

Министерство транспорта и связи Украины

Государственный департамент по вопросам связи и информатизации  
Одесская национальная академия связи им. А. С. Попова

---

Кафедра теории электрических цепей



## ТЕОРИЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ И СИГНАЛОВ

Модуль 1

**Часть 1 Анализ электрических цепей при постоянных и гармонических воздействиях**  
**Часть 2 Методическое указание к лабораторным работам**

Учебное пособие  
для бакалавров

телекоммуникация  
телекоммуникационные системы и сети  
информационные сети связи

Одесса 2006

УДК 621372

План УМИ 2006 г.

Учебное пособие разработано авторами: *Арбузникова Н.Ф., Новиков А.А., Калашиников А.Ю., Шкулина А.В.*

Учебное пособие рассмотрено и одобрено на заседании кафедры

Протокол № 4 от « 5 » января 2006 г

Заведующий кафедрой

*Шкулина А.В.*

Учебное пособие рассмотрено и одобрено к изданию методическим советом факультета информационные сети

Протокол № 16 от « 29 » июня 2006 г

Декан факультета ИС

(И. В. Стрелковская)

## СОДЕРЖАНИЕ

Введение. Краткое содержание курса.....	5
ЧАСТЬ 1 Анализ электрических цепей при постоянных и гармонических воздействиях.....	6
Содержание модуля 1.....	6
1 Основные понятия и законы теории электрических цепей.....	8
1.1 Величины, характеризующие электрические процессы.....	8
1.2 Классификация электрических цепей.....	10
1.3 Идеальные неавтономные двухполюсные элементы цепей.....	12
1.4 Идеальные автономные элементы цепей.....	14
1.5 Законы Кирхгофа.....	15
1.6 Схемы замещения реальных цепей.....	16
1.7 Схемы замещения с зависимыми источниками.....	17
1.8 Основы топологии цепей.....	18
1.9 Основные принципы и теоремы теории электрических цепей.....	20
1.10 Эквивалентные преобразования однотипных элементов.....	24
2 Методы анализа линейных электрических цепей при постоянных воздействиях.....	27
2.1 Схемы замещения при постоянных воздействиях.....	27
2.2 Метод уравнений Кирхгофа.....	27
2.3 Метод узловых напряжений.....	29
2.4 Метод наложения.....	31
2.5 Метод эквивалентного генератора.....	32
2.6 Метод контурных токов.....	34
3 Режим гармонических колебаний в линейных электрических цепях.....	35
3.1 Гармонические колебания. Основные понятия и определения.....	35
3.2 Спектральное (частотное) представление гармонических колебаний.....	36
3.3 Гармонические колебания в пассивных элементах.....	37
3.4 Векторное представление гармонических колебаний одной частоты.....	42
4 Метод комплексных амплитуд при анализе линейных электрических цепей.....	44
4.1 Представление гармонических колебаний с помощью комплексных чисел.....	44
4.2 Уравнения пассивных элементов в комплексной форме.....	45
4.3 Основные законы теории электрических цепей в комплексной форме.....	46
4.4 Система узловых уравнений для комплексных амплитуд.....	47
4.5 Анализ цепей со связанными индуктивностями.....	48
4.5.1 Магнитные связи в электрических цепях.....	48
4.5.2 Последовательное соединение связанных индуктивностей.....	50

