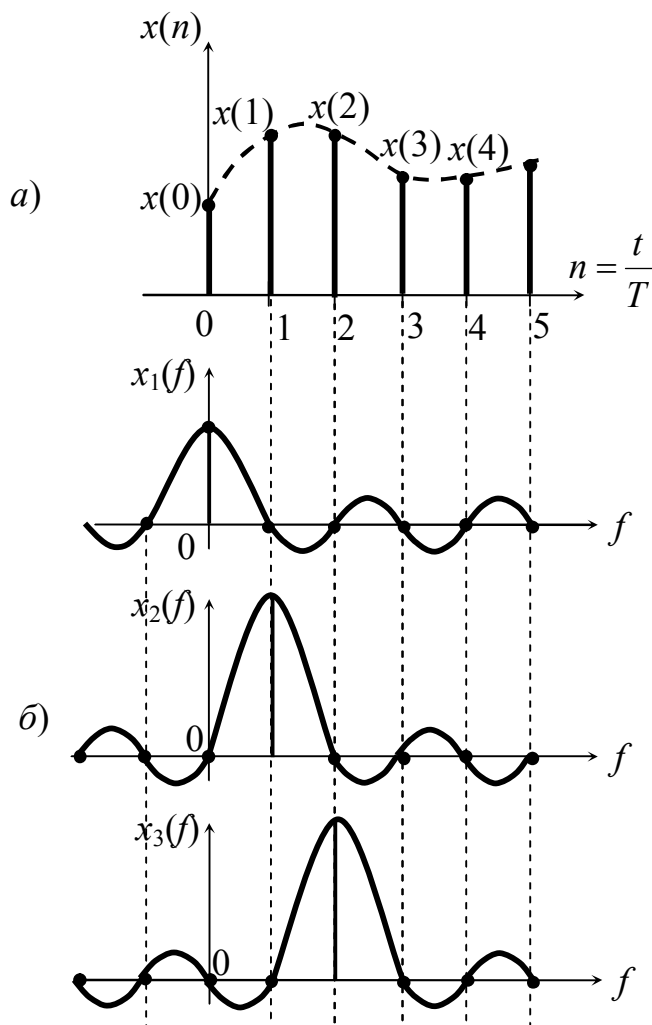


Рисунок 2.3 – Відновлення дискретного сигналу:

а – дискретні відліки;
б – спектри відліків

Кожний відлік дискретного сигналу – це імпульс, його спектр подібний до спектра рис. 2.2, б. Максимальне значення у точці відліку збігається зі значенням аналогового сигналу. Кожний наступний спектр буде зрушений на один такт. Якщо тепер скласти спектри всіх відліків, то вийде спектр вихідного сигналу $x(t)$. У процесі дискретизації величини відліків виходять дійсними числами й не завжди цілими. Тому діють у такий спосіб: округляють дійсні значення величин у бік збільшення або зменшення до найближчого значення так званої квантованої величини. Ця операція називається **квантуванням дискретного сигналу за рівнем**. Шкала величин, що при цьому застосовується, називається **кроком квантування ΔU** (рис. 2.4). Різниця дійсних значень величин відліків і «округлених» називається **помилкою квантування або шумом квантування** (рис. 2.4).

На рис. 2.5 представлена структурна схема передачі сигналу. Аналоговий широкосмуговий сигнал $x_{ш}(t)$ надходить до аналогового фільтру (АФ), що обмежує спектр до необхідного діапазону $x_0(t)$. Далі аналоговий сигнал з обмеженим спектром надходить на

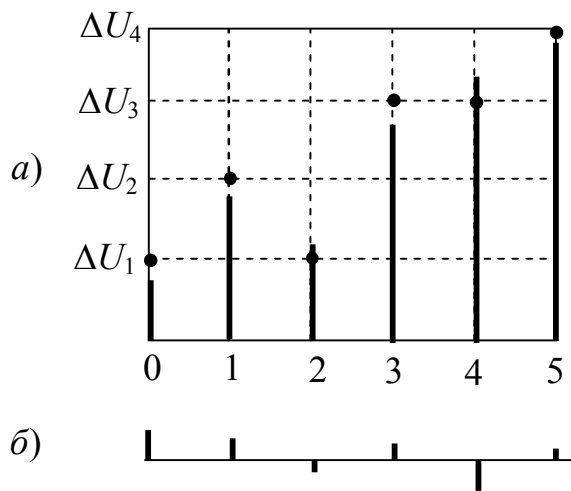


Рисунок 2.4 – Квантування дискретного сигналу за рівнями:
a – квантований сигнал;
б – помилка квантування

аналогово-цифровий перетворювач (АЦП), в якому відбувається: дискретизація (Д), квантування (Кв) і кодування (Кд). Кодований сигнал $x_{ц}(t)$ це вже цифровий сигнал, тому що кожному відліку відповідає цифра. Слід зазначити, що способів кодування сигналів безліч, їхня кількість з часом збільшується. Цифровий сигнал надходить на процесор, де відбувається його остаточне оброблення. Далі сигнал (ЦС) передається по каналу. На приймальному кінці сигнал перетвориться в цифро-аналоговому перетворювачі (ЦАП), що містить декодер (ДК), перетворюючи його в

послідовність відліків $x(n)$. Сумарний спектр усіх відліків дуже широкий, тому аналоговий фільтр (АФ) обмежує цей спектр до необхідного діапазону. На виході фільтра виходить аналоговий сигнал $y(t)$ еквівалент тому, що був на вході системи $x(t)$.

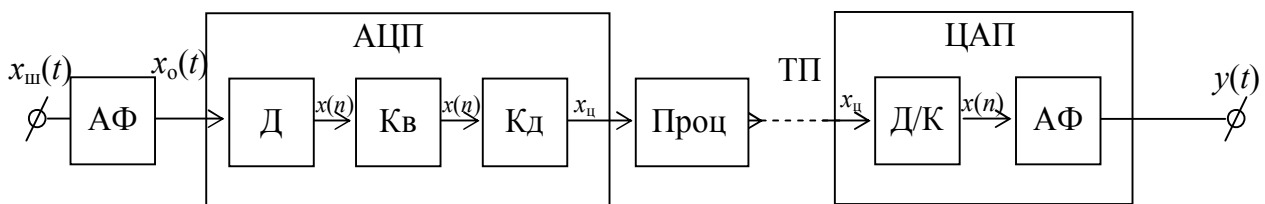


Рисунок 2.5 – Структурна схема передачі сигналу

2.2 Типові дискретні сигнали в часовій області

При аналізі аналогових сигналів була розглянута низка типових сигналів, таких як сигнал виду дельта-функції $\delta(t)$, сигнал виду східчастої функції $1(t)$, експонентний, гармонічний та ін. У теорії дискретних сигналів також є низка типових (стандартних) відліків.

Одиничний дискретний імпульс (ОДІ), дискретний відлік позначається $\delta(n)$ і визначається в такий спосіб:

$$\delta(n) = \begin{cases} 1, & n = 0, \\ 0, & n \neq 0. \end{cases}$$

Графічне зображення ОДІ показано на рис. 2.6, *a*. Імпульс може бути зміщений на k кроків (тактів) вліво або вправо, тоді його позначають $\delta(n - k)$ і визначається він як:

$$\delta(n-k) = \begin{cases} 1, & n = k, \\ 0, & n \neq k. \end{cases}$$

Графічне зображення в цьому випадку представлено на рис. 2.6, б і в.

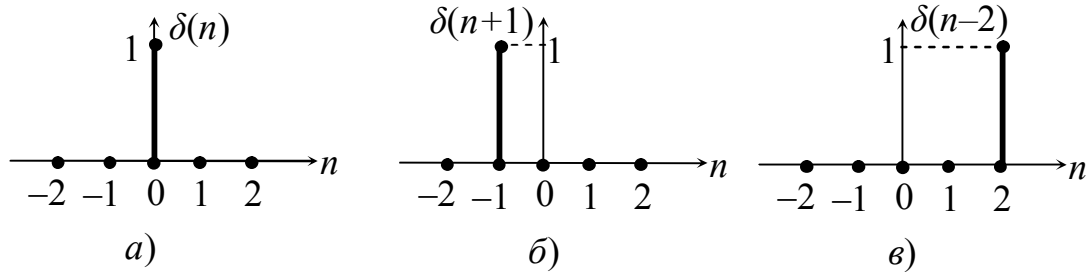


Рисунок 2.6 – Одиничні дискретні імпульси:
a – не зміщений; *б* – зміщений вліво на один такт;
в – зміщений вправо на два такти

На підставі властивостей одиничного дискретного імпульсу ($x(n) \cdot \delta(n-k) = x(k)$) можна синтезувати будь-яку дискретну послідовність. Наприклад: (2; 1,5; 0,5): $x(0) = 2$; $x(1) = 1,5$; $x(2) = 0,5$.

$$\begin{aligned} x(n) &= x(0) \cdot \delta(n) + x(1) \cdot \delta(n-1) + x(2) \cdot \delta(n-2) = \\ &= 2 \cdot \delta(n) + 1,5 \cdot \delta(n-1) + 0,5 \cdot \delta(n-2). \end{aligned}$$

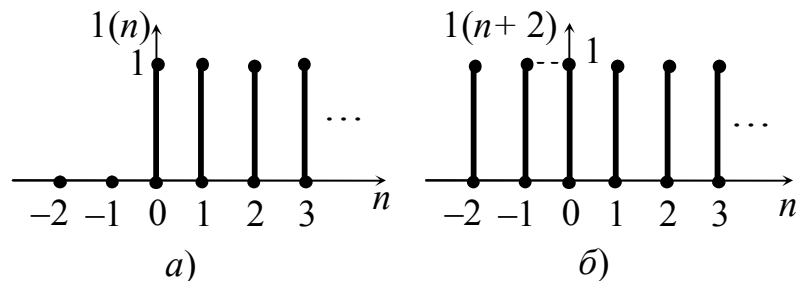
Для довільного дискретного сигналу $x(n)$ можна записати ряд

$$x(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) \cdot \delta(n-k). \quad (2.2)$$

Варто нагадати, що будь-який аналоговий сигнал можна записати за допомогою δ -функції ($\delta(t)$).

Одинична дискретна східчаста послідовність (ОДСП) позначається $1(n)$ і визначається:

$$1(n) = \begin{cases} 1, & n \geq 0, \\ 0, & n < 0. \end{cases}$$



На рис. 2.7, *a* зображена ОДСП, а на рис. 2.7, *б* зміщена ОДСП $1(n+2)$ при $k = -2$.

Послідовність $1(n)$ пов'язана з $\delta(n)$ рівностями:

Рисунок 2.7 – Одинична дискретна східчаста послідовність:

a – без зміщення;
б – зміщена вліво на два такти

$$1(n) = \delta(n) + \delta(n-1) + \delta(n-2) + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \delta(n-k),$$

$$\text{а } \delta(n) = 1(n) - 1(n-1).$$

Дискретні гармонічні послідовності – це дискретна косинусоїда й дискретна синусоїда.

Дискретна косинусоїда (Д cos) утвориться з аналогової $\cos \omega t$ при дискретизації з кроком T_d . На рис. 2.8 зображений процес одержання дискретної косинусоїди:

$$\cos \omega t = \cos \frac{2\pi}{T} t = \cos \frac{2\pi t}{8T_d} = \cos \frac{\pi}{4} n,$$

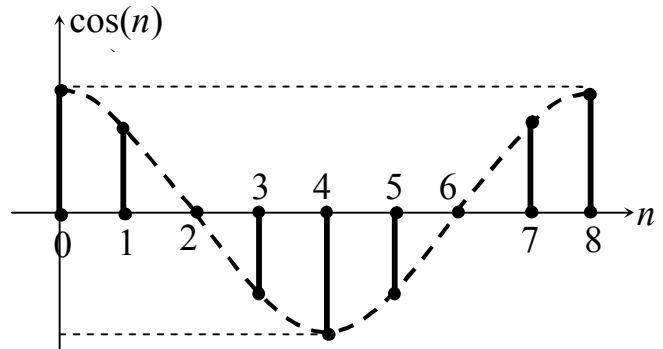


Рисунок 2.8 – Дискретна косинусоїда
 $T = 8T_d$

де період аналогової косинусоїди T розбитий на 8 частин, тобто $T = 8 T_d$. У загальному вигляді для косинусоїди з будь-яким періодом це можна записати в такий спосіб:

$$\cos \omega t = \cos \frac{2\pi t}{NT_d} = \cos \frac{2\pi}{N} \cdot \frac{t}{T_d} = \cos \Omega n,$$

де $\Omega = \frac{2\pi}{N}$ – нормована дискретна частота з розмірністю в радіанах і періодом 2π ;

n – відліки.

Дискретну косинусоїду так само як і дискретну синусоїду розглядають у діапазоні $(0; 2\pi)$ або $(-\pi; +\pi)$. На рис. 2.8 зображена дискретна косинусоїда $\cos \Omega n$, де $\Omega = \pi/4$.

Дискретна східчаста послідовність (ДСП) визначається

$$x(n) = \begin{cases} a^n, & n \geq 0, \\ 0, & n < 0. \end{cases}$$

На рис. 2.9 зображена ДСП при різних значеннях основи a (початковий рівень відліку).

Дискретна комплексна експонентна послідовність (ДКЕП) визначається як:

$$x(n) = e^{j\Omega n} = \cos \Omega n + j \sin \Omega n.$$

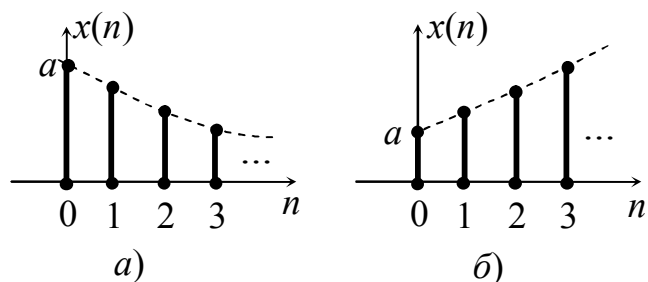


Рисунок 2.9 – Дискретна східчаста послідовність:

a – основа $|a| < 1$; b – основа $|a| > 1$

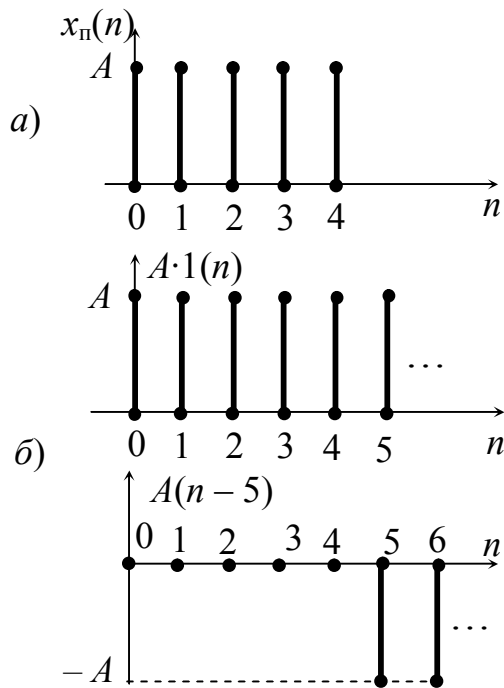


Рисунок 2.10 – Дискретна прямокутна послідовність:
 а – ДПП;
 б – східчасті, зсунуті різнополярні послідовності

Слід зазначити, що ДКЕП періодична функція за частотою з періодом 2π .

Дискретну прямокутну послідовність (ДПП) можна представити в такий спосіб:

$$x_n(n) = A \cdot 1(n) - A(n - m),$$

де m – число вибірок у прямокутній послідовності.

На рис. 2.10 зображена ДПП, де $m = 5$; A – рівень відліку.

2.3 Дискретні кола, їх опис у часовій області

Дискретне коло (ДК) – це пристрій, що перетворює сигнал у вигляді послідовності відліків $x(n)$ у сигнал з послідовністю відліків $y(n)$ рис. 2.11. На цьому рисунку $x(n)$ – дискретний вплив, а $y(n)$ – дискретний



Рисунок 2.11 – Функціональна схема дискретного кола

відгук. Процес перетворення можна записати як оператор $y(n) = T[x(n)]$. Розглядають дискретні кола з такими властивостями:

- дискретне коло повинно бути лінійним, підлягати принципу накладання (сума відгуків дорівнює сумі впливів);
- якщо затримка впливу на n_3 тактів

приводить до затримки відгуку на те ж число тактів, то таке коло називають **інваріантним** до зсуву, тобто якщо вплив $x(n - n_3)$, то відгук $y(n - n_3)$.

Дискретні кола складаються із трьох елементів (рис. 2.12). Всі елементи односпрямовані.

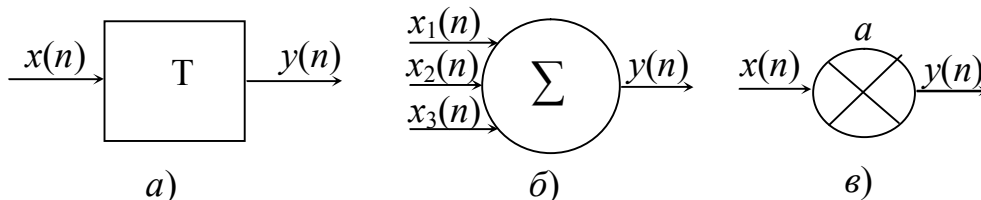


Рисунок 2.12 – Елементи дискретних кіл:
 а – елемент затримки (Т); б – суматор (Σ);
 в – помножувач (а)

У табл. 2.1 наведені рівняння, що описують дискретні елементи.

Таблиця 2.1 – Опис дискретних елементів

	Елементи дискретних кіл	Рівняння елементів
1	Елемент затримки	$y(n) = x(n - 1)$
2	Суматор	$y(n) = \sum_{k=1}^N x_k(n)$
3	Помножувач	$y(n) = a \cdot x(n)$

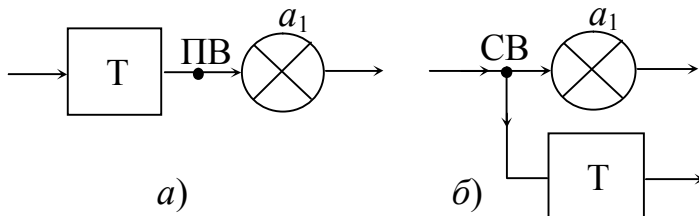


Рисунок 2.13 – З'єднання дискретних елементів:
a – за допомогою простого вузла (ПВ);
б – за допомогою складного вузла (СВ)

Елементи можуть з'єднуватися між собою за допомогою простого (рис. 2.13, *a*) і складного (рис. 2.13, *б*) вузлів відповідно. При цьому, до будь-якого вузла підходить тільки одна гілка, а виходити може безліч.

дискретне коло (ДК), в якому з'єднані дискретні елементи (ДЕ).