4.5.3	Особенности анализа магнитно связанных цепей. Развязка индуктивных связей.....	52
4.6	Баланс мощностей.....	53
4.7	Режимы работы источников и условия передачи максимальной мощности.....	55
4.8	Порядок расчета линейных электрических цепей методом комплексных амплитуд.....	57
5	Анализ нелинейных электрических цепей при постоянных воздействиях.....	59
5.1	Элементы и их характеристики.....	59
5.2	Способы описания характеристик нелинейных элементов.....	60
5.3	Методы анализа нелинейных цепей.....	61
	Список рекомендованной литературы.....	64
	ЧАСТЬ 2 Методические указания к лабораторным работам.....	65
	Лабораторная работа № 1. Исследование автономных двухполюсников.....	65
	Лабораторная работа № 2. Исследование резистивной цепи с двумя источниками .....	67
	Лабораторная работа № 3. Исследование линейных электрических цепей при гармонических воздействиях.....	69
	Лабораторная работа № 4. Исследование входных функций цепей ( $RL$ , $RC$ , $RLC$ ) .....	72
	ПРИЛОЖЕНИЕ А Тест - вопросы к лабораторным работам.....	77
	ПРИЛОЖЕНИЕ Б Примеры решений задач по модулю 1.....	82

## ВВЕДЕНИЕ

### Краткое содержание курса

Курс „Теория электрических цепей и сигналов” (ТЭЦС) является базовым курсом, читается на всех факультетах технических специальностей Одесской национальной академии связи им. А.С. Попова. Назначение курса состоит в том, чтобы заложить основы для последующих спецкурсов, связанных с телекоммуникационными системами, сетями, теле- и радиосвязью.

Для успешного усвоения курса ТЭЦС необходимы знания по высшей математике, физике, информатике. Задача курса – дать понимание основных идей, принципов и методов анализа и синтеза электрических цепей и сигналов.

Развитие современных информационных технологий не позволяет ограничиваться только аналоговыми цепями и сигналами, поэтому в программу включены основы дискретных систем и сигналов.

Настоящая программа курса несколько изменена и дополнена. В ней учтена новая кредитно-модульная система образования. Разделы курса разбиты на шесть модулей. В каждом модуле имеется несколько тем, по которым читаются лекции, проводятся лабораторно-практические занятия. Итогом каждого модуля является зачет или экзамен.

**Первый модуль** – „Анализ электрических цепей при постоянных и гармонических воздействиях” – содержит основные понятия и законы электрических цепей, анализ линейных электрических цепей при постоянных и гармонических воздействиях, анализ нелинейных электрических цепей при постоянных воздействиях.

**Второй модуль** – „Частотные методы анализа электрических цепей” – посвящён описанию электрических цепей с помощью комплексных функций, резонансным явлениям в электрических цепях, анализу и синтезу реактивных двухполюсников, частотным методам анализа (преобразования Фурье).

**Третий модуль** – „Временные и операторные методы анализа электрических цепей” – содержит анализ переходных процессов в электрических цепях, операторные функции цепей, свойства преобразования Лапласа, связь частотных и временных характеристик цепей.

**Четвёртый модуль** – „Аналоговая обработка сигналов” – содержит: математические описания сигналов, анализ откликов нелинейных цепей при гармонических воздействиях, теорию четырёхполюсников и частотно - избирательных цепей.

**Пятый модуль** – „Дискретные цепи и сигналы” – посвящён основам теории дискретных сигналов и цепей.

**Шестой модуль** – „Основы цифровой фильтрации” – содержит синтез дискретных цепей.

# ЧАСТЬ 1

## Анализ электрических цепей при постоянных и гармонических воздействиях

### Содержание модуля 1

Вид занятий	Лк	Пр	Лб	Сам. раб.	Итого
Количество часов	16	16	8	43	83

**Вступление.** История развития электротехники, радиотехники, электро-  
связи. Учённые, которые внесли значительный вклад в развитие теории элек-  
трических цепей и сигналов (ТЭЦС). Задачи курса ТЭЦС; его роль в основных  
технических курсах; связь ТЭЦС с другими техническими дисциплинами.

#### 1 Основные понятия и законы теории электрических цепей

Основные определения: цепь, схема, эквивалентная схема, схема замещения.  
Классификация электрических цепей. Независимые, зависимые источники.  
Элементы, уравнения элементов. Законы Ома и Кирхгофа.  
Основные принципы и теоремы электрических цепей.  
Основы топологии электрических цепей. Эквивалентные преобразования одно-  
типных элементов.

#### 2 Анализ линейных резистивных цепей. Методы расчета цепей.

3 Линейные электрические цепи при гармонических воздейст-  
виях. Свойства элементов  $R$ ,  $L$ ,  $C$  при гармонических воздействиях. Временные  
диаграммы, векторные диаграммы, частотные зависимости.

4 Основы символического метода расчёта электрических цепей.  
Законы Ома и Кирхгофа для комплексных амплитуд. Анализ цепей с индуктив-  
ными связями. Понятие комплексной мощности. Определение максимальной  
мощности в нагрузке.

5 Анализ нелинейных электрических цепей при постоянном воз-  
действии.

#### Лабораторные работы.

- 1 Исследование автономных двухполюсников.
- 2 Исследование резистивной цепи с двумя источниками.
- 3 Исследование линейных электрических цепей при гармонических воздейст-  
виях.
- 4 Исследование входных функций цепей ( $RC$ ,  $RL$ ,  $RLC$ ).

#### Комплексное задание.

- 1 Расчет резистивной цепи с двумя источниками (метод наложения, метод узлов-  
вых напряжений).

2 Расчет цепи с элементами  $R$ ,  $L$ ,  $C$  методом комплексных амплитуд.

3 Расчет цепи с нелинейными элементами.

Предлагаемое пособие содержит краткий курс лекций, методические руководства к лабораторным работам, примеры задач с решениями, тест-вопросы по каждой лабораторной работе, список литературы.

# 1 ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ЗАКОНЫ ТЕОРИИ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ

*Электрической цепью* называют совокупность электротехнических устройств, в которых, при определенных условиях, может протекать электрический ток. К таким устройствам относятся резисторы, катушки индуктивности, трансформаторы, конденсаторы, машинные генераторы, аккумуляторные батареи, электронные лампы, транзисторы, проводные линии, антенны и другие электрические устройства.

## 1.1 Величины, характеризующие электрические процессы

Под *электрическим током* понимают процесс упорядоченного движения электрических зарядов. В теории электрических цепей в качестве характеристик этого процесса используют следующие величины: величина тока, напряжения, мощности и энергии.

**Величина тока.** *Величиной* (или значением) *тока* называется величина  $i$ , равная количеству электричества (заряду), переносимому через поперечное сечение проводника в единицу времени.

В международной системе единиц СИ величина тока измеряется в амперах (А), количество электричества (заряд) – в кулонах (Кл) или ампер-секундах (А·с), а время – в секундах (с).

Величина тока в момент  $t$  определяется по формуле

$$i = dq / dt, \quad (1.1)$$

где  $dq$  – бесконечно малое количество электричества, переносимое через поперечное сечение проводника за бесконечно малый промежуток времени от  $t$  до  $t + dt$ . Другими словами, величина тока, определяется как производная от заряда по времени.

Направлением тока в цепи условились считать направление движения положительных зарядов. Хотя величина тока представляет собой скалярную величину, ей тоже приписывают направление, указываемое стрелкой (рис. 1.1).

Рисунок 1.1 –  
Элемент электрической цепи

Ток, не изменяющийся во времени, называется *постоянным*; постоянный ток обозначается буквой  $I$ ; ток же, изменяющийся во времени, называется *переменным*. Значение тока в любой момент времени называется *мгновенным значением тока* и обозначается как функция  $i(t)$ .

**Напряжение.** *Напряжением* между точками 1 и 2 называется величина  $u$ , равная энергии для переноса единичного положительного заряда через рассматриваемый участок из точки 1 в точку 2.

В международной системе единиц СИ напряжение измеряется в вольтах (В), работа или энергия – в джоулях (Дж).