Запишемо рівняння цього кола. По верхній гілці на суматор надходить сигнал $a_0 \cdot x(n)$, по нижній гілці на суматор надходить сигнал $a_1 \cdot x(n - 1)$. У такий спосіб можна записати:

$$y(n) = a_0 \cdot x(n) + a_1 \cdot x(n - 1).$$

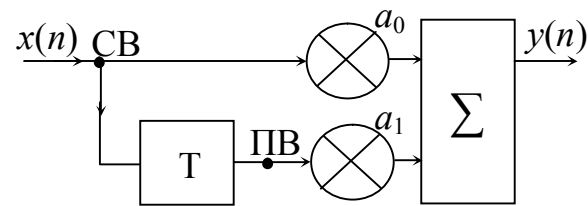


Рисунок 2.14 – Дискретне коло

Рівняння дискретного кола рис. 2.15 можна записати в такий спосіб:

$$y(n) = a_0 \cdot x(n) + a_1 \cdot x(n - 1) + a_2 \cdot x(n - 2) + \dots + a_m \cdot x(n - m),$$

або

$$y(n) = \sum_{m=0}^M a_m \cdot x(n - m). \tag{2.3}$$

Маючи рівняння (2.3) неважко зобразити дискретне коло. У рівнянні (2.3) M – порядок кола (кількість елементів зсуву).

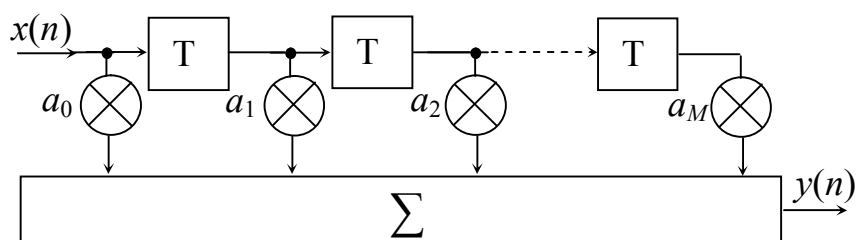


Рисунок 2.15 – Загальний вигляд дискретного кола у часовій області

Становить інтерес дискретне коло, в якому відгук піддається таким

же перетворенням, що й вплив – коло зі зворотним зв'язком. Таке коло зображене на рис. 2.16. Рівняння цього кола записується відповідно:

$$y(n) = \sum_{m=0}^M a_m \cdot x(n-m) + \sum_{k=1}^K b_k \cdot y(n-k). \quad (2.4)$$

Рівняння (2.3) і (2.4) носять назви **різницевих рівнянь**. Коло рис. 2.15 називають **нерекурсивним фільтром**, а коло рис. 2.16 – **рекурсивним фільтром**.
Більш докладно про класичну теорію різницевих рівнянь можна знайти у відповідному розділі математики [9].

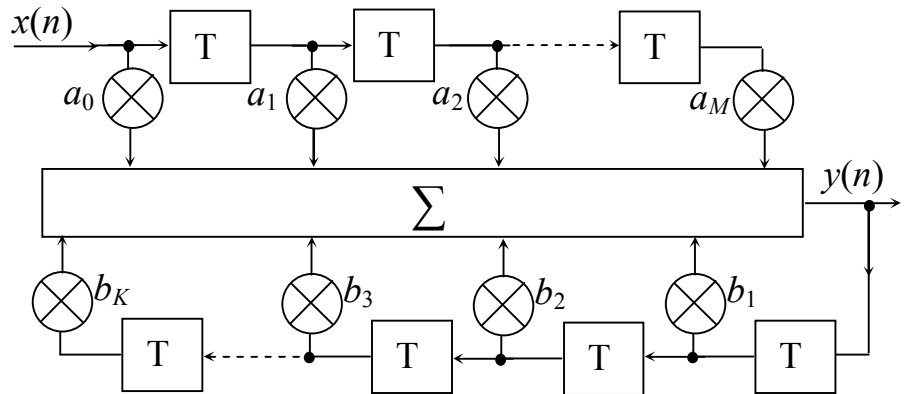


Рисунок 2.16 – Дискретне коло зі зворотним зв'язком

2.4 Часові функції дискретних кіл. Дискретна згортка

Завданням аналізу дискретних кіл є знаходження дискретного відгуку на будь-який дискретний вплив. Нагадаємо, що в аналогових колах для аналогічного завдання, використовувалася імпульсна функція кола $g(t)$ (відгук на сигнал у вигляді дельта функції $\delta(t)$).

Дискретною імпульсною функцією $g(n)$ (ДІФ) називається відгук дискретного кола $y(n)$ на вплив у вигляді одиничного дискретного імпульсу $\delta(n)$ (ОДІ): $g(n) = y(n)|_{x(n)=\delta(n)}$. Використовуючи вираз (2.2) і вираз ДІФ можна записати відгук $y(n)$ на будь-який дискретний вплив $x(n)$.

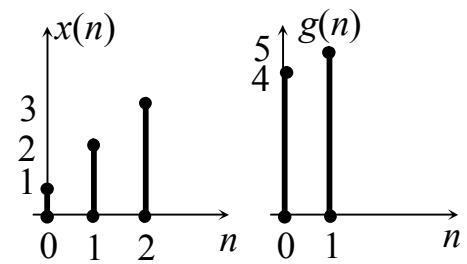
$$\left. \begin{aligned} y(n) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) \cdot g(n-k) \\ &\text{або} \\ y(n) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} g(k) \cdot x(n-k) \end{aligned} \right\} \quad (2.5)$$

Вирази (2.5) називаються **дискретною згорткою (ДЗ)**, короткий запис якої виглядає так:

$$y(n) = x(n) * g(n).$$

Приклад. Обчислити дискретну згортку $y(n)$ двох числових послідовностей $x(n)$ і $g(n)$: $x(n) = \{1, 2, 3\}$ і $g(n) = \{4, 5\}$.

Рішення. Для рішення можна скористатися безпосередньо формулою (2.5), як це зроблено в [10]. Другий варіант рішення цього прикладу використовує алгоритм, наведений нижче (табл. 2.2).



Таблиця 2.2 – Алгоритм знаходження згортки

$x(n) \backslash g(n)$	0	$x(0)$	$x(1)$	$x(2)$			$y(n)$
$g(0) \rightarrow$	5	4					$y(0) = 4$
$g(1) \rightarrow$	0	5	4				$y(1) = 5 + 8 = 13$
$g(2) \rightarrow$	0	0	5	4			$y(2) = 10 + 12 = 22$
$g(3) \rightarrow$	0	0	0	5	4		$y(3) = 15$
$g(4) \rightarrow$	0	0	0	0	5	4	$y(4) = 0$

У такий спосіб $y(n) = \{4, 13, 22, 15\}$. Можна стверджувати, що дискретна згортка – це сума добутоків двох дискретних послідовностей, виконаних за певного алгоритму.

2.5 Дискретні сигнали в операторній області, z-перетворення

Відомо, що аналоговий сигнал, описаний у вигляді функції $x(t)$ можна перетворити в операторну функцію $X(p)$. Зворотне перетворення також можливо. У такий спосіб для аналогових сигналів існує пара перетворень Лапласа $x(t) \Leftrightarrow X(p)$.

Дискретне перетворення Лапласа (ДПЛ) послідовності $x(n)$ позначається $L[x(n)]$ або $X_L(n)$.

Пряме дискретне перетворення Лапласа послідовності $x(n)$ записується:

$$X_L(n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-pn}, \quad (2.6)$$

де $p = \sigma + j\omega$ – комплексна частота.

Зворотне дискретне перетворення Лапласа теж можливо, і воно записується:

$$x(n) = \frac{1}{2\pi j} \int_{-\infty}^{\infty} X_L(p)e^{pn} dp.$$

Якщо покласти, що $1 \cdot e^{pn} = 1 \cdot e^p \Big|_{n=1} = x + jy = z$, то рівняння (2.6) можна записати

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n} . \quad (2.7)$$

Це рівняння називається **прямим z-перетворенням** послідовності $x(n)$, де z – комплексна змінна.

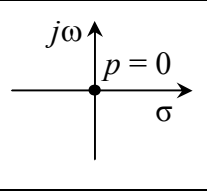
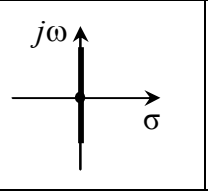
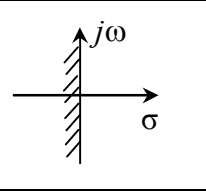
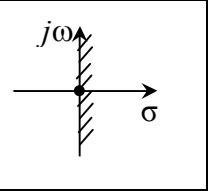
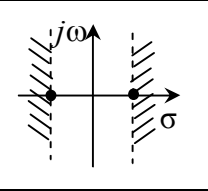
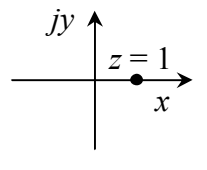
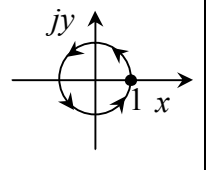
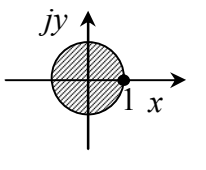
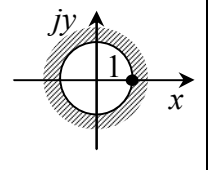
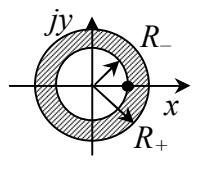
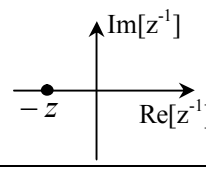
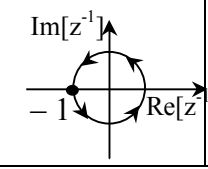
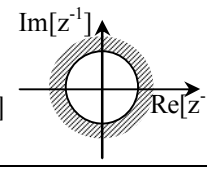
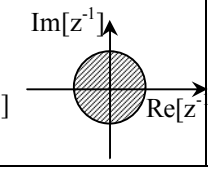
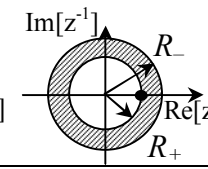
Існує зворотне дискретне z-перетворення:

$$x(n) = \frac{1}{2\pi j} \oint_{C_1} X(z)z^{n-1} dz . \quad (2.8)$$

Контурний інтеграл по замкнутому контуру C_1 в області збіжності функції $X(z)$ в z -площині, на практиці рідко використовується. Вираз (2.7) являє собою ряд Лорана, тому теорія рядів застосована до z -перетворення [11].

Між перетворенням Лапласа й z -перетворенням існує зв'язок. У табл. 2.3 наведені відповідності значень операторів p і z у двох площинах.

Таблиця 2.3 – Фрагменти відповідності двох площин p і z

p - площина $p = \sigma + j\omega$					
z - площина $z = x + jy$					
z^{-1} - площина					

Дискретне z -перетворення має низку властивостей. Зупинимося на деяких, які нам знадобляться надалі.

Властивість лінійності. Якщо відлікам $x_1(n)$, $x_2(n)$... $x_k(n)$ відповідають z -перетворення $x_1(n) \Leftrightarrow X_1(z)$; $x_2(n) \Leftrightarrow X_2(z)$; ... $x_k(n) \Leftrightarrow X_k(z)$, то сумі відліків відповідає сума z -перетворень:

$$x(n) = [x_1(n) + x_2(n) + \dots + x_k(n)] \Leftrightarrow X(z) = [X_1(z) + X_2(z) + \dots + X_k(z)].$$

Властивість затримки. Відліку $x_2(n) = x_1(n - m)$ відповідає $X_2(z) = X_1(z)z^{-m}$, тобто відліку, затриманому на m тактів відповідає z -перетворення цього відліку $X_1(z)$ помножене на оператор ступеня такту затримки z^{-m} .

Розглянемо на прикладах операцію знаходження z -перетворення дискретних послідовностей.

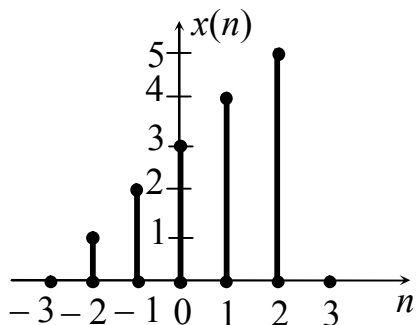


Рисунок 2.17 – Дискретна послідовність

Приклад 1. Знайти z -перетворення послідовності, зображеної на рис. 2.17. Послідовність має кінцеву довжину: $x(-3) = 0$; $x(-2) = 1$; $x(-1) = 2$; $x(0) = 3$; $x(1) = 4$; $x(2) = 5$; $x(3) = 0$.

Згідно з (2.7):

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n} = x(-3)z^3 + x(-2)z^2 + x(-1)z^1 + x(0)z^0 + x(1)z^{-1} + x(2)z^{-2} + x(3)z^{-3} = 1 \cdot z^2 + 2 \cdot z^1 + 3 \cdot z^0 + 4 \cdot z^{-1} + 5 \cdot z^{-2}.$$

Приклад 2. Знайти z -перетворення одиничної дискретної східчастої послідовності $1(n)$:

$$1(n) = \begin{cases} 1, & 0 \leq n; \\ 0, & n < 0. \end{cases}$$

Послідовність нескінченної довжини. Згідно з (2.7) можемо записати:

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n} = z^0 + z^{-1} + z^{-2} + z^{-3} + \dots = 1 + z^{-1} + z^{-2} + z^{-3} + \dots$$

Властивість згортки.

$$y(n) = x(n) * g(n),$$

а

$$Y(z) = X(z) \cdot H(z).$$

2.6 Операторні передавальні функції дискретних кіл

Розглянемо більш загальний випадок для рекурсивного фільтра (рис. 2.16). Загальний вигляд різницевого рівняння записаний в (2.4). Перепишемо його:

$$y(n) = \sum_{m=0}^M a_m x(n-m) + \sum_{k=1}^K b_k y(n-k). \quad (2.9)$$

До рівняння (2.9) застосуємо z-перетворення:

$$Z[y(n)] = Z\left[\sum_{m=0}^M a_m x(n-m) + \sum_{k=1}^K b_k y(n-k)\right].$$

Перетворення z лінійно, отже:

$$\begin{aligned} Z[y(n)] &= Z\left[\sum_{m=0}^M a_m x(n-m)\right] + Z\left[\sum_{k=1}^K b_k y(n-k)\right] = \\ &= \sum_{m=0}^M a_m Z[x(n-m)] + \sum_{k=1}^K b_k Z[y(n-k)]. \end{aligned}$$

У квадратних дужках зміщена послідовність, отже:

$$Z[x(n-m)] = z^{-m} X(z), \text{ а } Z[y(n-k)] = z^{-k} Y(z).$$

Тоді

$$Y(z) = \sum_{m=0}^M a_m z^{-m} X(z) + \sum_{k=1}^K b_k z^{-k} Y(z).$$

Зробимо невеликі перетворення, після чого одержимо:

$$Y(z) \left(1 - \sum_{k=1}^K b_k z^{-k}\right) = \sum_{m=0}^M a_m z^{-m} X(z).$$

Із цього рівняння z-перетворення відгуку $y(n)$ можна записати:

$$Y(z) = X(z) \frac{\sum_{m=0}^M a_m z^{-m}}{1 - \sum_{k=1}^K b_k z^{-k}},$$

а **операторна передавальна функція $H(z)$ (ОПФДК)** (відношення z-зображення відгуку $Y(z)$ до z-зображення впливу $X(z)$) буде мати вигляд:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{m=0}^M a_m z^{-m}}{1 - \sum_{k=1}^K b_k z^{-k}} = \frac{a_0 z^0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_M z^{-M}}{1 - b_1 z^{-1} - b_2 z^{-2} - \dots - b_K z^{-K}}. \quad (2.10)$$

Одержали дрібно-раціональну функцію з речовинними коефіцієнтами a і b . Корені поліному чисельника позначимо $z_{01}, z_{02}, \dots, z_{0M}$, а корені поліному знаменника позначимо $z_{11}, z_{12}, \dots, z_{1K}$.

Останнє рівняння надалі можна перетворити:

$$H(z) = \frac{a_0 (1 - z_{01} z^{-1}) (1 - z_{02} z^{-1}) \dots (1 - z_{0M} z^{-1})}{(1 - z_{11} z^{-1}) (1 - z_{12} z^{-1}) \dots (1 - z_{1K} z^{-1})} =$$

$$= \frac{a_0 (z - z_{01}) (z - z_{02}) \dots (z - z_{0M})}{(z - z_{11}) (z - z_{12}) \dots (z - z_{1K})} = H_0 \frac{\sum_{m=0}^M (z - z_{0m})}{\sum_{k=1}^K (z - z_{1k})}. \quad (2.11)$$

Для нерекурсивного кола операторна передавальна функція буде мати вигляд:

$$H(z) = a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_M z^{-M} = H_0 \sum_{m=0}^M (z - z_{0m}). \quad (2.12)$$

Визначимо операторну передавальну функцію дискретного кола (ОПФДК) рис. 2.12, a (елемента затримки). Рівняння цього елемента в часовій області $y(n) = x(n - 1)$. Застосувавши z -перетворення одержимо

$$Z[y(n)] = Z[x(n - 1)] = z^{-1} X(z),$$

тоді

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = z^{-1}.$$

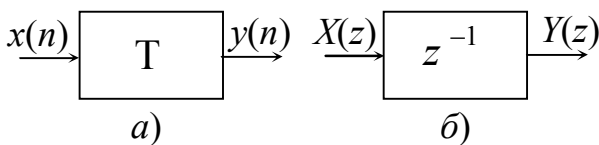


Рисунок 2.18 – Регистр зсуву:
 a – в часовій області;
 b – в операторній області

В операторній формі цей елемент ще називають регістром зсуву, а схему зображують рис. 2.18, b .

Якщо на елемент затримки рис. 2.18, b подається сигнал у вигляді ОДІ $\delta(n)$, то $Z[\delta(n)] = 1$, тобто вплив в z -операторній формі $X(z) = 1$, тоді

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = Y(z) \Big|_{X(z)=1}.$$

У такий спосіб імпульсній функції $g(n)$ дискретного кола (оригіналу) відповідає $H(z)$ в z -області (z -зображення), $g(n) \leftrightarrow H(z)$.

2.7 Дискретні сигнали й функції в частотній області

Перетворення аналогових сигналів завжди пов'язані з перетвореннями Фур'є (ряди, інтеграли). Дискретні сигнали мають зв'язок з z-перетворенням і з перетворенням Фур'є (F):

$$X_{F(e^{j\Omega})} = X(e^{j\Omega}) = X(z) \Big|_{z = e^{-j\Omega}}.$$

У такий спосіб можна записати, що дискретним перетворенням Фур'є (ДПФ) числової послідовності $x(n)$ є:

$$X(e^{j\Omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j\Omega n}. \quad (2.13)$$

Основною й важливою властивістю ДПФ є те, що функція $X(e^{j\Omega})$ послідовності $x(n)$ є безперервною функцією дискретної частоти Ω (див. п. 2.2) і періодичною з періодом 2π . Проілюструємо це ще раз у такий спосіб: для будь-якого цілого k можна записати, що $e^{j(\Omega+2\pi k)} = e^{j\Omega} \cdot e^{j2\pi k} = e^{j\Omega} (\cos 2\pi k + j \sin 2\pi k)$, але тому що $\cos 2\pi k = 1$, а $\sin 2\pi k = 0$, вираз перетворюється в $e^{j\Omega}$.

Розглянемо приклад. Визначимо ДПФ обмеженої послідовності $x(n) = \{1, 1, \dots, 1\}$... Аналітично цю послідовність можна записати так:

$$x(n) = \begin{cases} 0, & n < 0 \text{ і } n > (N-1); \\ 1, & 0 \leq n \leq (N-1), \end{cases}$$

і графічно зобразити рис. 2.19, а.