Напряжение определяется как производная по заряду от энергии  $w$  переноса заряда  $q$ , т. е.

$$u = dw/dq. \quad (1.2)$$

Напряжение может быть величиной положительной и отрицательной. Напряжение, отсчитываемое в направлении от точки 1 к точке 2, обозначается через  $u_{12}$  и принимается положительным, если при переносе единичного положительного заряда в этом направлении затрачивается энергия.

Напряжение, не изменяющееся во времени, называется *постоянным* и обозначается через  $U$ ; напряжение, изменяющееся во времени, называется *переменным*; значение напряжения в любой момент времени называется *мгновенным значением напряжения* и обозначается как функция  $u(t)$ .

В дальнейшем при изложении курса большими буквами в основном будем обозначать величины и параметры, не зависящие от времени ( $U, I$ ), а малыми – величины и параметры, зависящие от времени [ $u(t), i(t)$ ].

**Условно положительные направления тока и напряжения.** Прежде чем анализировать электрическую цепь, необходимо выбрать и указать на чертеже цепи (схеме) условно положительные направления для всех токов и напряжений, входящих в расчет. Этот выбор можно сделать совершенно произвольно. Обычно на всех элементах цепи (кроме источников) условно положительное направление напряжения берут совпадающим с условно положительным направлением тока.

Положительное направление тока указывается стрелкой. Положительное направление напряжения указывается стрелкой, обращенной острием к „минусу”.

После расчета цепи можно определить действительные направления токов и напряжений следующим образом. Если в результате расчета для тока, проходящего в данный момент через рассматриваемый участок цепи, получится положительная величина, это будет означать, что „действительное” направление тока (т. е. направление движения положительных зарядов) совпадает с выбранным. Если же получится отрицательная величина, „действительное” направление тока будет противоположно выбранному. Аналогично обстоит дело и с напряжением.

**Мгновенная мощность и энергия.** *Мощностью* называется величина, равная работе, производимой в единицу времени.

В международной системе единиц СИ электрическая мощность измеряется в ваттах (Вт).

В общем случае, если в равные промежутки времени производится неодинаковая работа, пользуются понятием „мгновенная мощность”.

*Мгновенной мощностью*  $p$  называется скорость изменения энергии в данный момент времени, т. е. производная энергии  $w$  по времени:

$$p = dw/dt. \quad (1.3)$$

В случае постоянного тока мощность легко определить, исходя из следующих соображений.

На перенос единичного заряда через участок цепи затрачивается работа, равная напряжению  $U$ . В единицу времени переносится заряд, численно равный току  $I$ . На перенос такого заряда будет затрачена работа  $UI$ . Следовательно, мощность

$$P = UI. \quad (1.4)$$

Таким образом, при воздействии постоянным током мощность определяется как произведение значений напряжения и тока. Соответственно энергия за промежуток времени от  $t_1$  до  $t_2$  определится формулой

$$w = UI(t_2 - t_1). \quad (1.5)$$

В качестве единицы электрической энергии применяют ватт-секунду (Вт-с), равную одному джоулю (Дж).

В случае переменного тока мгновенная мощность определяется также просто. Перемножив почленно равенства (1.1) и (1.2) и учтя формулу (1.3), найдем

$$p = ui. \quad (1.6)$$

Таким образом, мгновенная мощность равна произведению мгновенных значений напряжения и тока.

За промежуток времени от  $t_1$  до  $t_2$  общее количество энергии

$$w = \int_{t_1}^{t_2} p dt = \int_{t_1}^{t_2} u i dt. \quad (1.7)$$

Заметим, что величины  $p$  и  $w$  могут быть как положительными, так и отрицательными. Согласно формулам (1.4)...(1.7), мощность и энергия положительны при одинаковых знаках напряжения и тока и отрицательны – при неодинаковых знаках. В первом случае энергия поступает из цепи в рассматриваемый участок, во втором – из участка в цепь.