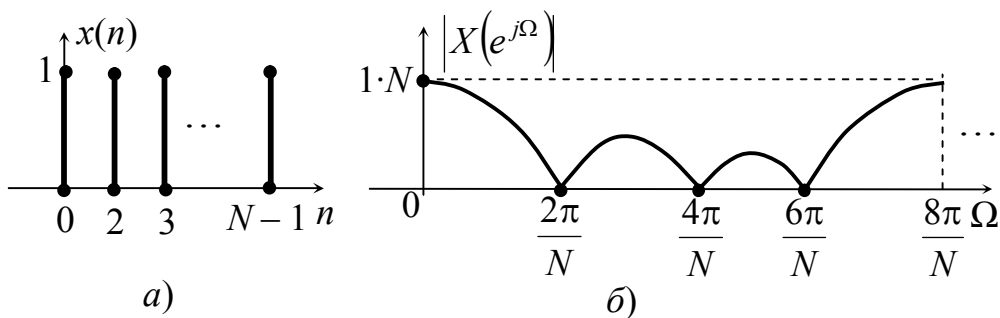


Рисунок 2.19 – Дискретне перетворення Фур'є:
а – дискретна послідовність $x(n)$; б – спектр послідовності $x(n)$

Рішення. Використовуємо вираз 2.13.

$$X(e^{j\Omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j\Omega n} = \sum_{n=0}^{N-1} 1 \cdot e^{-j\Omega n}.$$

Цей вираз являє собою спадну геометричну прогресію, а суму можна записати в загальному вигляді:

$$X(e^{j\Omega}) = \frac{1 - e^{j\Omega N}}{1 - e^{j\Omega}}.$$

Виконаємо нескладне перетворення й скористаємося формулою $\sin x = (e^{jx} - e^{-jx})/2j$

$$\frac{1 - e^{-j\Omega N}}{1 + e^{-j\Omega}} = \frac{e^{-j\frac{\Omega N}{2}} \left(e^{j\frac{\Omega N}{2}} - e^{-j\frac{\Omega N}{2}} \right) \cdot 2j}{e^{-j\frac{\Omega}{2}} \cdot 2j \left(e^{j\frac{\Omega}{2}} - e^{-j\frac{\Omega}{2}} \right)} = \frac{\sin j\frac{\Omega N}{2}}{\sin j\frac{\Omega}{2}} e^{-j\frac{\Omega}{2}(N-1)}.$$

Модуль цього виразу $|X(e^{j\Omega})| = \left| \frac{\sin j\frac{\Omega N}{2}}{\sin j\frac{\Omega}{2}} \right|$ є спектром послідовності $x(n)$. На

рис. 2.19, б зображений спектр обмеженої послідовності $x(n)$ при $N = 4$. З рисунку видно, що спектр суцільний й періодичний.

Розглянемо операторну передавальну функцію дискретного кола (ОПФДК) з нескінченною імпульсною характеристикою (БІХ) (2.10). До цього виразу застосуємо ДПФ, можемо записати:

$$\dot{H}(e^{j\Omega}) = \dot{H}(\Omega) = \frac{a_0 + a_1(\cos \Omega - j \sin \Omega) + a_2(\cos 2\Omega - j \sin 2\Omega) + \dots}{1 - [b_1(\cos \Omega - j \sin \Omega) + b_2(\cos 2\Omega - j \sin 2\Omega) + \dots + a_M(\cos M\Omega - j \sin M\Omega) + \dots + b_K(\cos K\Omega - j \sin K\Omega)]}.$$

Розкривши дужки, згрупувавши дійсні й уявні частини чисельника й знаменника, одержимо вираз для комплексної передатної функції дискретного кола:

$$\dot{H}(\Omega) = \frac{\left[a_0 + a_m \sum_{m=1}^M \cos m\Omega \right] - ja_m \left[\sum_{m=1}^M \sin m\Omega \right]}{\left[1 - b_k \sum_{k=1}^K \cos k\Omega \right] + jb_k \left[\sum_{k=1}^K \sin k\Omega \right]}. \quad (2.14)$$

У комплексному вигляді це буде:

$$H(\Omega) = \frac{\sqrt{A^2 + B^2}}{\sqrt{D^2 + E^2}} - \text{модуль вираз у 2.14};$$

$$\theta(\Omega) = \arctg \frac{B}{A} - \arctg \frac{E}{D} - \text{аргумент вираз у 2.14},$$

де A і D – дійсні частини чисельника й знаменника відповідно;

B і E – уявні частини чисельника й знаменника відповідно.

Розглянемо приклад. Для кола рис. 2.14 визначимо й побудуємо АЧХ.

Рішення. Рівняння кола рис. 2.14 має вигляд $y(n) = a_0x(n) + a_1x(n-1)$.

Застосувавши до цього рівняння z-перетворення можемо записати:

$$Y(z) = a_0X(z) + a_1X(z)z^{-1} = X(z)(a_0 + a_1z^{-1}),$$

звідки ОПФ

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = a_0 + a_1z^{-1}.$$

Комплексна передавальна функція

$$\dot{H}(\Omega) = a_0 + a_1e^{-j\Omega} = a_0 + a_1(\cos\Omega - j\sin\Omega) = (a_0 + a_1\cos\Omega) - ja_1\sin\Omega.$$

Модуль $H(\Omega) = \sqrt{(a_0 + a_1\cos\Omega)^2 + a_1^2\sin^2\Omega}$. Нехай $a_0 = a_1 = 1$, тоді

$$H(\Omega) = \sqrt{(1 + \cos\Omega)^2 + \sin^2\Omega} = \sqrt{1 + 2\cos\Omega + \cos^2\Omega + \sin^2\Omega} = \sqrt{2 + 2\cos\Omega}.$$

Задавши значення Ω ($0; \pi/4; \pi/2; \dots; 2\pi$), одержимо значення $H(\Omega)$. На

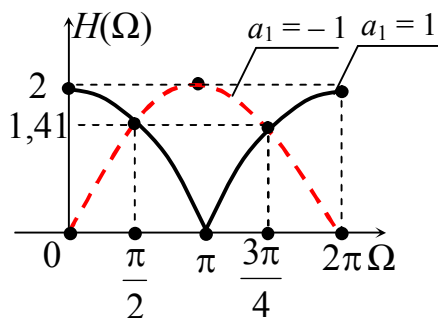


Рисунок 2.20 – Амплітудно-частотна характеристика дискретного фільтру

види фільтрів.

рис. 2.20 зображена характеристика дискретного кола. На цьому ж рисунку наведена друга характеристика АЧХ за умови, що $a_0 = 1$, $a_1 = -1$. Із цього рисунку можна зробити висновок, що отримані характеристики $H(\Omega)$ дискретного кола можна представити як характеристики смугового й режекторного фільтрів. А змінюючи коефіцієнти можна одержувати різні

Контрольні питання

1. У чому суть теореми відліків?
2. Чому дорівнює мінімальна частота дискретизації f_d сигналу, якщо найвища частота спектра аналогового сигналу $f_b = 5$ кГц?
3. Чому дорівнює максимальний період дискретизації T_d сигналу, якщо найвища частота спектра аналогового сигналу $f_b = 8$ кГц?
4. Яка теорема лежить в основі цифрової обробки сигналів?
5. Як записати аналітичний вираз одиничного дискретного імпульсу?
6. Як записати аналітичний вираз дискретної східчастої послідовності?
7. Як записати дискретну гармонічну послідовність?
8. Як записати дискретну комплексну експоненту?
9. Як записати дискретну східчасту послідовність?
10. Як записати пряме дискретне перетворення Лапласа $X_L(p)$?
11. Як записати зворотне дискретне перетворення Лапласа?
12. Яким методом користуються при рішенні лінійних різницевих рівнянь?
13. Якою часовою функцією користуються при аналізі дискретних кіл?
14. Що собою являє дискретна згортка?
15. Як записати пряме z -перетворення дискретної послідовності?
16. Як визначити імпульсну функцію дискретного кола?
17. Чим характеризується рекурсивний фільтр?
18. Чим характеризується нерекурсивний фільтр?
19. Як записати зворотне z -перетворення дискретної згортки?
20. Як записати пряме дискретне перетворення Фур'є $X_F(e^{j\omega})$?
21. Як записати зворотне дискретне перетворення Фур'є?
22. Як називаються рівняння, що описують дискретні кола в часовій області?
23. Як називається дискретний фільтр із кінцевою імпульсною характеристикою?
24. Як називається дискретний фільтр із нескінченною імпульсною характеристикою?
25. Що являє собою операторна передавальна функція рекурсивного фільтра?
26. Що являє собою операторна передавальна функція нерекурсивного фільтра?
27. Що є теоретичною основою дискретної обробки сигналів?
28. Що таке дискретизація аналогового сигналу?
29. Що таке квантування дискретного сигналу?
30. Який сигнал називається аналоговим?
31. Який сигнал називається цифровим?
32. Якими рівняннями описуються аналогові кола?
33. Якими рівняннями описуються дискретні кола?
34. Який спектр у періодичних аналогових сигналів?
35. Який спектр у неперіодичних аналогових сигналів?
36. Який спектр у дискретних сигналів?
37. Яким повинен бути найбільший період дискретизації T_d для того, щоб відновити сигнал?

38. За допомогою якого пристрою можна відновити аналоговий сигнал?
39. Як записати одну з можливих моделей дискретного сигналу?
40. Що собою являє дискретний сигнал?
41. Що собою являє цифровий сигнал?
42. У чому суть швидкого перетворення Фур'є?
43. У чому суть лінійності z -перетворення?
44. Як записати z -перетворення для зміщеного на k позицій сигналу?
45. Як записати z -перетворення згортки двох дискретних сигналів $x(n)$ і $y(n)$?
46. Як називається процес дискретизації за рівнем?
47. Як називають похибку дискретного сигналу при квантуванні?
48. Чим відрізняється модуль комплексної передавальної функції цифрового фільтра від аналогічної функції аналогового фільтра?
49. Що являє собою операторна передавальна функція дискретного кола $H(z)$?
50. Як зв'язані операторна передавальна функція дискретного кола з імпульсною функцією того ж кола?
51. Як перейти від операторної передавальної функції дискретного кола до комплексної?
52. Від чого залежить порядок цифрового фільтра?
53. Що собою являє структурна схема цифрового фільтра?
54. Чим відрізняється нерекурсивний цифровий фільтр від рекурсивного?
55. У чому суть алгоритму цифрової фільтрації?
56. Що таке регістр зсуву?
57. Який пристрій здійснює реалізацію коефіцієнтів (амплітуд) відліків?
58. Що є графічним зображенням алгоритму обробки сигналу?
59. Що є умовою стійкості цифрового фільтра?

Список рекомендованої літератури

1. Бакалов В.П. Теория электрических цепей: учебник для вузов/ Бакалов В.П., Воробиенко П.П., Крук Б.И. – М.: Радио и связь, 1998.
2. Гоноровский И.С. Радиотехнические цепи и сигналы/ Гоноровский И.С. – М.: Радио и связь, 1986.
3. Фельдбаум А.А. Теоретические основы связи и управления; под ред. А.А. Фельдбаума, А.Д. Дудыкин, А.П. Мановцев, Н.Н. Миролюбов – М.: ГИФМЛ, 1963.
4. Бронштейн И.Н. Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов/ И.Н. Бронштейн, К.А. Семендяев – М.: Наука ГРФМП, 1981.
5. Лем Г. Аналоговые и цифровые фильтры. Расчет и реализация/ Лем Г. – М.: МИР, 1982.
6. Зааль Р. Справочник по расчету фильтров/ Зааль Р. – М.: Радио и связь, 1983.
7. Кисель В.А. Аналоговые и цифровые корректоры: справочник/ Кисель В.А. – М.: Радио и связь, 1986.
8. Сиберт У.М. Цепи, сигналы, системы. В 2-х ч./ Сиберт У.М. – М.: Мир, 1988, ч. 2.
9. Самарский А.А. Теория разностных схем/ Самарский А.А. – М., 1977.
10. Воробиенко П.П. Дискретные цепи (системы) и сигналы: учеб. пособ/ П.П. Воробиенко, О.Л. Нечипорук – Одесса: ОЭИС им. А.С. Попова, 1990.
11. Лаврентьев М.А. Методы теории функций комплексного переменного/ М.А. Лаврентьев, Б.В. Шабат – М.: Наука, 1973.

ЧАСТИНА 2

Методичні вказівки до виконання лабораторних робіт

Лабораторна робота № 4.1

ДОСЛІДЖЕННЯ ВІДГУКУ НЕЛІНІЙНОГО КОЛА ПРИ ГАРМОНІЧНИХ ВПЛИВАХ

1 Мета роботи

Дослідити спектри впливу й відгуку в режимі малих і великих амплітуд.

2 Список літератури

- 2.1 Бакалов В.П. Теория электрических цепей: учебник для вузов/ Бакалов В.П., Воробиенко П.П., Крук Б.И. – М.: Радио и связь, 1998.
- 2.2 Калашников А.Ю. Преобразование сигналов: учеб.-метод. пособие по дисциплине «Теория электрических цепей и сигналов»/ Калашников А.Ю., Шкулипа А.В., Горелик С.М. – Одесса: ИЦ ОНАС им. А.С. Попова, 2011.

3 Тест-питання

- 3.1 Тест-запитання для виявлення ступеня готовності до виконання лабораторної роботи наведено в Додатку А.

4 Домашнє завдання

- 4.1 Вивчити метод визначення спектра відгуку нелінійного кола при гармонічних впливах.
- 4.2 Розрахувати спектр відгуку в режимі великих амплітуд при заданій апроксимації ВАХ НЕ.
- 4.3 За результатами розрахунків побудувати спектр вихідної напруги.

5 Лабораторне завдання

- 5.1 Дослідити спектр відгуку й порівняти його з домашніми розрахунками.
- 5.2 Дослідити спектри відгуку при різних апроксимуючих функціях.

6 Порядок виконання роботи

- 6.1 За допомогою стрілок «вгору» і «вниз» у лівій частині віртуального макета (див. рис. 6.1) установити параметри ВАХ НЕ, вхідного коливання $u_1(t)$ і початкового зсуву E_1 .

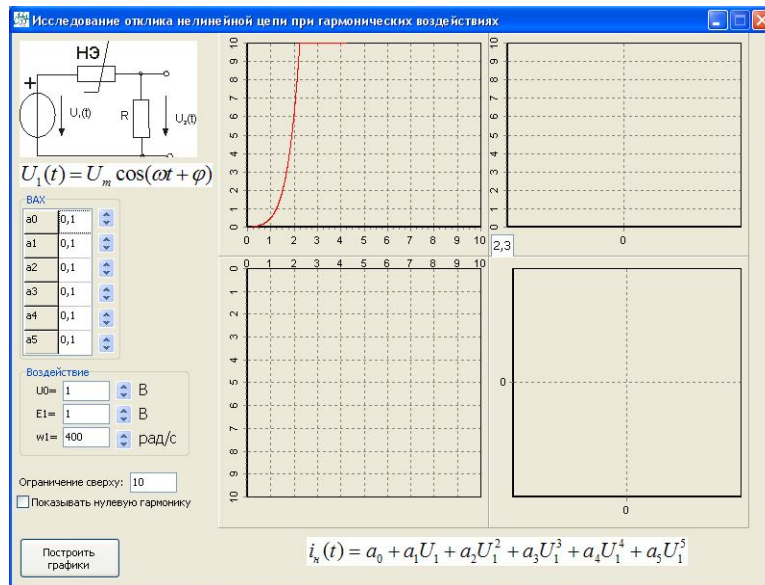


Рисунок 6.1 – Віртуальний макет досліджуваного кола

6.2 Натиснути кнопку «Побудувати графіки» у лівому нижньому куті віртуального макета. При цьому на екрані з'являться графіки: ВАХ НЕ, часова діаграма відгуку НЕ, часова діаграма впливу (з урахуванням зсуву) і спектр амплітуд відгуку (див. рис. 6.2).

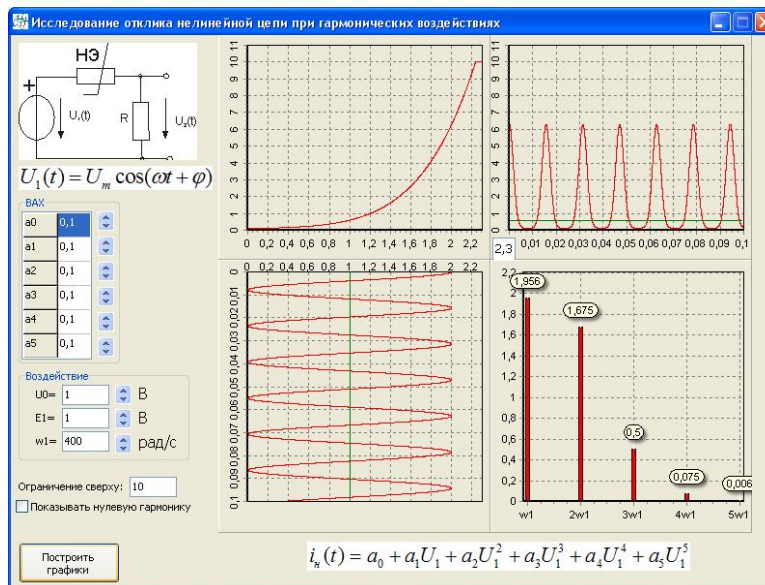


Рисунок 6.2 – Приклад виконання лабораторної роботи

6.3 Для зміни апроксимуючої функції необхідно установити в нульове значення деякі з коефіцієнтів $a_0 \dots a_5$ (при цьому всі діаграми змінюються автоматично).

7 Зміст протоколу

- 7.1 Тема й мета роботи.
- 7.2 Результати виконання домашнього завдання.
- 7.3 Таблиці розрахунків, графіки, схеми.
- 7.4 Висновки.

Лабораторна робота № 4.2

ДОСЛІДЖЕННЯ ВІДГУКУ НЕЛІНІЙНОГО КОЛА ПРИ БІГАРМОНІЧНИХ ВПЛИВАХ

1 Мета роботи

Дослідити спектри впливу й відгуку при бігармонічних впливах.

2 Список літератури

- 2.1 Бакалов В.П. Теория электрических цепей: учебник для вузов/ Бакалов В.П., Воробийенко П.П., Крук Б.И. – М.: Радио и связь, 1998.
- 2.2 Калашников А.Ю. Преобразование сигналов: учеб.-метод. пособие по дисциплине «Теория электрических цепей и сигналов»/ Калашников А.Ю., Шкулипа А.В., Горелик С.М. – Одесса: ІЦ ОНАС ім. А.С. Попова, 2011.

3 Тест-питання

- 3.1 Тест-запитання для виявлення ступеня готовності до виконання лабораторної роботи наведено в Додатку А.

4 Домашнє завдання

- 4.1. Вивчити метод визначення відгуку нелінійного кола при бігармонічних впливах.
- 4.2. Розрахувати спектри відгуку при заданих параметрах бігармонічних коливань і заданій апроксимації ВАХ НЕ.
- 4.3. За результатами розрахунків побудувати спектр відгуку (вихідного сигналу).

5 Лабораторне завдання

- 5.1 Дослідити спектр відгуку й порівняти його з домашніми розрахунками.
- 5.2 Повторити експеримент при інших значеннях параметрів бігармонічних коливань та інших апроксимаціях ВАХ НЕ .