## 1.2 Классификация электрических цепей

При анализе реальных электрических цепей их заменяют (“замещают”) совокупностью идеальных элементов, каждому из которых приписывают определенные свойства. Идеальные элементы соединяются друг с другом с помощью зажимов, которые называют также **полюсами**, или **узлами**. Минимальное количество зажимов равно двум, поэтому такие элементы называют **двухполюсниками**; при этом ток, входящий в один полюс, равен току, выходящему из другого полюса. Двухполюсниками являются схемы замещения резисторов, катушек индуктивности, конденсаторов, генераторов с двумя зажимами и т.п. Графически двухполюсник обозначается так же, как был обозначен ранее участок цепи (см. рис. 1.1).

Цепь, которая может соединяться и взаимодействовать с другими цепями только через три, четыре и т. д. полюса, называется соответственно **трехполюсником**, **четырёхполюсником** и т. д. Так, например, электронную лампу и транзистор можно отнести к трехполюсникам. Их можно считать и четырёхпо-

люсниками, если представить общий полюс как два полюса, соединенные друг с другом.

Цепь общего вида, которая может соединяться и взаимодействовать с другими цепями только через  $N$  полюсов, называется ***N-полюсником***, или ***многополюсником***.

Очевидно, что простейшим частным случаем  $N$ -полюсника является двухполюсник.

Двухполюсник полностью характеризуется зависимостью между напряжением на его узлах и проходящим через него током. По виду этой зависимости двухполюсники делятся на линейные и нелинейные.

***Линейным*** двухполюсником называется такой, у которого зависимость между напряжением и током – линейная. В противном случае двухполюсник называется ***нелинейным***.

Двухполюсники можно классифицировать еще по многим признакам. Здесь мы ограничимся классификацией по энергетическим признакам. Согласно этой классификации, двухполюсники делятся, прежде всего, на неавтономные и автономные.

***Неавтономным*** называется двухполюсник, у которого после отключения его от цепи напряжение на зажимах отсутствует, а при соединении зажимов между собой в них отсутствует ток.

***Автономным*** же двухполюсником называется такой, который, будучи отключенным от цепи, самостоятельно (автономно) создает напряжение на своих зажимах, а при их соединении через зажимы протекает ток. Другими словами, автономный двухполюсник является электрической цепью, содержащей независимые источники энергии.

Неавтономные двухполюсники в свою очередь можно разделить на пассивные и активные.

***Пассивным*** называется неавтономный двухполюсник, полная энергия которого за время от  $t = 0$  (если при  $t < 0$  воздействие отсутствует) до  $t \rightarrow \infty$  неотрицательна:

$$w = \int_0^{\infty} u(t) \cdot i(t) dt \geq 0. \quad (1.8)$$

Пассивный двухполюсник, таким образом, может только получать (или не получать) энергию от цепи, но не давать ее в цепь.

***Активным*** будем называть неавтономный двухполюсник, подчиняющийся следующему условию: полная энергия двухполюсника, включенного в цепь, за время от  $t = 0$  (если при  $t < 0$  воздействие отсутствует) до  $t \rightarrow \infty$  отрицательна, т. е.

$$w = \int_0^{\infty} u(t) i(t) dt < 0. \quad (1.9)$$

Такой двухполюсник дает энергию в цепь, подобно автономному двухполюснику, однако между ними есть существенная разница. Автономный двухполюсник создает напряжение на своих зажимах даже при отключении его от

цепи, активный же двухполюсник (при данном определении) имеет напряжение на зажимах только до тех пор, пока он включен в цепь.

Активный двухполюсник представляет собой некий усилитель с совмещенным входом и выходом, который возвращает в цепь больше энергии, чем от нее получает (за счет какого-то внешнего источника).

### 1.3 Идеальные неавтономные двухполюсные элементы цепей

К неавтономным двухполюсным элементам цепи относятся:

- 1) сопротивление и проводимость;
- 2) индуктивность и обратная индуктивность;
- 3) емкость и обратная емкость.