6 Порядок виконання роботи

- 6.1 За допомогою стрілок «вгору» і «вниз» у лівій частині віртуального макета (див. рис. 6.1) установити параметри ВАХ НЕ, вхідного коливання $u_1(t)$ і початкового зсуву U_0 .

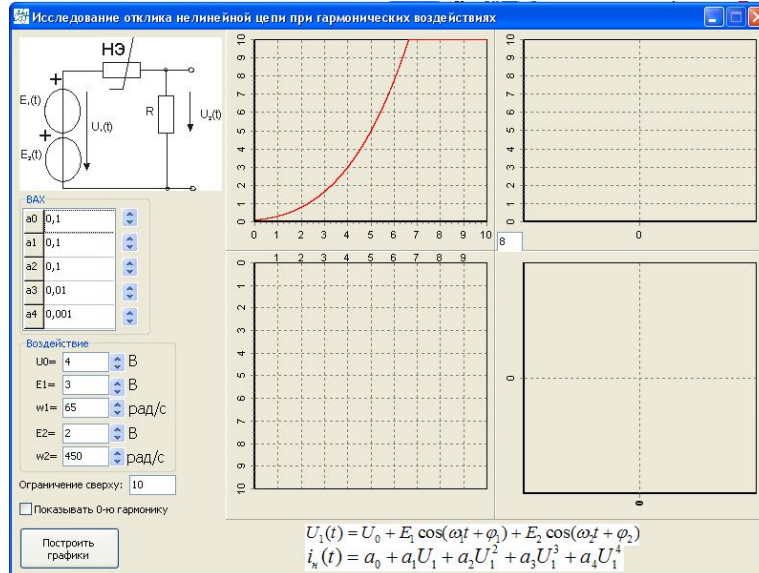


Рисунок 6.1 – Віртуальний макет досліджуваного кола

- 6.2 Натиснути кнопку «Построить графики» у лівому нижньому куті віртуального макета. При цьому на екрані з'являться графіки: ВАХ НЕ, часова діаграма відгуку НЕ, часова діаграма впливу (з урахуванням зсуву) і спектр амплітуд відгуку (див. рис. 6.2).

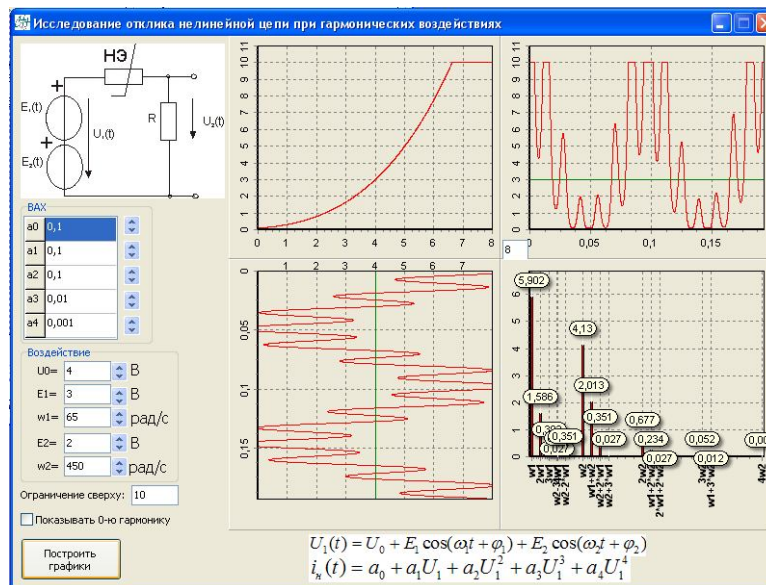


Рисунок 6.2 – Приклад виконання лабораторної роботи

- 6.3 Для зміни апроксимуючої функції необхідно встановити в нульове значення деякі з коефіцієнтів $a_0 \dots a_4$ (при цьому всі діаграми змінюються автоматично).

7 Зміст протоколу

- 7.1 Тема й мета роботи.
- 7.2 Результати виконання домашнього завдання.
- 7.3 Таблиці розрахунків, графіки, схеми.
- 7.4 Висновки.

Лабораторна робота № 4.3

ДОСЛІДЖЕННЯ МОДУЛЬОВАНИХ КОЛИВАНЬ (АМ, ЧМ, ФМ)

1 Мета роботи

Дослідити характеристики амплітудно-модульованих коливань.

2 Список літератури

- 2.1 Бакалов В.П. Теория электрических цепей: учебник для вузов/ Бакалов В.П., Воробиевко П.П., Крук Б.И. – М.: Радио и связь, 1998.
- 2.2 Калашников А.Ю. Преобразование сигналов: учеб.-метод. пособие по дисциплине «Теория электрических цепей и сигналов»/ Калашников А.Ю., Шкулипа А.В., Горелик С.М. – Одесса: ИЦ ОНАС им. А.С. Попова, 2011.

3 Тест-питання

- 3.1 Тест-запитання для виявлення ступеня готовності до виконання лабораторної роботи наведено в Додатку А.

4 Домашнє завдання

- 4.1. Вивчити метод одержання амплітудно-модульованих коливань.
- 4.2. За заданою формулою розрахувати функцію АМ-сигналу й побудувати його спектр.
- 4.3. За заданою формулою розрахувати функцію БМ-сигналу й побудувати його спектр.
- 4.4. За заданою формулою розрахувати функцію ОМ-сигналу й побудувати його спектр.

5 Лабораторне завдання

- 5.1 Постпостерігати й зафіксувати в протоколі часові, спектральні й векторні діаграми амплітудно-модульованого сигналу для різних випадків первинного (модулюючого) сигналу:

- а) одна гармонічна складова;
- б) дві гармонічні складові;
- в) три гармонічні складові.

5.2 Поспостерігати й зафіксувати в протоколі векторні діаграми амплітудно-модульованого сигналу при модуляції трьома гармонічними складовими первинного сигналу в різні моменти часу.

6 Порядок виконання роботи

6.1 Включити макет, нажавши на кнопку включення в лівій середній частині віртуального макета. При цьому віртуальний макет набуде вигляду рис. 6.1.

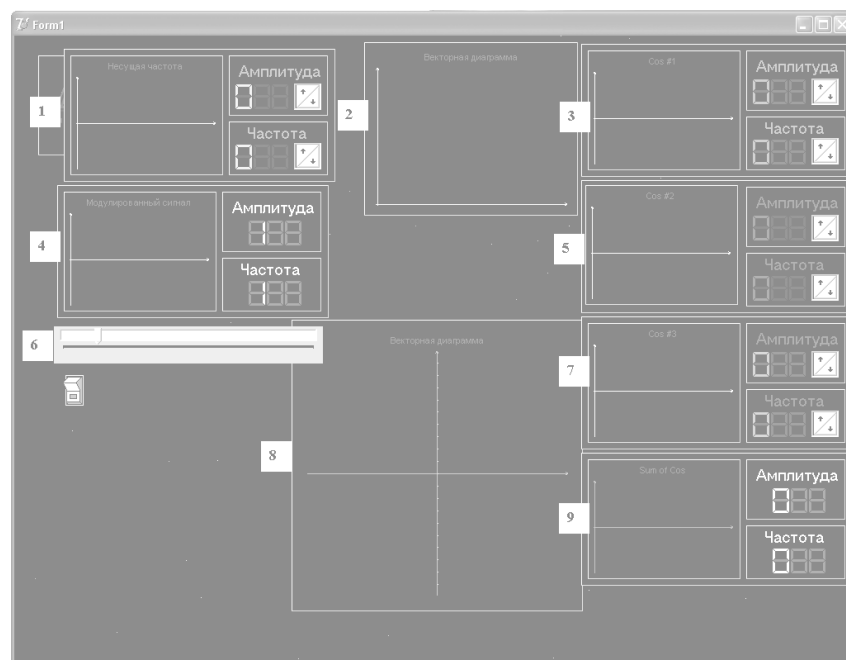


Рисунок 6.1 – Віртуальний макет лабораторної роботи

Тут:

- 1 – часова діаграма й параметри сигналу-переносника;
- 2 – спектр амплітуд АМ сигналу;
- 3 – часова діаграма й параметри первинного сигналу (перша гармоніка);
- 4 – часова діаграма АМ сигналу;
- 5 – часова діаграма й параметри первинного сигналу (друга гармоніка);
- 6 – лінійка прокручування осі часу;
- 7 – часова діаграма й параметри первинного сигналу (третя гармоніка);
- 8 – векторна діаграма АМ сигналу;
- 9 – часова діаграма первинного сигналу (сума всіх гармонік).

6.2 За допомогою стрілок «вгору» і «вниз» установити параметри переносника й первинного сигналу (необхідної кількості гармонік). При цьому автоматично на екран виводяться часові діаграми модулюючого й

модульованого сигналів, спектр амплітуд і векторна діаграма АМ сигналу (рис. 6.2).

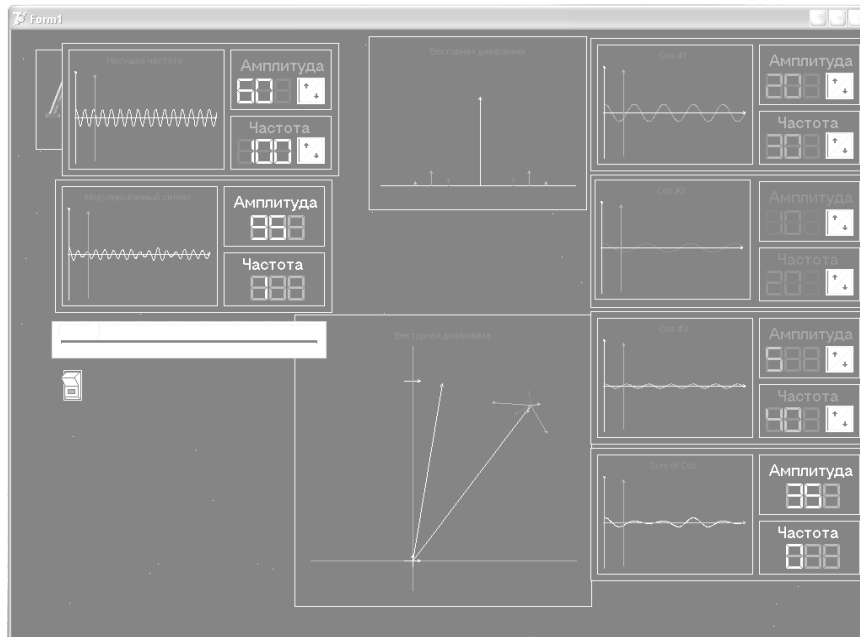


Рисунок 6.2 – Приклад виконання лабораторної роботи

- 6.3 Для спостереження векторної діаграми АМ сигналу необхідно установити в задане положення повзунок лінійки часу (над кнопкою включення макета) і збільшити масштаб векторної діаграми: установити курсор миші в лівий верхній кут ділянки, що збільшується, натиснути ліву кнопку миші й, не відпускаючи її, простягнути курсор по діагоналі ділянки, що збільшується. Для повернення у вихідне положення необхідно проробити зворотну операцію.

7 Зміст протоколу

- 7.1 Тема й мета роботи.
- 7.2 Результати виконання домашнього завдання.
- 7.3 Таблиці розрахунків, графіки, схеми.
- 7.4 Висновки.

Лабораторна робота № 4.4

ДОСЛІДЖЕННЯ АНАЛОГОВИХ ФІЛЬТРІВ

1 Мета роботи

Дослідити частотні характеристики аналогових фільтрів на прикладі ФНЧ.

2 Список літератури

- 2.1 Бакалов В.П. Теория электрических цепей: учебник для вузов/ Бакалов В.П., Воробиенко П.П., Крук Б.И. – М.: Радио и связь, 1998.
- 2.2 Калашников А.Ю. Преобразование сигналов: учеб.-метод. пособие по дисциплине «Теория электрических цепей и сигналов»/ Калашников А.Ю., Шкулипа А.В., Горелик С.М. – Одесса: ИЦ ОНАС им. А.С. Попова, 2011.

3 Тест-питання

- 3.1 Тест-запитання для виявлення ступеня готовності до виконання лабораторної роботи наведено в Додатку А.

4 Домашнє завдання

- 4.1. Вивчити аналіз і синтез аналогових фільтрів різних типів ФНЧ, ФВЧ, СФ із різними частотними характеристиками (Баттерворта, Чебишева, Золоторьова-Кауера).
- 4.2. За заданими параметрами розрахувати ФНЧ.
- 4.3. За результатами розрахунків побудувати схеми й частотні характеристики.

5 Лабораторне завдання

- 5.1 Подивитися й зафіксувати в протоколі частотні характеристики робочого загасання фільтрів нижніх частот з характеристиками:
 - а) Баттерворта;
 - б) Чебишева;
 - в) Золотарьова-Кауера.
- 5.2 Порівняти результати експерименту й попереднього розрахунку та зробити висновки.

6 Порядок виконання роботи

- 6.1 Робота доступна у двох режимах: «Лабораторная работа» і «Експеримент». Вибір режиму здійснюється у віконці «Тема роботи» головного вікна віртуального макета (див. рис. 6.1). У режимі «Експеримент» проводиться порівняльний аналіз ЧХ ФНЧ. У даній роботі цей режим не розглядається. Робота виконується в режимі «Лабораторная работа».

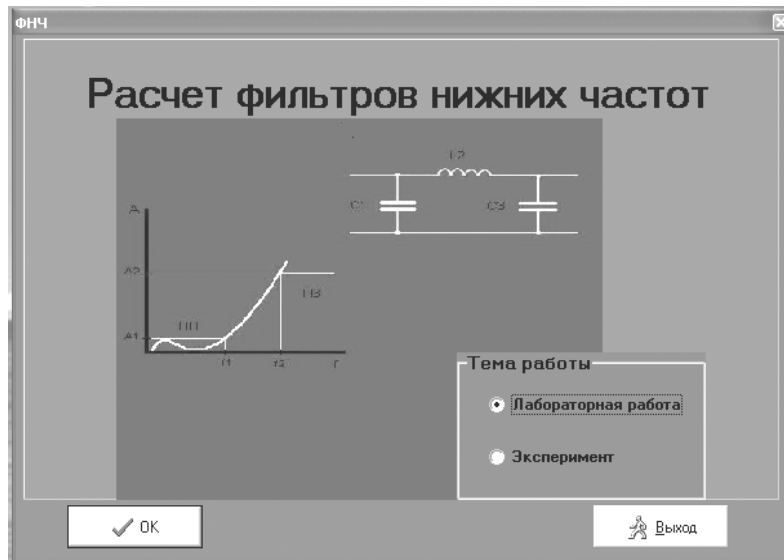


Рисунок 6.1 – Віртуальний макет лабораторної роботи

- 6.2 У віконці «Тема роботи» головного вікна віртуального макета (рис. 6.1) вибирається режим «Лабораторная работа» і натискається кнопка «ОК». При цьому вікно макета набуває вигляду рис. 6.2.

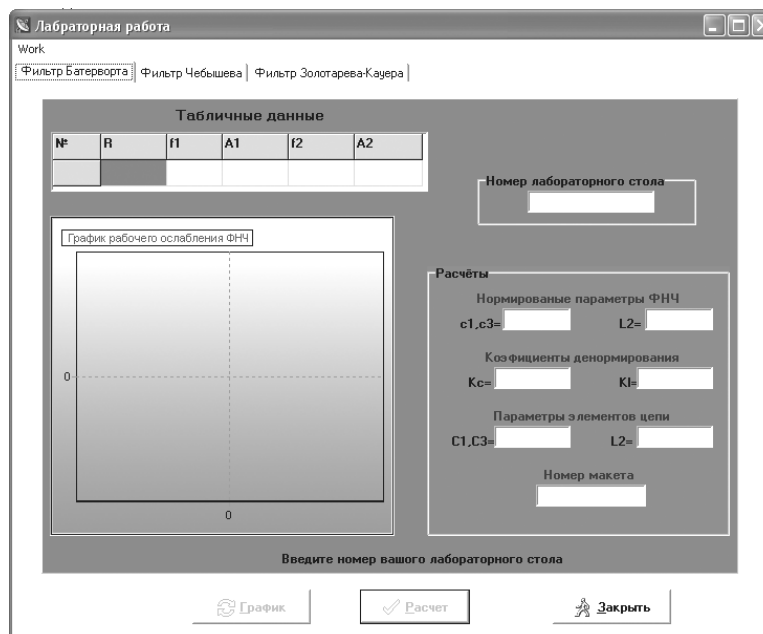


Рисунок 6.2 – Приклад віртуального макета у режимі «Лабораторная работа»

- 6.3 У даному вікні вибирається закладка, що відповідає досліджуваному фільтру (Баттерворта, Чебишева або Золотарьова-Кауера), у вікно «Номер лабораторного стола» вводиться номер варіанта, відповідно до домашнього завдання (номер бригади) і натискається кнопка «Расчет». При цьому у відповідних віконцях макета виводяться значення

нормованих елементів даного ФНЧ, коефіцієнтів денормування й дійсних величин елементів даної схеми (порівняти з попереднім розрахунком).

- 6.3 Для побудови графіка робочого загасання необхідно натиснути на кнопку «График» у нижній частині віртуального макета. Для збільшення масштабу заданої ділянки (смуги пропускання) необхідно встановити курсор миші в лівий верхній кут ділянки, що збільшується, натиснути ліву кнопку миші й, не відпускаючи її, простягнути курсор по діагоналі ділянки, що збільшується. Для повернення у вихідне положення необхідно проробити зворотну операцію. Приклад виконання роботи для ФНЧ із характеристикою Баттерворта для другої бригади наведений на рис. 6.3.

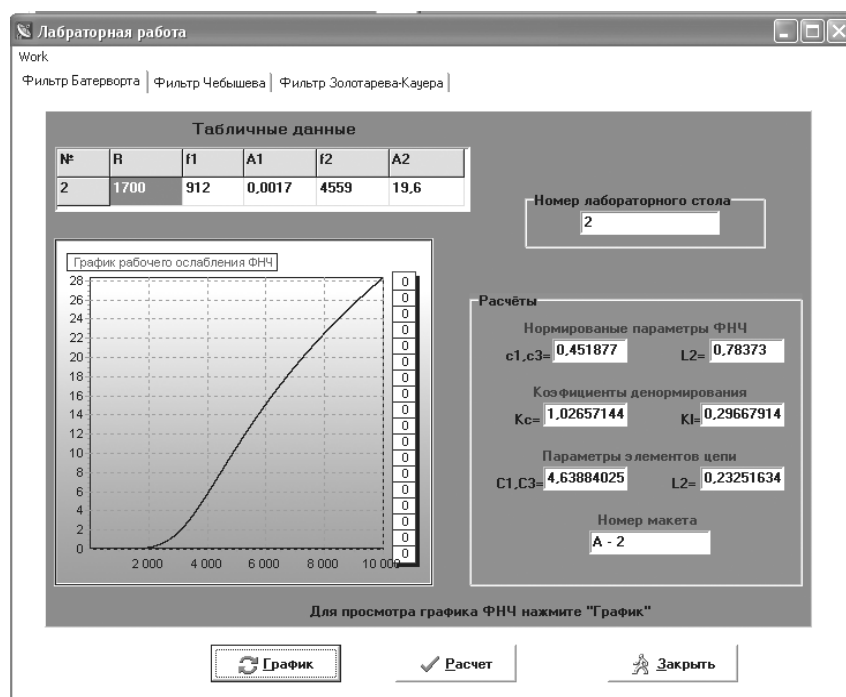


Рисунок 6.3 – Приклад побудови графіка для ФНЧ с характеристикою Баттерворта

7 Зміст протоколу

- 7.1 Тема й мета роботи.
- 7.2 Результати виконання домашнього завдання.
- 7.3 Таблиці розрахунків, графіки, схеми.
- 7.4 Висновки.

Лабораторна робота № 4.5

КОРЕКТУВАННЯ ЧАСТОТНИХ СПОТВОРЕНЬ ТРАКТУ ПЕРЕДАЧІ

1 Мета роботи

Провести корекцію тракту передачі за допомогою амплітудних коректорів.

2 Список літератури

- 2.1 Бакалов В.П. Теория электрических цепей: учебник для вузов/ Бакалов В.П., Воробиенко П.П., Крук Б.И. – М.: Радио и связь, 1998.
- 2.2 Калашников А.Ю. Преобразование сигналов: учеб.-метод. пособие по дисциплине «Теория электрических цепей и сигналов»/ Калашников А.Ю., Шкулипа А.В., Горелик С.М. – Одесса: ИЦ ОНАС им. А.С. Попова, 2011.

3 Тест-питання

- 3.1 Тест-запитання для виявлення ступеня готовності до виконання лабораторної роботи наведено в Додатку А.

4 Домашнє завдання

- 4.1 Вивчити властивості амплітудних коректорів.
- 4.2 Розглянути частотні характеристики загасання АК, виходячи зі схем плечей Z_1 .

5 Лабораторне завдання

- 5.1 Зробити коректування тракту передачі, знаючи його частотну залежність загасання в діапазоні частот $A_{ТП}$.

6 Порядок виконання

- 6.1 Відповідно до вказівок викладача, виміряти робоче загасання тракту передачі $A_{ТП}$ (рис. 6.1) у заданому діапазоні частот $f_1 \dots f_2$ і побудувати графік $A_{ТП}(f)$.

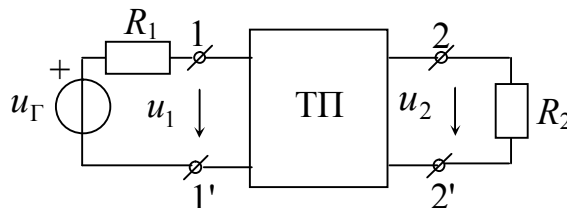


Рисунок 6.1 – Вимірювання ЧХ
тракта передачі

6.2 Виміряти повторне загасання запропонованих коректувальних чотириполіусників АК₁, АК₂ і т.д. (рис. 6.2) і побудувати графіки $A_{ki}(f)$.

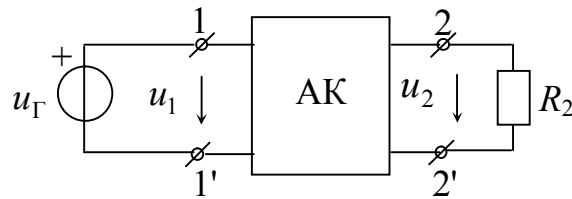


Рисунок 6.2 – Вимірювання ЧХ коректуючих кіл

6.3 За отриманими характеристиками $A_{ki}(f)$ вибрати АК, що як щонайкраще коригує характеристику тракту передачі $A_{ТП}(f)$. Включити обраний коректор касадно із трактом передачі, виміряти сумарне загасання всього кола $A_{\Sigma}(f) = A_{ТП}(f) + A_k(f)$ (див. рис. 6.3) і побудувати його графік. Зробити висновки.

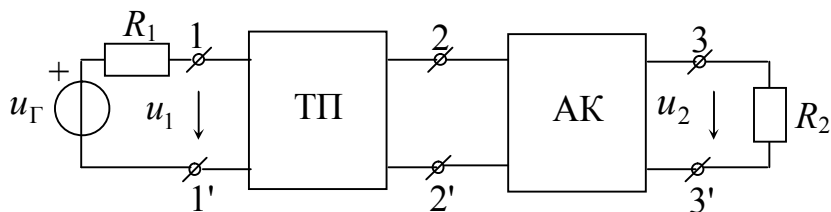


Рисунок 6.3 – Вимірювання ЧХ касадного включення ТП і АК

7 Зміст протоколу

- 7.1 Тема й мета роботи.
- 7.2 Результати виконання домашнього завдання.
- 7.3 Таблиці розрахунків, графіки, схеми.
- 7.4 Висновки.

Лабораторна робота № 4.6

ДОСЛІДЖЕННЯ ЧАСТОТНИХ ХАРАКТЕРИСТИК ДИСКРЕТНИХ КІЛ

1 Мета роботи

За допомогою стандартних програм одержати частотні характеристики фільтрів, розрахованих у курсовій роботі.

2 Список літератури

- 2.1 Бакалов В.П. Теория электрических цепей: учебник для вузов/ Бакалов В.П., Воробийченко П.П., Крук Б.И. – М.: Радио и связь, 1998.
- 2.2 Калашников А.Ю. Преобразование сигналов: учеб.-метод. пособие по дисциплине «Теория электрических цепей и сигналов»/ Калашников А.Ю., Шкулипа А.В., Горелик С.М. – Одесса: ІЦ ОНАС ім. А.С. Попова, 2011.

3 Тест-питання

- 3.1 Тест-запитання для виявлення ступеня готовності до виконання лабораторної роботи наведено в Додатку А.

4 Домашнє завдання

- 4.1 Вивчити тему «Перетворення дискретних сигналів»
- 4.2 Із КР на тему «Перетворення аналогових і дискретних сигналів» до протоколу лабораторної роботи занести результати розрахунків ЦФНЧ Баттерворта й Чебишева:
 - границі СП і СЗ і значення загасання в межах цих смуг;
 - порядки ФНЧ;
 - частоту дискретизації;
 - вираження ОПФ ЦФНЧ із чисельними значеннями коефіцієнтів.

5 Лабораторне завдання

- 5.1 Зняти частотні характеристики $H(f)$ і $A(f)$, $\theta(f)$ і ГВП дискретного ФНЧ Баттерворта.
- 5.2 Зняти частотні характеристики $H(f)$ і $A(f)$, $\theta(f)$ і ГВП дискретного ФНЧ Чебишева.

6 Порядок виконання

- 6.1 Дотримуючись вказівок викладача, занести результати розрахунків ФНЧ Баттерворта із КР у програму.
- 6.2 Замалювати частотні характеристики $H(f)$, $A(f)$, $\theta(f)$, ГВП; записати вираження ОПФ синтезованого фільтра, порівняти з розрахунками й зробити висновки.
- 6.3 Повторити п. п. 6.1 і 6.2 для ФНЧ Чебишева.

7 Зміст протоколу

- 7.1 Тема й мета роботи.
- 7.2 Вихідні дані для розрахунків.
- 7.3 Графіки $H(f)$ і $A(f)$, $\theta(f)$ і ГВП.
- 7.4 Формули передавальних функцій фільтрів.
- 7.5 Висновки.

ДОДАТОК А

Тест-запитання до лабораторних робіт

Лабораторні роботи № 4.1 і 4.2

ДОСЛІДЖЕННЯ ВІДГУКУ НЕЛІНІЙНОГО КОЛА ПРИ ГАРМОНІЧНИХ І БІГАРМОНІЧНИХ ВПЛИВАХ

- 1 Що таке нелінійний елемент?
- 2 Яке коло називають нелінійним?
- 3 Що називають гармонічним коливанням?
- 4 Які сигнали називаються детермінованими?
- 5 У чому відмінність лінійного кола від нелінійного?
- 6 Як визначаються статичний й динамічний опори НЕ?
- 7 Які найважливіші особливості нелінійного кола?
- 8 Навіщо потрібна апроксимація ВАХ НЕ?
- 9 Для чого застосовується кусочно-лінійна апроксимація?
- 10 Що являє собою апроксимація поліномом ступеня n ?
- 11 Що являє собою відгук нелінійного кола на гармонічний вплив?
- 12 Який спектр при апроксимації поліномом ступеня n ?
- 13 Як визначити амплітуду спектральної складової при апроксимації поліномом n -го ступеня?
- 14 Як вибрати ступінь полінома при апроксимації поліномом n -го ступеня?
- 15 Який сигнал буде на виході, якщо періодичний сигнал поданий у вигляді суми гармонічних коливань?
- 16 Що називають крутизною ВАХ і як вона розраховується?
- 17 Який кут називають кутом відсікання?
- 18 Чому форма струму відгуку в колі з НЕ відрізняється від форми впливу?
- 19 Що називають квазілінійним режимом?
- 20 Що являє собою режим малих амплітуд?
- 21 Що являє собою режим великих амплітуд?
- 22 Що таке коефіцієнти Берга і як ними користуватися?
- 23 Який вплив називають бігармонічним?
- 24 Які особливості спектра відгуку при бігармонічному впливі?
- 25 Які частоти називають комбінаційними?
- 26 Який буде спектр відгуку, якщо в якості апроксимуючої функції взяти поліном n -ступеня?
- 27 Як змінюється спектр відгуку при збільшенні кількості гармонічних складових у впливі?

- 28 У чому полягає суть процесу перетворення частоти?
- 29 Яким вимогам повинна задовольняти ВАХ НЕ для одержання ефекту перетворення частоти?
- 30 Яка структурна схема пристроїв для перетворення частоти?
- 31 У чому полягає суть процесу «випрямлення коливання»?
- 32 Що називають коефіцієнтом підсилення?

Лабораторна робота № 4.3

ДОСЛІДЖЕННЯ МОДУЛЬОВАНИХ КОЛИВАНЬ

- 1 Що називається електричним коливанням?
- 2 Що таке гармонічна складова, гармоніка?
- 3 Що таке модуляція?
- 4 Що називається сигналом-переносником?
- 5 Що називається амплітудною модуляцією?
- 6 Які різновиди амплітудної модуляції існують?
- 7 Який сигнал називається модулюючим?
- 8 Який сигнал називається модульованим?
- 9 Що таке коефіцієнт модуляції?
- 10 Які складові входять до складу функції АМ-сигналу?
- 11 Чому дорівнює амплітуда АМ сигналу в момент, коли амплітуда модулюючого сигналу максимальна?
- 12 Чому дорівнює амплітуда АМ сигналу момент, коли амплітуда модулюючого сигналу мінімальна?
- 13 Як визначається миттєва потужність сигналу в максимальному режимі?
- 14 Чому дорівнює максимальна потужність при $m_{AM} = 1$?
- 15 Які значення може приймати коефіцієнт амплітудною модуляції m_{AM} ?
- 16 Який спектр АМ-сигналу, якщо модулюючою функцією $b(t)$ буде неперіодична функція?
- 17 Що таке нормоване значення амплітуди і як воно визначається?
- 18 Який спектр АМ-сигналу якщо модулюючий сигнал $b(t)$ являє собою ряд

$$b(t) = \sum_{k=1}^N b_{m_k} \cos(\Omega_k t + \varphi_k)?$$
- 19 Яка ширина спектру АМ сигналу, якщо модулюючий сигнал містить n гармонічних складових?
- 20 Чому дорівнює узагальнений коефіцієнт модуляції?
- 21 Які види кутової модуляції існують?
- 22 Чому дорівнює коефіцієнт модуляції при БМ?
- 23 Який сигнал називається БМ?

- 24 Який сигнал називається ОМ?
- 25 Чим відрізняються сигнали АМ, БМ і ОМ один від одного?
- 26 У чому фізичний зміст операції «перетворення Гільберта»?
- 27 Що називається девіацією частоти?
- 28 Яким співвідношенням зв'язані миттєві значення повної фази $\theta(t)$ і частоти коливання $\omega(t)$?
- 29 Що таке кутова частота?
- 30 Що називається індексом частотної модуляції й чому він дорівнює?
- 31 Що називається індексом фазової модуляції й чому він дорівнює?
- 32 Що таке девіація фази?
- 33 Який спектр ЧМ сигналу?
- 34 Для чого застосовують функції Бесселя?

Лабораторна робота № 4.4

ДОСЛІДЖЕННЯ АНАЛОГОВИХ ФІЛЬТРІВ

- 1 Дати визначення фільтра?
- 2 Який фільтр називається аналоговим?
- 3 Що називають «ідеальний фільтр»?
- 4 Що називається смугою пропускання фільтра?
- 5 Що називають смугою затримування фільтра?
- 6 Що називається смугою розфільтровки?
- 7 За якими ознаками класифікують фільтри?
- 8 Які класи фільтрів існують за діапазонами частот?
- 9 Як класифікують фільтри за складом елементів?
- 10 Як класифікують фільтри за електричними схемами заміщення?
- 11 Що називається коефіцієнтом передачі і як він розраховується?
- 12 Що називається фільтром НЧ?
- 13 Що називається фільтром ВЧ?
- 14 Який фільтр називається смуговим?
- 15 Який фільтр називається режекторним?
- 16 Що називається загасанням фільтра?
- 17 Як розраховується загасання, якщо його розмірність „децибели”?
- 18 Що таке «непер» і як розрахувати загасання в „неперах”?
- 19 Яке співвідношення між дБ і Нп?
- 20 Що таке «неідеальний фільтр»?
- 21 Як зв'язані між собою функції $A(f)$ і $H(f)$?
- 22 Що розуміють під синтезом фільтра?
- 23 Які методи синтезу існують?

- 24 Що називається характеристичним опором симетричного чотириполюсника Z_c ?
- 25 Як розраховується загасання чотириполюсника якщо $R_1 = R_2$?
- 26 Що називається апроксимацією ?
- 27 Який фільтр називається фільтром Баттерворта?
- 28 Який фільтр називається фільтром Чебишева?
- 29 Який фільтр називається фільтром Золотарьова-Кауера?
- 30 Що називається порядком фільтра?
- 31 Що являє собою перетворення частот?
- 32 Що називається нормованою частотою?
- 33 Який опір називають нормованим?
- 34 Що називають денормуванням?
- 35 Що являє собою «нормована індуктивність» і «нормована ємність»?
- 36 Як відбувається перетворення фільтрів?
- 37 Як виглядають характеристики $A(f)$ і $H(f)$ для фільтра Баттерворта різних порядків?
- 38 Як виглядають характеристики $A(f)$ і $H(f)$ для фільтра Чебишева?
- 39 Як виглядають характеристики $A(f)$ і $H(f)$ для фільтра Золотарьова-Кауера?

Лабораторна робота № 4.5

КОРЕКТУВАННЯ ЧАСТОТНИХ СПОТВОРЕНЬ ТРАКТУ ПЕРЕДАЧІ

- 1 Що називається амплітудним коректором?
- 2 Яким умовам повинен задовольняти коректор амплітуд?
- 3 Як розраховується загасання коректора?
- 4 Від чого залежить загасання A_k ?
- 5 Яким повинне бути загасання коректора A_k , якщо загасання тракту передачі збільшується зі зростанням частоти ?
- 6 Для чого застосовуються амплітудні коректори?
- 7 Що називається спотворенням?
- 8 Умови неспотвореної передачі в часовій області?
- 9 Умова неспотвореної передачі в частотній області?
- 10 Які схеми заміщення застосовуються для АК?
- 11 Яким умовам повинне задовольняти коло без спотворень?
- 12 Що називається спотворюючим чотириполюсником?
- 13 Що називається коригувальним чотириполюсником?
- 14 Причини виникнення амплітудно-частотних спотворень?
- 15 Що таке загасання коректора?

- 16 Як виглядає характеристика загасання спотворюючого чотириполіусника?
- 17 Як виглядає характеристика загасання коригувального чотириполіусника?
- 18 Яку кількість реактивних елементів будуть містити плечі Z_1 і Z_2 , якщо графік загасання монотонно зростає або спадає?
- 19 Якщо плече Z_1 містить два паралельно з'єднаних елементи (R, C), як буде виглядати плече Z_2 ?
- 20 Якщо плече Z_1 містить два послідовно з'єднаних елементи (R, L), як буде виглядати плече Z_2 ?
- 21 Які види загасання існують?
- 22 Як буде виглядати характеристика A_k , якщо плече Z_1 буде містити два послідовно з'єднаних реактивних елементи (L, C)?
- 23 Що називається фазовим коректором?
- 24 Як буде виглядати характеристика A_k , якщо плече Z_1 буде містити два паралельно з'єднаних реактивних елементи (L, C).

ДОДАТОК Б

Приклади розв'язування задач модуля 4

Перетворення аналогових сигналів

Визначення відгуку нелінійного кола за гармонічного впливу

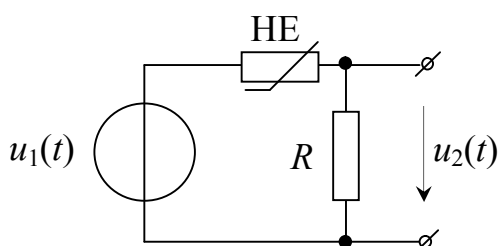


Рисунок 1.1 – Досліджуване коло

Задача 1. Задано нелінійне коло рис. 1.1. Вхідний вплив $u_1(t) = U_{1m} \cos \omega_1 t$, де $\omega_1 = 10^3$ рад/с; $U_{m1} = 1$ В. Апроксимація ВАХ НЕ задана виразом $i = a_0 + a_1 u_1$, де $a_0 = 0,01$ А; $a_1 = 0,05$ А/В; $R = 1$ Ом.

Розрахувати відгук $u_2(t)$ і побудувати його спектр.

Розв'язок

За умовою ВАХ НЕ апроксимована поліномом першого ступеня. У цьому випадку струм нелінійного кола:

$$i = a_0 + a_1 u_1 = a_0 + a_1 U_{1m} \cos \omega_1 t.$$

Відгук нелінійного кола буде мати вигляд:

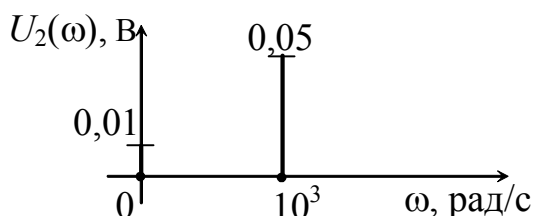


Рисунок 1.2 – Спектр відгуку

$$\begin{aligned} u_2(t) &= (a_0 + a_1 U_{1m} \cos \omega_1 t) R = \\ &= R a_0 + R a_1 U_{1m} \cos \omega_1 t = 0,01 + 0,05 \cos 10^3 t, \text{ В.} \end{aligned}$$

Спектр відгуку $u_2(t)$ представлений на рис. 1.2.

Задача 2. Задано нелінійне коло рис. 1.1. Вхідний вплив $u_1(t) = U_{1m} \cos \omega_1 t$, де $\omega_1 = 10^3$ рад/с; $U_{m1} = 1$ В. Апроксимація ВАХ НЕ задана виразом $i = a_0 + a_1 u_1 + a_2 u_1^2$, де $a_0 = 0,01$ А; $a_1 = 0,05$ А/В; $a_2 = 0,08$ А/В²; $R = 1$ Ом.

Розрахувати відгук $u_2(t)$ і побудувати його спектр.