**Сопротивление и проводимость.** *Элементом сопротивления* (резистивным элементом), или *сопротивлением* называется двухполюсник, который способен рассеивать электромагнитную энергию и который можно описать уравнением

$$u(t) = R \cdot i(t), \quad (1.10)$$

где величина  $R$  не зависит ни от напряжения, ни от тока. Величина  $R$  также называется сопротивлением.

Примером реального устройства, приближающегося по своим свойствам к элементу сопротивления, может служить так называемый резистор. В таком устройстве электрическая энергия, поступающая из цепи, преобразуется преимущественно в тепловую энергию.

Элемент сопротивления изображается символом, показанным на рис. 1.2, а. Стрелки здесь указывают положительные направления напряжения и тока, которые принимаем одинаковыми для обеих величин.

Равенство (1.10) можно представить и в другой форме:

$$i(t) = G \cdot u(t), \quad (1.11)$$

где

$$G = 1/R. \quad (1.12)$$

Характеризуя двухполюсник равенством (1.11) вместо равенства (1.10), получим элемент проводимости, или проводимость. Величина  $G$  называется *проводимостью*.

В системе международных единиц СИ сопротивление измеряется в омах (Ом), а проводимость – в симменсах (См).

Ввиду того, что сопротивление и проводимость отражают одни и те же свойства физического объекта, элемент проводимости обозначается тем же символом (см. рис. 1.2, а), что и элемент сопротивления.

Рисунок 1.2 – Пассивные элементы электрических цепей

же символом (см. рис. 1.2, а), что и элемент сопротивления.

За время, например от 0 до  $t$  элемент сопротивления или проводимости получает или отдает энергию, равную

$$w = \int_0^t u(t) \cdot i(t) dt = R \int_0^t i^2(t) dt = G \int_0^t u^2(t) dt. \quad (1.13)$$

В частности, при постоянном воздействии  $u(t) = U$ ,  $i(t) = I$  энергия

$$w = R \cdot I^2 t = G \cdot U^2 t. \quad (1.14)$$

Сопротивление  $R$  может быть положительным и отрицательным (тот же знак может иметь проводимость  $G$ ).

Как видно из формулы (1.13), для элементов положительного сопротивления и положительной проводимости энергия положительна. Следовательно, эти элементы – пассивные, получающие энергию из цепи, в которую они входят. Поскольку данные элементы получены путем идеализации резистора, с их помощью учитываются необратимые потери энергии (рассеяние в виде тепла, излучение и т. п.).

Для элементов же отрицательного сопротивления и отрицательной проводимости энергия отрицательна. Следовательно, эти элементы – активные, дающие энергию в цепь.

**Индуктивность и обратная индуктивность.** *Элементом индуктивности (индуктивным элементом)*, или *индуктивностью* называется двухполюсник, у которого напряжение на его зажимах и протекающий по нему ток связаны зависимостью

$$u_L(t) = L \frac{di_L}{dt}, \quad (1.15)$$

где величина  $L$  не зависит ни от напряжения, ни от тока. Индуктивность – элемент, способный накапливать магнитную энергию.

В настоящее время известны способы реализации элемента индуктивности в виде устройства, составленного из транзисторов, резисторов и конденсаторов.

Графически элемент индуктивности изображается символом, показанным на рис. 1.2, б. Стрелки здесь указывают положительные направления напряжения и тока, которые принимаем одинаковыми для обеих величин.

Написав равенство (1.15) в другой форме –

$$i_L(t) = \Gamma \int u_L(t) dt, \quad (1.16)$$

где

$$\Gamma = 1/L,$$

придем к элементу, называемому *элементом обратной индуктивности*, или *обратной индуктивностью*. Величина  $\Gamma$  называется обратной индуктивностью.

В системе международных единиц СИ индуктивность измеряется в генри ( $\Gamma$ ), а обратная индуктивность – в 1/генри ( $1/\Gamma$ ).