Розв'язок

За умовою ВАХ НЕ апроксимована поліномом другого ступеня. У цьому випадку струм нелінійного кола:

$$i = a_0 + a_1 u_1 + a_2 u_1^2 = a_0 + a_1 U_{1m} \cos \omega_1 t + a_2 (U_{1m} \cos \omega_1 t)^2.$$

Скориставшись тригонометричною формулою

$$(\cos \alpha)^2 = \cos^2 \alpha = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2\alpha$$

і, виконавши математичні перетворення, одержимо:

$$i = a_0 + a_1 U_{1m} \cos \omega_1 t + \frac{a_2 U_{1m}}{2} + \frac{a_2 U_{1m}^2}{2} \cos 2\omega_1 t.$$

Відгук $u_2(t)$ нелінійного кола буде мати вигляд:

$$u_2(t) = i \cdot R = \left(a_0 + a_1 U_{1m} \cos \omega_1 t + \frac{a_2 U_{1m}}{2} + \frac{a_2 U_{1m}^2}{2} \cos 2\omega_1 t \right) R = R a_0 + R a_1 U_{1m} \cos \omega_1 t + \frac{R a_2 U_{1m}}{2} + \frac{R a_2 U_{1m}^2}{2} \cos 2\omega_1 t = 0,05 + 0,05 \cos 10^3 t + 0,04 \cos 2 \cdot 10^3 t, \text{ В.}$$

У такий спосіб амплітуда постійної складової дорівнює

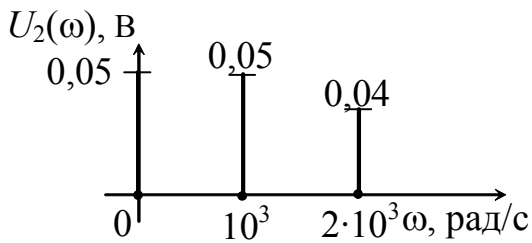


Рисунок 2.1 – Спектр відгуку

$R a_0 + \frac{R a_2 U_{1m}}{2} = 0,05$, амплітуда першої гармоніки $R a_1 U_{1m} = 0,05$, амплітуда другої гармоніки $\frac{R a_2 U_{1m}^2}{2} = 0,04$.

Спектр відгуку $u_2(t)$ представлений на рис. 2.1.

Визначення відгуку нелінійного кола за бігармонічного впливу

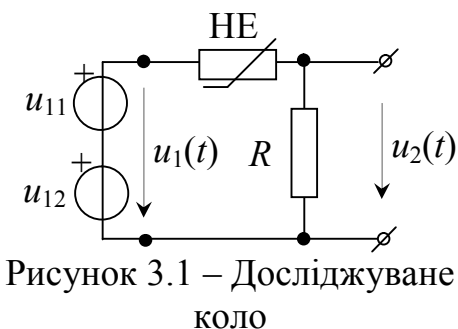


Рисунок 3.1 – Досліджуване коло

Задача 3. Задано нелінійне коло рис. 3.1.

Вхідний вплив $u_1(t) = u_{11}(t) + u_{12}(t) = U_{m1} \cos \omega_1 t + U_{m2} \cos \Omega_1 t$, де $U_{m1} = 1$ В; $U_{m2} = 1$ В; $\omega_1 = 5 \cdot 10^3$ рад/с, $\Omega_1 = 10^3$ рад/с. Апроксимуюча функція ВАХ НЕ задана вираженням $i = a_0 + a_1 u_1$, де $a_0 = 0,01$ А; $a_1 = 0,05$ А/В; $R = 1$ Ом. Розрахувати відгук $u_2(t)$ і побудувати його спектр.

Розв'язок

За умовою ВАХ НЕ апроксимована поліномом першого ступеня. У цьому випадку струм нелінійного кола:

$$i = a_0 + a_1 u_1 = a_0 + a_1 (U_{m1} \cos \omega_1 t + U_{m2} \cos \Omega_1 t) = \\ = a_0 + a_1 U_{m1} \cos \omega_1 t + a_1 U_{m2} \cos \Omega_1 t = 0,01 + 0,05 \cos 5 \cdot 10^3 t + 0,05 \cos 10^3 t, \text{ А.}$$

Відгук нелінійного кола буде мати вигляд:

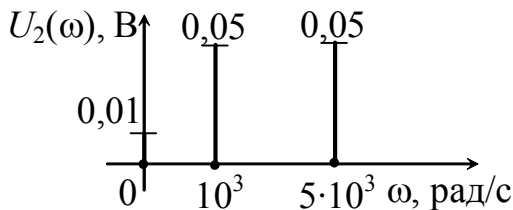


Рисунок 3.2 – Спектр відгуку

$$u_2(t) = Ri(t) = \\ = (a_0 + a_1 [U_{m1} \cos \omega_1 t + U_{m2} \cos \Omega_1 t]) R = \\ = R a_0 + R a_1 U_{m1} \cos \omega_1 t + R a_1 U_{m2} \cos \Omega_1 t = \\ = 0,01 + 0,05 \cos 5 \cdot 10^3 t + 0,05 \cos 10^3 t, \text{ В.}$$

Спектр відгуку $u_2(t)$ представлений на рис. 3.2.

Задача 4. Задано нелінійне коло рис. 3.1. Вхідний вплив $u_1(t) = u_{11}(t) + u_{12}(t) = U_{m1} \cos \omega_1 t + U_{m2} \cos \Omega_1 t$, де $U_{m1} = 1 \text{ В}$; $U_{m2} = 1 \text{ В}$, $\omega_1 = 5 \cdot 10^3 \text{ рад/с}$; $\Omega_1 = 10^3 \text{ рад/с}$. Апроксимуюча функція ВАХ НЕ задана вираженням $i = a_0 + a_1 u_1 + a_2 u_1^2$, де $a_0 = 0,01 \text{ А}$; $a_1 = 0,05 \text{ А/В}$; $a_2 = 0,08 \text{ А/В}^2$; $R = 1 \text{ Ом}$.

Розрахувати відгук $u_2(t)$ і побудувати його спектр.

Розв'язок

За умовою ВАХ НЕ апроксимована поліномом другого ступеня. У цьому випадку струм нелінійного кола:

$$i = a_0 + a_1 u_1 + a_2 u_1^2 = \\ = a_0 + a_1 (U_{m1} \cos \omega_1 t + U_{m2} \cos \Omega_1 t) + a_2 (U_{m1} \cos \omega_1 t + U_{m2} \cos \Omega_1 t)^2.$$

Скориставшись тригонометричною формулою й виконавши математичні перетворення, одержимо:

$$i = a_0 + a_1 U_{m1} \cos \omega_1 t + a_1 U_{m2} \cos \Omega_1 t + a_2 U_{m1}^2 \cos^2 \omega_1 t + \\ + 2 U_{m1} U_{m2} \cos \omega_1 t \cos \Omega_1 t + a_2 U_{m2}^2 \cos^2 \Omega_1 t = a_0 + a_1 U_{m1} \cos \omega_1 t + a_1 U_{m2} \cos \Omega_1 t +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{a_2 U_{m1}^2}{2} + \frac{a_2 U_{m1}^2}{2} \cos 2\omega_1 t + U_{m1} U_{m2} [\cos(\omega_1 + \Omega_1 t) + \cos(\omega_1 - \Omega_1 t)] + \\
& + \frac{a_2 U_{m2}^2}{2} + \frac{a_2 U_{m2}^2}{2} \cos 2\Omega_1 t = 0,09 + 0,05 \cos 5 \cdot 10^3 t + 0,05 \cos 10^3 t + 0,04 \cos 10 \cdot 10^3 t + \\
& + 1 [\cos 6 \cdot 10^3 t + \cos 4 \cdot 10^3 t] + 0,04 \cos 2 \cdot 10^3 t, \text{ A.}
\end{aligned}$$

Відгук $u_2(t)$ нелінійного кола буде мати вигляд:

$$\begin{aligned}
u_2(t) = i \cdot R = & \left[a_0 + \frac{a_2 U_{m1}^2}{2} + \frac{a_2 U_{m2}^2}{2} + a_1 U_{m1} \cos \omega_1 t + a_1 U_{m2} \cos \Omega_1 t + \right. \\
& \left. + \frac{a_2 U_{m1}^2}{2} \cos 2\omega_1 t + U_{m1} U_{m2} [\cos(\omega_1 + \Omega_1 t) + \cos(\omega_1 - \Omega_1 t)] + \frac{a_2 U_{m2}^2}{2} \cos 2\Omega_1 t \right] R.
\end{aligned}$$

Розкривши дужки й підставивши чисельні значення, одержимо:

$$\begin{aligned}
u_2(t) = & 0,09 + 0,05 \cos 5 \cdot 10^3 t + 0,05 \cos 10^3 t + 0,04 \cos 10 \cdot 10^3 t + \\
& + 1 [\cos 6 \cdot 10^3 t + \cos 4 \cdot 10^3 t] + 0,04 \cos 2 \cdot 10^3 t, \text{ B}
\end{aligned}$$

Спектр відгуку $u_2(t)$ представлений на рис. 4.2.

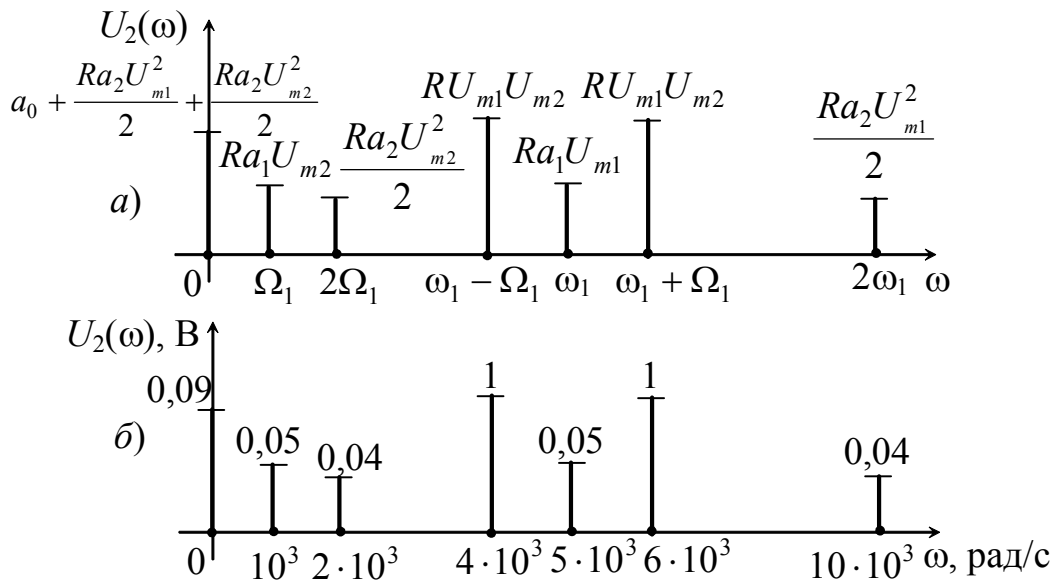


Рисунок 4.1 – Спектр відгуку:
 a – загальний вигляд; b – з числовими значеннями

Аналогово-модульовані сигнали, їх опис

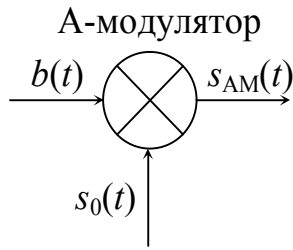


Рисунок 5.1 – Функціональна схема модулятора

Задача 5. На вхід модулятора (рис. 5.1) подається сигнал виду $b(t) = b \cos(2\pi ft)$, де $b = 1$ В; $f = 1$ кГц; сигнал-переносник $s_0(t) = S_0 \cos(2\pi f_0 t)$, де $S_0 = 0,5$ В; $f_0 = 10$ кГц; коефіцієнт глибини модуляції $m_{AM} = 0,4$.

Розрахувати АМ-сигнал і побудувати його спектр $s_{AM}(f)$.

На рис. 5.1 представлена функціональна схема модулятора на вхід якої подається сигнал $b(t)$, на інший вхід переносник $s_0(t)$. На виході модулятора одержимо амплітудно-модульований сигнал $s_{AM}(t)$.

Розв'язок

Для розв'язку скористаємося формулою (1.9)

$$s_{AM}(t) = S_0 \cos 2\pi f_0 t + \frac{m_{AM} S_0}{2} \cos 2\pi (f_0 \pm f) t.$$

Із цієї формули видно, що функція АМ складається з коливання частоти переносника f_0 і 2-х коливань із комбінаційними частотами $(f_0 + f)$ і $(f_0 - f)$. Амплітуди цих коливань однакові $\frac{m_{AM} S_0}{2}$, фази симетричні щодо фази переносника.

Підставивши вихідні дані у формулу $s_{AM}(t)$, одержимо

$$\begin{aligned} s_{AM}(t) &= 0,5 \cos(2\pi \cdot 10 \cdot 10^3 t) + \frac{0,4 \cdot 0,5}{2} \cos[2\pi(10 \cdot 10^3 + 10^3) t] + \\ &+ \frac{0,4 \cdot 0,5}{2} \cos[2\pi(10 \cdot 10^3 - 10^3) t] = 0,5 \cos(2\pi \cdot 10 \cdot 10^3 t) + 0,1 \cos[2\pi(10 \cdot 10^3 + 10^3) t] + \\ &+ 0,1 \cos[2\pi(10 \cdot 10^3 - 10^3) t] \end{aligned}$$

Спектри сигналів представлені на рис. 5.2.

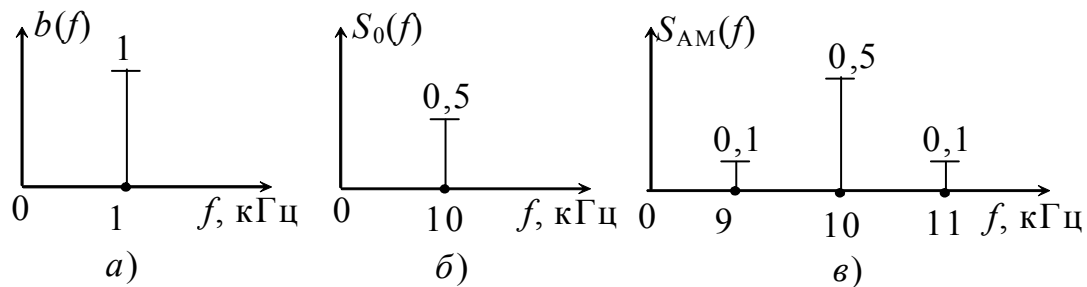


Рисунок 5.2 – Спектри сигналів: а – спектр вхідного сигналу; б – спектр сигналу-переносника; в – спектр АМ-сигналу

На рис. 5.2, в зображений спектр АМ-сигналу, на якому видно, що спектр складається із трьох амплітуд: у центрі амплітуда частоти переносника й з боків дві амплітуди нижньої бічної (НБ) і верхньої бічної (ВБ) частоти відповідно.

Сигнали кутової модуляції

Задача 6. На вхід модулятора подається сигнал $b(t) = b \cos(2\pi ft)$, де $b = 1$ В; $f = 1$ кГц; сигнал-переносник $s_0(t) = S_0 \cos(2\pi f_0 t)$, де $S_0 = 0,5$ В; $f_0 = 10$ кГц; $m_{\text{ЧМ}} = 6$. Розрахувати ЧМ-сигнал і побудувати його спектр.

Розв'язок

Для розв'язку скористаємося формулою (1.25)

$$s_{\text{ЧМ}}(t) = S_0 J_0(m) \cos \omega_0 t + \sum_{n=1}^{\infty} S_0 J_n(m) \cos(\omega_0 + n\Omega)t + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n S_0 J_n(m) \cos(\omega_0 - n\Omega)t.$$

Якщо врахувати $(-1)^k J_k(m) = J_k(m)$, то формулу (1.25) можна представити у вигляді:

$$s_{\text{ЧМ}}(t) = A_0 \sum_{k=-\infty}^{\infty} J_k(m) \cos(\omega_0 + k\Omega)t,$$

де $A_0 = S_0 = 0,5$ В; $\omega_0 = 2\pi f_0 = 2\pi \cdot 10^4$ рад/с; $\Omega = 2\pi f = 2\pi \cdot 10^3$ рад/с.

Практично ширина спектра $\Delta f_{\text{ЧМ}}(t) = 2(m+1)\Omega = 2(6+1)\Omega = 14\Omega$, тому визначимо значення функції Бесселя $J_k(m)$ для $k = -7, \dots, 7$ і $m = 6$ (за графіком рис. 1.19).

Результати розрахунку складових спектра зведемо в табл. 6.1, за якою побудуємо спектральну діаграму амплітуд (рис. 6.1).

Таблиця 6.1 – Розрахунок спектра ЧМ коливання

k	$J_k(m)$	$A_0 J_k(m)$	$k2\pi f$	$\omega_0 + k2\pi f$	f , кГц
-7	0,14	0,07	$-7 \cdot 2\pi \cdot 10^3$	$2\pi \cdot 10^4 - 7 \cdot 2\pi \cdot 10^3$	3
-6	0,24	0,12	$-6 \cdot 2\pi \cdot 10^3$	$2\pi \cdot 10^4 - 6 \cdot 2\pi \cdot 10^3$	4
-5	0,36	0,18	$-5 \cdot 2\pi \cdot 10^3$	$2\pi \cdot 10^4 - 5 \cdot 2\pi \cdot 10^3$	5
-4	0,36	0,18	$-4 \cdot 2\pi \cdot 10^3$	$2\pi \cdot 10^4 - 4 \cdot 2\pi \cdot 10^3$	6
-3	0,1	0,05	$-3 \cdot 2\pi \cdot 10^3$	$2\pi \cdot 10^4 - 3 \cdot 2\pi \cdot 10^3$	7
-2	0,24	0,12	$-2 \cdot 2\pi \cdot 10^3$	$2\pi \cdot 10^4 - 2 \cdot 2\pi \cdot 10^3$	8
-1	0,27	0,135	$-2\pi \cdot 10^3$	$2\pi \cdot 10^4 - 2\pi \cdot 10^3$	9

Закінчення табл. 6.1

k	$J_k(m)$	$A_0 J_k(m)$	$k2\pi f$	$\omega_0 + k2\pi f$	f , кГц
0	0,14	0,07	0	$2\pi \cdot 10^4$	10
1	0,27	0,135	$2\pi \cdot 10^3$	$2\pi \cdot 10^4 + 2\pi \cdot 10^3$	11
2	0,24	0,12	$2 \cdot 2\pi \cdot 10^3$	$2\pi \cdot 10^4 + 2 \cdot 2\pi \cdot 10^3$	12
3	0,1	0,05	$3 \cdot 2\pi \cdot 10^3$	$2\pi \cdot 10^4 + 3 \cdot 2\pi \cdot 10^3$	13
4	0,36	0,18	$4 \cdot 2\pi \cdot 10^3$	$2\pi \cdot 10^4 + 4 \cdot 2\pi \cdot 10^3$	14
5	0,36	0,18	$5 \cdot 2\pi \cdot 10^3$	$2\pi \cdot 10^4 + 5 \cdot 2\pi \cdot 10^3$	15
6	0,24	0,12	$6 \cdot 2\pi \cdot 10^3$	$2\pi \cdot 10^4 + 6 \cdot 2\pi \cdot 10^3$	16
7	0,14	0,07	$7 \cdot 2\pi \cdot 10^3$	$2\pi \cdot 10^4 + 7 \cdot 2\pi \cdot 10^3$	17

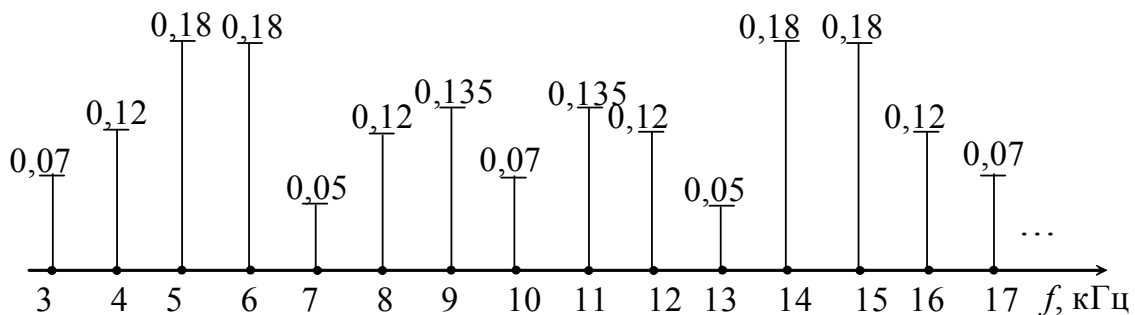


Рисунок 6.1 – Спектральна діаграма сигналу з однотональною кутовою модуляцією при індексі модуляції $m_{\text{ЧМ}} = 6$

Перетворення спектрів аналоговими фільтрами

Задача 7. Зобразити схему й побудувати характеристики $A(f)$ і $H(f)$ ФНЧ Баттерворта 3-го порядку.