Ввиду того, что элементы индуктивности и обратной индуктивности соответствуют одному и тому же физическому объекту, элемент обратной индуктивности обозначают тем же графическим символом, что и элемент индуктивности (см. рис. 1.2, б).

За время от  $-\infty$  до  $t$  элемент индуктивности (или обратной индуктивности) получает или отдает энергию

$$w = \int_{-\infty}^t u(t) \cdot i(t) dt = \frac{Li^2(t)}{2} = \frac{i^2(t)}{2\Gamma}. \quad (1.17)^*$$

\* Равенство (1.17) предлагаем самостоятельно доказать, воспользовавшись равенством (1.15).

Предполагается, что при  $t \rightarrow -\infty$  ток равен нулю. Данная формула показывает, что полная энергия в индуктивности зависит только от мгновенного значения тока и не зависит от того, как этот ток устанавливался. Индуктивность  $L$  может быть положительной и отрицательной (тот же знак имеет и обратная индуктивность).

**Емкость и обратная емкость.** *Элементом емкости* (емкостным элементом), или *емкостью* называется двухполюсник, у которого величина тока и приложенное напряжение связаны равенством

$$i_C(t) = C \frac{du_C}{dt}, \quad (1.18)$$

где величина  $C$  не зависит ни от напряжения, ни от тока. Величина  $C$  называется емкостью. Емкость – элемент, способный накапливать электрическую энергию.

К элементу емкости приближается по свойствам, например, электрический конденсатор. В таком устройстве энергия преимущественно запасается в виде энергии электрического поля.

Графически элемент емкости изображается символом, показанным на рис. 1.2, в. Здесь, как и ранее, положительные направления напряжения и тока выбраны одинаковыми.

Представив уравнение (1.18) в форме

$$u_C(t) = S \int i_C(t) dt, \quad (1.19)$$

где

$$S = 1/C, \quad (1.20)$$

придем к элементу, называемому *элементом обратной емкости*, или *обратной емкостью*. Величину  $S$  называют обратной емкостью.

В системе международных единиц СИ емкость измеряется в фарадах (Ф), а обратная емкость – в 1/фараду (1/Ф).

Так как элементы емкости и обратной емкости соответствуют одному и тому же физическому объекту, элемент обратной емкости изображается тем же символом, что и элемент емкости (см. рис. 1.2, в).

Полная энергия, которую элемент емкости (или обратной емкости) получает или отдает за время от  $-\infty$  до  $t$ ,

$$w = \int_{-\infty}^t u(t) \cdot i(t) dt = \frac{Cu^2(t)}{2} = \frac{u^2(t)}{2S}. \quad (1.21)^*$$

Предполагается, что при  $t \rightarrow -\infty$  напряжение равно нулю. Как видим, полная энергия в емкости зависит только от мгновенного значения напряжения и не зависит от того, как оно устанавливалось. Емкость  $C$  может быть положительной и отрицательной (тот же знак имеет и обратная емкость  $S$ ).

#### 1.4 Идеальные автономные элементы цепи

\* Равенство (1.21) предлагаем самостоятельно доказать, воспользовавшись равенством (1.18).

К автономным идеальным элементам цепи относятся идеальный источник напряжения и идеальный источник тока.

**Идеальный источник напряжения.** *Идеальным источником напряжения* называется автономный двухполюсник, у которого напряжение между узлами не зависит от протекающего через них тока, т. е.

$$u(t) = e(t). \quad (1.22)$$

Величину  $e(t)$  называют задающим напряжением, или напряжением источника.

Если к источнику напряжения  $e(t)$  присоединить элемент сопротивления  $R$ , ток в последнем выразится формулой

$$i(t) = e(t)/R,$$

записанной на основании (1.10). При уменьшении величины  $R$  этот ток будет расти. В предельном случае, когда  $R = 0$ , ток становится бесконечно большим. Но и тогда напряжение между узлами элемента сопротивления остается равным  $e(t)$ . Поэтому такой режим работы источника напряжения недопустим.