Розв'язок

На рис. 7.1 зображені характеристики $A(f)$ і $H(f)$ ФНЧ Баттерворта, які у смузі пропускання (СП) і смузі затримування (СЗ) мають монотонний характер.

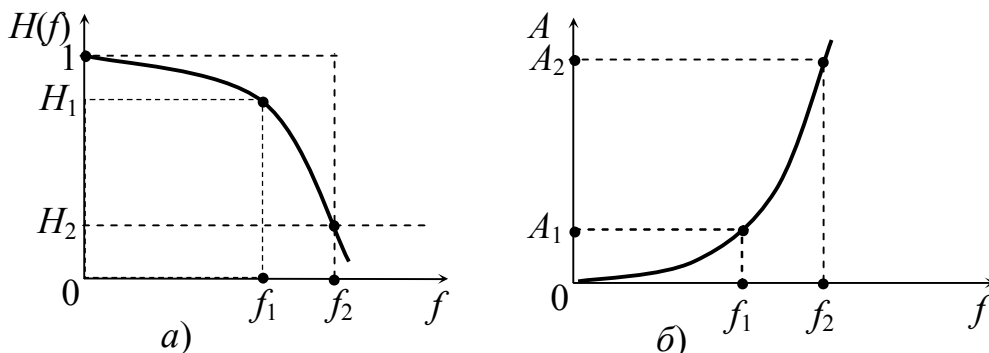


Рисунок 7.1 – Характеристики ФНЧ Баттерворта: а – АЧХ $H(f)$; б – характеристика загасання $A(f)$

Одна з можливих схем фільтра Баттерворта з $n = 3$ зображена на рис. 7.2.

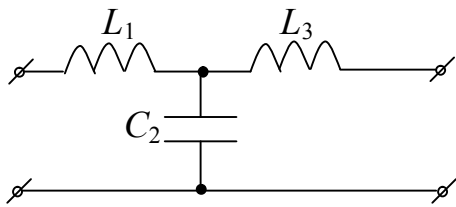


Рисунок 7.2 – Схема фільтра Баттерворта 3-го порядку

На рис. 8.1 зображені характеристики $A(f)$ і $H(f)$ ФНЧ Чебишева 3-го порядку, які в смузі пропускання (СП) мають рівнохвильовий характер, а в смузі затримування (СЗ) – монотонний.

Схема фільтра Чебишева з $n = 3$ зображена на рис. 8.2

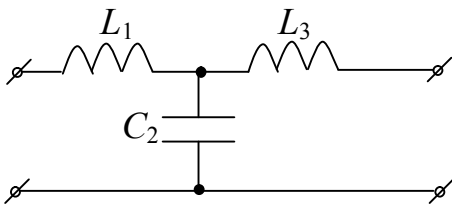


Рисунок 8.2 – Схема фільтра Чебишева 3-го порядку

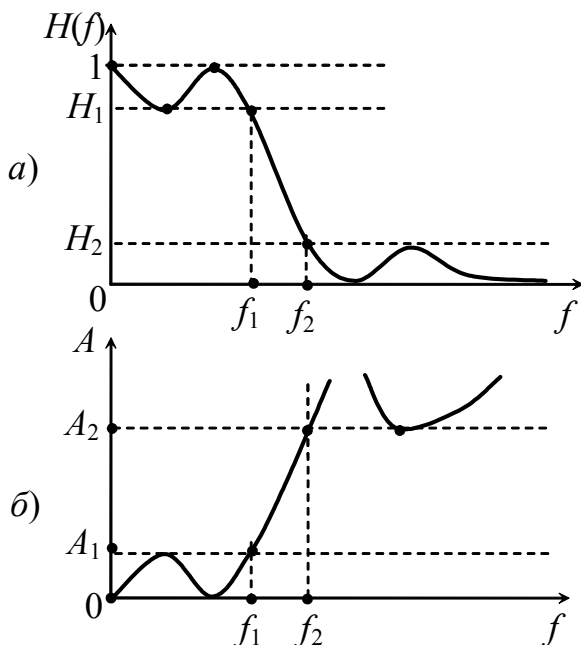


Рисунок 9.1 – Характеристики ФНЧ Золотарьова-Кауера:
а – АЧХ $H(f)$;
б – характеристика загасання $A(f)$

Задача 8. Зобразити схему й побудувати характеристики $A(f)$ і $H(f)$ ФНЧ Чебишева 3-го порядку.

Розв'язок

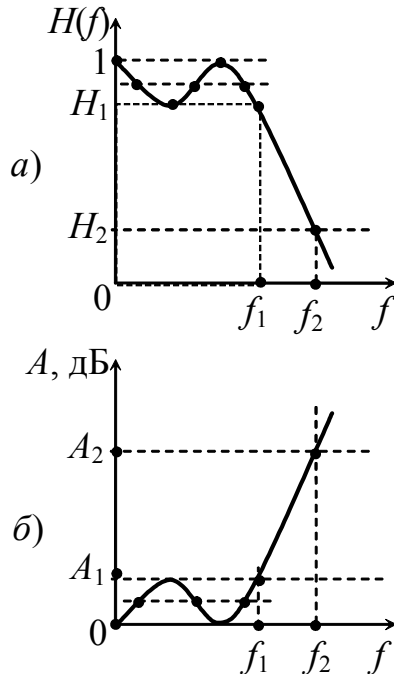


Рисунок 8.1 – Характеристики ФНЧ Чебишева:
а – АЧХ $H(f)$; б – характеристика загасання $A(f)$

Задача 9. Зобразити схему ФНЧ Золотарьова-Кауера 3-го порядку й побудувати характеристики $A(f)$ і $H(f)$.

Розв'язок

На рис. 9.1 зображені характеристики $A(f)$ і $H(f)$ ФНЧ Золотарьова-Кауера 3-го порядку, які в смузі пропускання й у смузі затримування мають рівнохвильовий характер для $H(f)$ і сплески в СЗ для $A(f)$.

Схема фільтра Золотарьова-Кауера з $n = 3$ зображена на рис. 9.2.

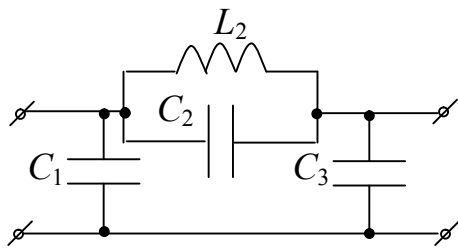


Рисунок 9.2 – Схема ФНЧ Золотарьова-Кауера 3-го порядку

Задача 10. Надана частотна характеристика АЧХ $H(f)$ (рис. 10.1). Побудувати частотну характеристику загасання $A(f)$, визначити тип фільтра й зобразити його схему.

Розв'язок

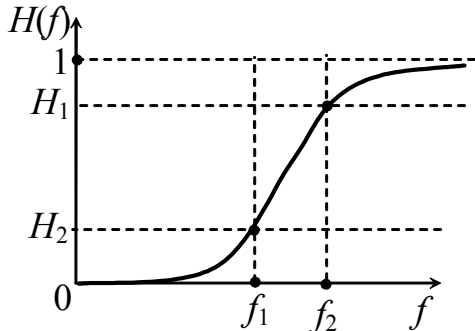


Рисунок 10.1 – Частотна характеристика $H(f)$

На рис. 10.1 зображена характеристика $H(f)$ фільтра ВЧ Баттерворта, оскільки в смугах пропускання й затримування характеристика монотонна й СП знаходиться в діапазоні частот від f_2 до ∞ . На рис. 10.2 зображена схема фільтра ВЧ третього порядку, а на рис. 10.3 зображена частотна характеристика $A(f)$.

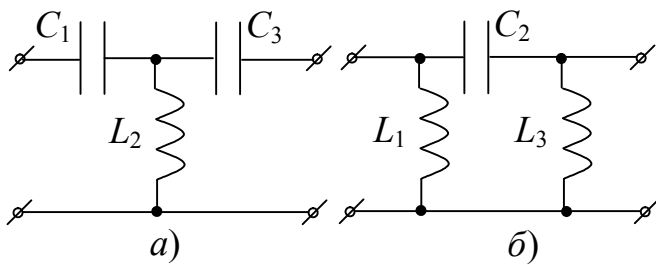


Рисунок 10.2 – Схеми ФВЧ Баттерворта: а – Т-подібна; б – П-подібна

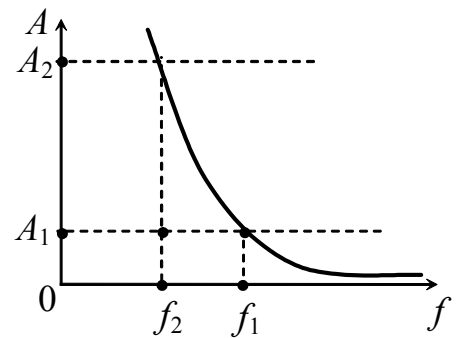


Рисунок 10.3 – Частотна характеристика $A(f)$

Задача 11. Надана частотна характеристика АЧХ $H(f)$ (рис. 11.1). Побудувати частотну характеристику загасання $A(f)$, визначити тип фільтра й зобразити його схему.

Розв'язок

На рис. 11.1 зображена характеристика $H(f)$ фільтра ВЧ Чебишева (СП знаходиться в діапазоні від f_1 до ∞ і функція у СП має рівнохвильовий характер). Порядок фільтра $n = 5$. На рис. 11.2 зображена схема ФВЧ Чебишева.

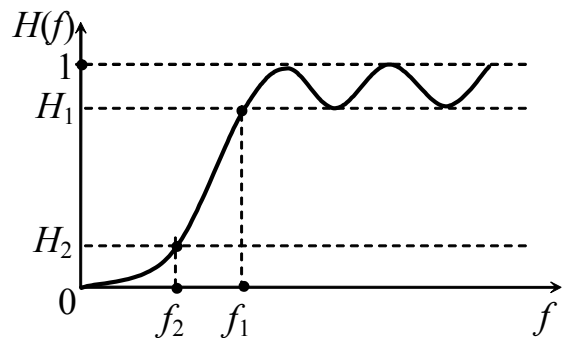


Рисунок 11.1 – Частотна характеристика $H(f)$

На рис. 11.3 зображена частотна характеристика $A(f)$.

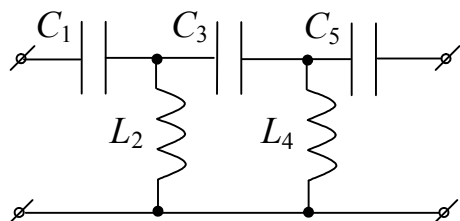


Рисунок 11.2 – Схема фільтра ВЧ Чебишева 5-го порядку

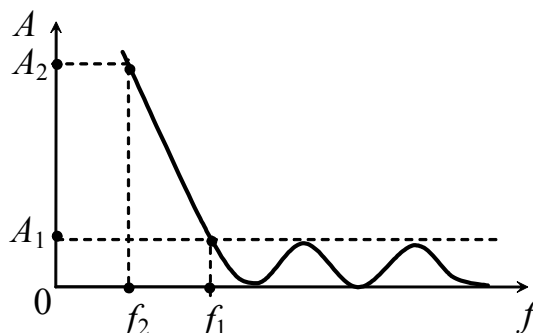


Рисунок 11.3 – Характеристика загасання фільтра Чебишева 5-го порядку

Амплітудні коректори

Задача 12. Зобразити схему Т-перекритого амплітудного коректора (АК), якщо графік загасання має вигляд рис. 12.1.

Розв'язок

Загальний вигляд схеми Т-перекритого АК зображений на рис. 12.2. З характеристики АК (рис. 12.1) знайдемо Z_1 і Z_2 .

Плеche Z_1 буде містити послідовно з'єднані індуктивність і опір, тому що графік модуля опору цього плеча повторює характеристику $A(f)$ коректора.

Схема плеча Z_2 є дуальною схемі плеча Z_1 .

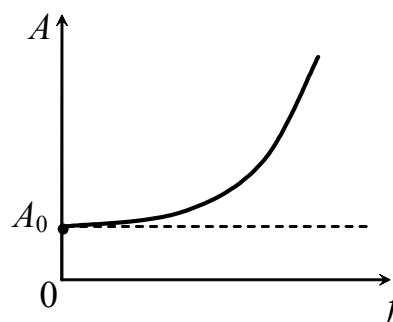


Рисунок 12.1 – Характеристика коректуючого кола

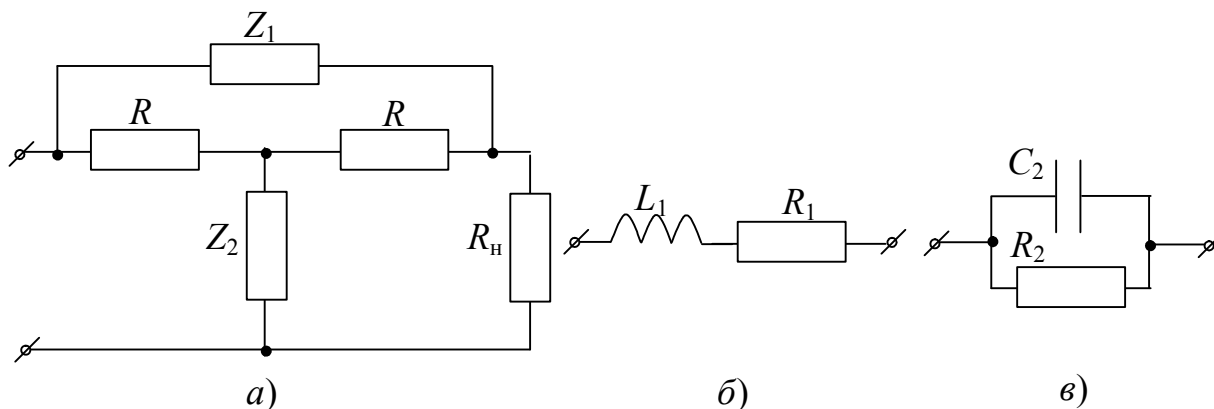


Рисунок 12.2 – Схема Т-перекритого АК:
а – загальний вигляд; б – плече Z_1 ; в – плече Z_2

З урахуванням отриманих Z_1 і Z_2 Т-перекрита схема АК буде мати вигляд рис. 12.3.

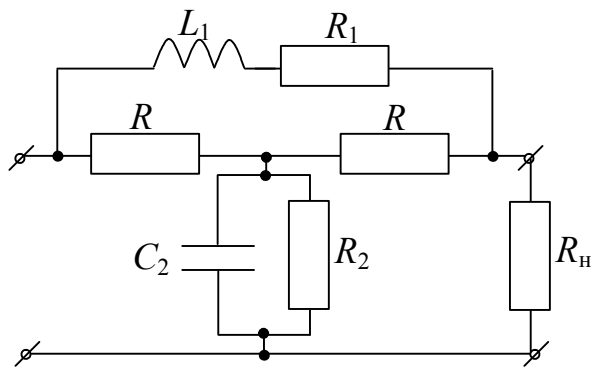


Рисунок 12.3 – Т-перекрита схема АК

Задача 13. Зобразити схему АК Г-образного з Т-входом і побудувати графік загасання, якщо плече Z_1 цього коректора має вигляд рис. 13.1.

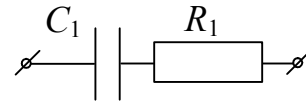


Рисунок 13.1 – Плече Z_1 АК

Розв'язок

Знаючи схему плеча АК Z_1 (рис. 13.1) і знаючи властивості АК можемо зобразити плече Z_2 (рис. 13.2). Загальний вигляд Г-образної схеми АК з Т-входом зображений на рис. 13.3.

З урахуванням отриманого плеча Z_2 (рис. 13.2) і заданого Z_1 (рис. 13.1), Г-образна схема АК з Т-входом буде мати вигляд рис. 13.4.

Графік загасання АК буде мати вигляд рис. 13.5.

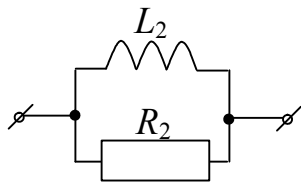


Рисунок 13.2 – Плече Z_2 АК

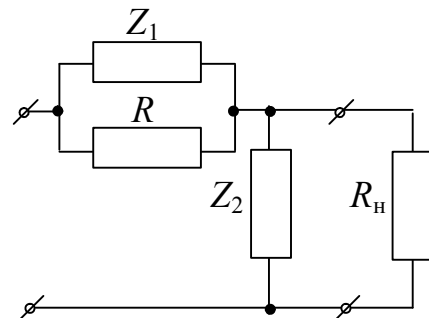


Рисунок 13.3 – Г-образна схема АК з Т-входом

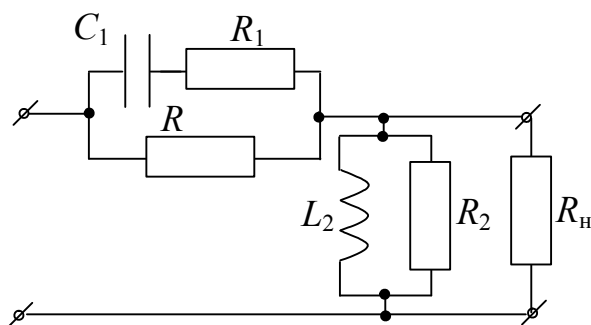


Рисунок 13.4 – Г-образна схема АК з Т-входом

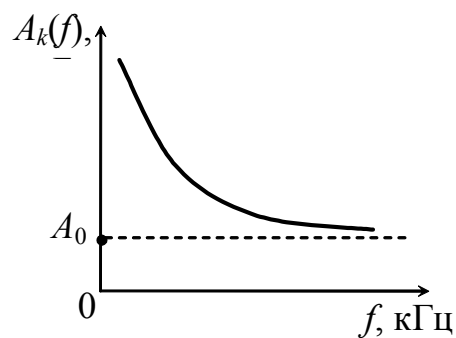


Рисунок 13.5 – Графік загасання АК

**Перетворення дискретних сигналів.
Типові дискретні сигнали в часовій області**

Задача 14. Зобразити послідовність $x(n) = \{2; 5; 8; 4; 6\}$ аналітично й графічно.

Розв'язок

На підставі властивостей одиничного дискретного імпульсу (ОДІ) $x(n) \cdot \delta(n - k) = x(k)$ одержимо:

$$x(n) = x(0) + x(1) + x(2) + x(3) + x(4);$$

де $x(0) = 2; x(1) = 5; x(2) = 8; x(3) = 4; x(4) = 6$.

Отже $x(n) = 2x(n) + 5x(n - 1) + 8x(n - 2) + 4x(n - 3) + 6x(n - 4)$.

Для дискретного сигналу $x(n)$ запишемо ряд

$$x(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) \cdot \delta(n - k).$$

Отриману послідовність $x(n)$ можна синтезувати за допомогою ОДІ.

$$x(n) = 2\delta(n) + 5\delta(n - 1) + 8\delta(n - 2) + 4\delta(n - 3) + 6\delta(n - 4).$$

Графічно числова послідовність зображена на рис. 14.1.

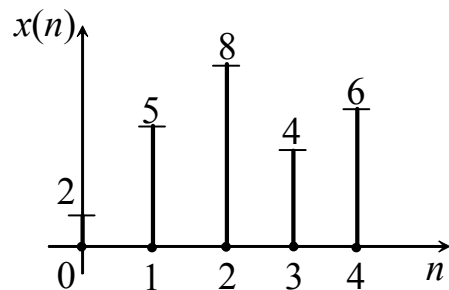


Рисунок 14.1 – Графічне зображення послідовності

Задача 15. За заданим графічним зображенням (рис. 15.1) записати дискретну послідовність і скласти її рівняння. Записати цю послідовність за допомогою ОДІ.

Розв'язок

Із графіка видно, що дискретна послідовність має вигляд:

$x(n) = \{3; 4; 10; 1; 2\}$. Звідси, на підставі властивостей ОДІ, одержимо:

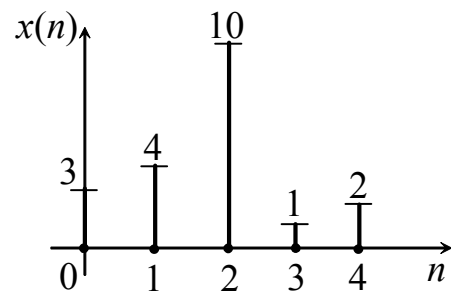


Рисунок 15.1 – Графічне зображення дискретної послідовності

$$x(n) = x(0) + x(1) + x(2) + x(3) + x(4) = 3x(n) + 4x(n-1) + 10x(n-2) + x(n-3) + 2x(n-4).$$

За допомогою ОДІ запишемо дискретну послідовність:

$$x(n) = 2\delta(n) + 4\delta(n-1) + 10\delta(n-2) + \delta(n-3) + 2\delta(n-4).$$

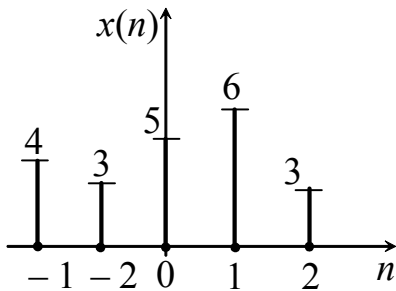


Рисунок 16.1 – Графічне зображення дискретної послідовності

$x(0) = 5; x(1) = 6; x(2) = 3$. Отже $x(n) = x(-2) + x(-1) + x(0) + x(1) + x(2) + x(3)$. За допомогою ОДІ запишемо дискретну послідовність:

$$x(n) = 4\delta(n+2) + 3\delta(n+1) + 5\delta(n) + 6\delta(n-1) + 3\delta(n-2).$$

Дискретні кола та їх опис

Задача 17. По заданому різницевому рівнянню зобразити схему дискретного кола й визначити його тип

$$y(n) = 2x(n) + 0,5x(n-2) + y(n-1).$$

Розв'язок

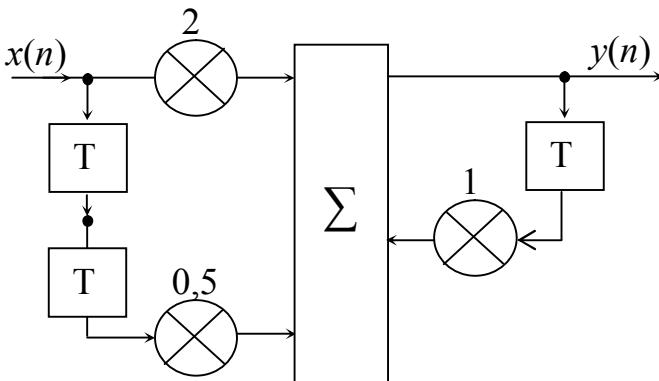


Рисунок 17.1 – Схема дискретного кола

Задача 16. Зобразити дискретну послідовність $x(n) = \{-4; -3; 5; 6; 3\}$ аналітично й графічно.

Розв'язок

Графічно числа послідовності має вигляд рис. 16.1.

Із графічного зображення рис. 16.1 видно, що $x(-2) = 4; x(-1) = 3;$

$x(0) = 5; x(1) = 6; x(2) = 3$. Отже $x(n) = x(-2) + x(-1) + x(0) + x(1) + x(2) + x(3)$. За допомогою ОДІ запишемо дискретну послідовність:

Для побудови схеми дискретного кола використовуємо елементи: суматор, реєстри зсуву й помножувачі (рис. 17.1).

З рис. 17.1 видно, що це коло зі зворотним зв'язком, тобто рекурсивний або НІХ фільтр (фільтр із нескінченною імпульсною характеристикою).

Задача 18. За заданою схемою кола (рис. 18.1) записати різницеве рівняння й визначити тип.

Розв'язок

З даної схеми (рис. 18.1) видно, що це коло без зворотного зв'язку. Отже, це нерекурсивний фільтр або КІХ фільтр (фільтр із кінцевою імпульсною характеристикою). Для отримання різничевого рівняння дискретного кола скористаємося формулою (2.3)

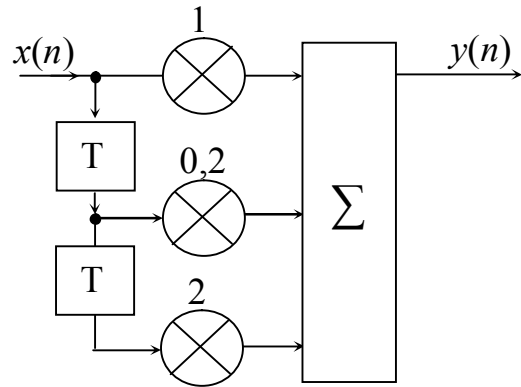


Рисунок 18.1 – Схема дискретного кола

$$y(n) = \sum_{m=0}^M a_m \cdot x(n - m).$$

З урахуванням формули (2.3) і заданої схеми рис. 18.1 різницеве рівняння дискретного кола буде мати вигляд:

$$y(n) = x(n) + 0,2x(n - 1) + 2x(n - 2).$$

Дискретна згортка

Задача 19. Визначити відгук дискретного кола $y(n)$, якщо дискретний вплив $x(n)$ та імпульсна функція ДК $g(n)$ зображені на рис. 19.1.

Розв'язок

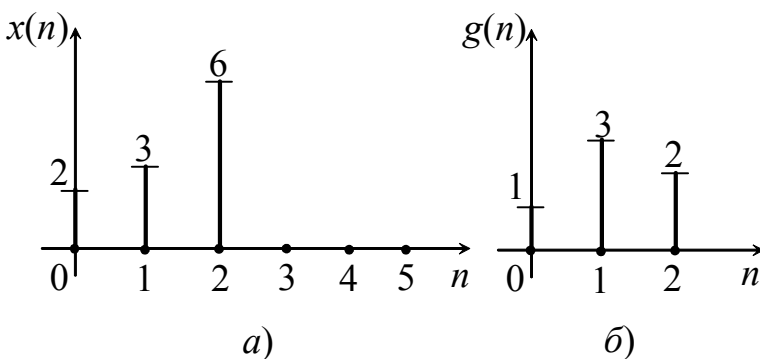


Рисунок 19.1 – Дискретна послідовність:

- a* – дискретний вплив $x(n)$;
- б* – імпульсна функція $g(n)$

На підставі рисунку 19.1 запишемо:

$$x(n) = \{2; 3; 6; 0; 0; 0\};$$

$$g(n) = \{1; 3; 2\}.$$

Для визначення відгуку скористаємося формулою:

$$y(n) = \sum_{k=0}^{\infty} x(n) \cdot g(n - k) \text{ або}$$

$$y(n) = x(n) * g(k).$$

Розв'язок запишемо у вигляді табл. 19.1.

Таблиця 19.1

n	-2	-1	0	1	2	3	4	5	
$x(n)$	0	0	2	3	6	0	0	0	$y(n)$
$g(n)$	2	3	1						2
$g(n-1) \rightarrow$	0	2	3	1					$6 + 3 = 9$
$g(n-2) \rightarrow$	0	0	2	3	1				$4 + 9 + 6 = 19$
$g(n-3) \rightarrow$	0	0	0	2	3	1			$6 + 18 = 24$
$g(n-4) \rightarrow$	0	0	0	0	2	3	1		12
$g(n-5) \rightarrow$	0	0	0	0	0	2	3	1	0

Дискретну згортку можна записати як: $y(n) = \{2; 9; 19; 24; 12\}$.

Дискретні сигнали в операторній області. Z-перетворення

Задача 20. Визначити z-зображення послідовності $x(n)$, якщо $x(n) = \{1; 2; 0; -1; -3; -5; 0; 0\}$, $n = 0, 1, 2, \dots$.

Розв'язок

Послідовність має кінцеву довжину $0 \leq n \leq 7$. Для розв'язку скористаємося формулою (2.7):

$$X(z) = Z\{x(n)\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) \cdot z^{-n},$$

де $n = 0, 1, 2, \dots, 7 \dots$

З умови $x(0) = 1; x(1) = 2; x(2) = 0; x(3) = -1; x(4) = -3; x(5) = -5; x(6) = 0; x(7) = 0$.

Згідно з (2.7) зробимо z-перетворення вихідної послідовності:

$$\begin{aligned} X(z) &= \sum_{n=0}^7 x(n) \cdot z^{-n} = 1 \cdot z^0 + 2 \cdot z^{-1} + 0 \cdot z^{-2} - 1 \cdot z^{-3} - 3 \cdot z^{-4} - 5 \cdot z^{-5} + 0 \cdot z^{-6} + 0 \cdot z^{-7} = \\ &= 1 + 2z^{-1} - z^{-3} - 3z^{-4} - 5z^{-5}. \end{aligned}$$

Операторні передавальні функції дискретних кіл

Задача 21. Записати різницеве рівняння дискретного кола, якщо його ОПФ має вигляд:

$$H(z) = \frac{1 + 0,5z^{-1}}{1 - 2z^{-1} + 1z^{-2}}.$$

Зобразити схему дискретного кола в часовій та операторній областях.

Розв'язок

За визначенням ОПФ дискретного кола – це відношення z-перетворень вихідної й вхідної послідовностей:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}.$$

За заданою ОПФ дискретного кола одержимо:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1 + 0,5z^{-1}}{1 - 2z^{-1} + 1z^{-2}};$$

$$X(z) \cdot [1 + 0,5z^{-1}] = Y(z) \cdot [1 - 2z^{-1} + 1z^{-2}].$$

Розкриємо дужки:

$$X(z) + 0,5X(z) \cdot z^{-1} = Y(z) - 2Y(z) \cdot z^{-1} + Y(z) \cdot z^{-2},$$

звідси

$$Y(z) = X(z) + 0,5X(z) \cdot z^{-1} + 2Y(z) \cdot z^{-1} - Y(z) \cdot z^{-2}.$$

Здійснимо перехід від зображення до оригіналу:

$$x(n) \Leftrightarrow X(z); \quad y(n) \Leftrightarrow Y(z); \quad x(n-k) \Leftrightarrow X(z) \cdot z^{-k}, \quad y(n-k) \Leftrightarrow Y(z) \cdot z^{-k}.$$

З огляду на це, одержимо різницеве рівняння дискретного кола:

$$y(n) = x(n) + 0,5x(n-1) + 2y(n-1) - y(n-2).$$

За цим різницеvim рівнянням можемо зобразити схему рис. 21.1.

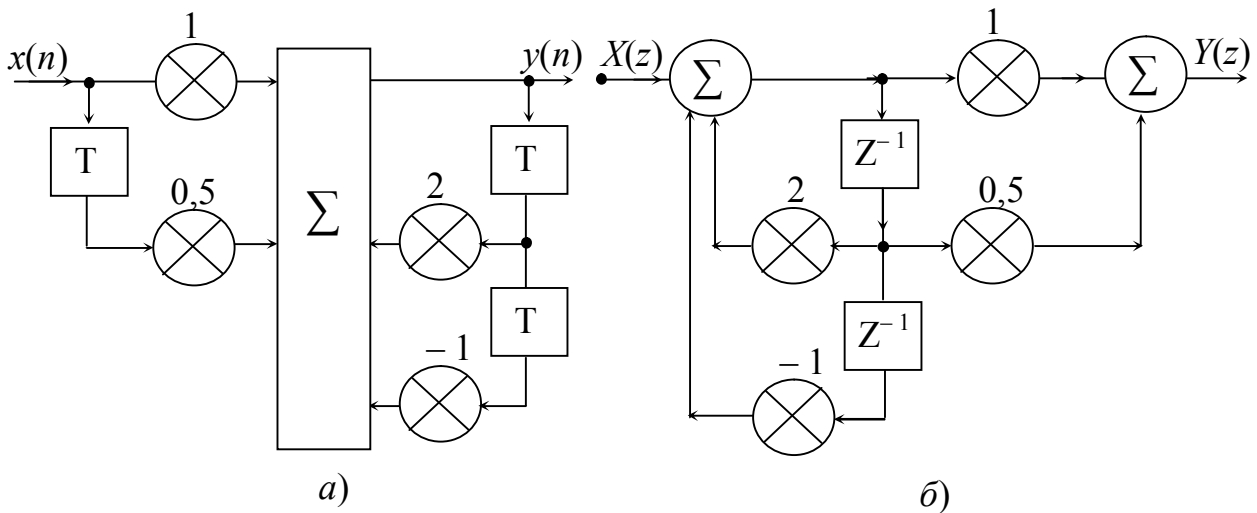


Рисунок 21.1 – Схема дискретного кола:
a – в часовій області; *б* – в операторній області

Задача 22. Одержати різницеве рівняння дискретного кола й визначити дискретну імпульсну функцію кола, якщо операторна передавальна функція має вигляд:

$$H(z) = 1 - 0,3z^{-1} + 2z^{-2}.$$

Розв'язок

Операторна передавальна функція дискретного кола є відношення відгуку $Y(z)$ до впливу $X(z)$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = a_0 + a_1z^{-1} + a_2z^{-2} + \dots + a_mz^{-M} = 1 - 0,3z^{-1} + 2z^{-2}.$$

Звідси $Y(z) = X(z)[1 - 0,3 \cdot z^{-1} + 2 \cdot z^{-2}]$. Розкриємо дужки:

$$Y(z) = X(z) - 0,3X(z) \cdot z^{-1} + 2X(z) \cdot z^{-2}.$$

Здійснимо перехід від зображення $Y(z)$ до оригіналу $y(n)$. Одержимо різницеве рівняння дискретного кола

$$y(n) = x(n) - 0,3x(n-1) + 2x(n-2).$$

За цим різницеvim рівнянням можемо визначити імпульсну функцію дискретного кола. Для цього скористаємося визначенням імпульсної функції:

$$g(n) = y(n) \Big|_{x(n)=\delta(n)}.$$

$$\begin{aligned}
g(0) &= y(0) = x(0) - 0,3x(0-1) + 2x(0-2) = \delta(0) - 0,3\delta(0-1) + 2\delta(0-2) = 1; \\
g(1) &= y(1) = x(1) - 0,3x(1-1) + 2x(1-2) = \delta(1) - 0,3\delta(1-1) + 2\delta(1-2) = -0,3; \\
g(2) &= y(2) = x(2) - 0,3x(2-1) + 2x(2-2) = \delta(2) - 0,3\delta(2-1) + 2\delta(2-2) = 2; \\
g(3) &= y(3) = x(3) - 0,3x(3-1) + 2x(3-2) = \delta(3) - 0,3\delta(3-1) + 2\delta(3-2) = 0; \\
g(4) &= y(4) = x(4) - 0,3x(4-1) + 2x(4-2) = \delta(4) - 0,3\delta(4-1) + 2\delta(4-2) = 0.
\end{aligned}$$

Імпульсну функцію дискретного кола можна записати: $g(n) = \{1; -0,3; 2\}$. Вихідне рівняння ДС $y(n)$ є рівнянням кола з кінцевою імпульсною характеристикою (КІХ).

Задача 23. За заданим різницеvim рівнянням дискретного кола визначити імпульсну функцію: $y(n) = x(n) + 2x(n-1) - 0,2y(n-1)$.

Розв'язок

Імпульсна функція (ІФ) $g(n) = y(n)|_{x(n)=\delta(n)}$. Підставивши у вихідну рівність умову (ІФ), одержимо:

$$\begin{aligned}
g(0) &= y(0) = x(0) + 2x(0-1) - 0,2y(0-1) = \delta(0) + 2\delta(0-1) - 0,2y(0-1) = 1; \\
g(1) &= y(1) = x(1) + 2x(1-1) - 0,2y(1-1) = \delta(1) + 2\delta(1-1) - 0,2y(1-1) = 1,8; \\
g(2) &= y(2) = x(2) + 2x(2-1) - 0,2y(2-1) = \delta(2) + 2\delta(2-1) - 0,2y(2-1) = -0,36; \\
g(3) &= y(3) = x(3) + 2x(3-1) - 0,2y(3-1) = \delta(3) + 2\delta(3-1) - 0,2y(3-1) = 0,072; \\
g(4) &= y(4) = x(4) + 2x(4-1) - 0,2y(4-1) = \delta(4) + 2\delta(4-1) - 0,2y(4-1) = -0,0144; \\
g(5) &= y(5) = x(5) + 2x(5-1) - 0,2y(5-1) = \delta(5) + 2\delta(5-1) - 0,2y(5-1) = 0,0028.
\end{aligned}$$

і т. д.

Імпульсна характеристика дискретного кола $g(n) = \{1; 1,8; -0,36; 0,072; -0,0144; 0,0028\dots\}$. З розрахунків видно, що задане різницеve рівняння належить колу з нескінченною імпульсною характеристикою (НІХ).

Навчальне видання

КАЛАШНИКОВ Анатолій Юрійович
ШКУЛПА Альфред Васильович
ГОРЕЛІК Світлана Михайлівна

Модуль 4

Перетворення сигналів

Частина 1 і 2

Навчальний посібник
для бакалаврів

Редактор
Комп'ютерне верстання

Кодрул Л. А.
Корнійчук Є. С.

Здано в набір 23.03.2012 Підписано до друку 28.04.2012
Формат 60/88/16 Зам. № 4833
Тираж 500 прим. Обсяг: 6,25 ум. друк. арк.
Віддруковано на видавничому устаткуванні фірми RISO
у друкарні редакційно-видавничого центру ОНАЗ ім. О.С. Попова
ОНАЗ, 2012