Графически идеальный источник напряжения изображается символом, показанным на рис. 1.3.

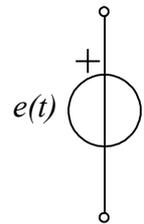


Рисунок 1.3 –  
Идеальный источник напряжения

По своим свойствам к идеальному источнику напряжения приближается стартерный кислотный аккумулятор, его внутреннее сопротивление может быть равным 0,01 Ом.

**Идеальный источник тока.** *Идеальным источником тока* называется автономный двухполюсник, у которого ток не зависит от напряжения на его зажимах, т. е.

$$i(t) = j(t). \quad (1.23)$$

Величину  $j(t)$  называют *задающим током*, или *током источника*. Если к источнику тока  $j(t)$  присоединить элемент проводимости  $G$ , напряжение на последнем выразится формулой

$$u(t) = j(t)/G,$$

записанной на основании (1.11). При уменьшении величины  $G$  это напряжение будет расти. В предельном случае, когда  $G = 0$ , напряжение становится бесконечно большим. Но и тогда ток между узлами элемента проводимости остается равным  $j(t)$ . Поэтому такой режим работы источника тока недопустим.

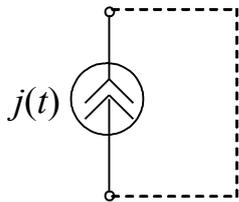


Рисунок 1.4 –  
Идеальный источник тока

К идеальному источнику тока приближается по своим свойствам, например, электростатический генератор, щелочной аккумулятор. С помощью идеального источника тока так же, как и с помощью идеального источника напряжения, учитывают поступление энергии в цепь извне.

Графически идеальный источник тока изображается символом, показанным на рис. 1.4.

## 1.5 Законы Кирхгофа

Если в одном узле сходятся только два элемента, соединение называют *последовательным*.

Если оба узла одного элемента соответственно соединены с этими же узлами другого, соединение называется *параллельным*.

*Ветвью* называют элемент или совокупность элементов, включенных между двумя узлами, если ток, выходящий из одного узла, равен току, входящему в другой узел. Совокупность элементов, образующих замкнутый путь для тока, называется *контуром*.

Цепь, состоящая исключительно из линейных элементов, называется *линейной*; если же в цепи есть хотя бы один нелинейный элемент, цепь называется *нелинейной*.

**Законы Кирхгофа.** *Первый закон Кирхгофа*, называемый также законом Кирхгофа для токов, гласит: *алгебраическая сумма токов в ветвях, сходящихся в любом узле цепи, равна нулю*, т. е.

$$\sum i(t) = 0. \quad (1.24)$$

Само собой разумеется, что в сумму токов должны войти и задающие токи, если к узлу присоединены источники тока. При записи данного уравнения токи, направленные от узла, следует брать с одним знаком, а направленные к узлу – с другим знаком.

*Второй закон Кирхгофа*, называемый также законом Кирхгофа для напряжений, гласит: *алгебраическая сумма напряжений на элементах любого контура цепи (как линейной, так и нелинейной) равна нулю*, т. е.

$$\sum u(t) = 0. \quad (1.25)$$

В сумму напряжений, очевидно, должны войти и задающие напряжения, если в рассматриваемом контуре имеются источники напряжения. При записи данного уравнения необходимо учитывать направления напряжений на элементах контура, а именно: напряжения, направленные "по обходу контура", следует брать с одним знаком, а направленные "против обхода" – с другим знаком.

## 1.6 Схемы замещения реальных цепей

Теория электрических цепей занимается не реальными, а идеализированными цепями. Поэтому для анализа и расчета реальной цепи требуется, прежде всего, заменить каждое из входящих в нее устройств соответствующим сочетанием идеальных элементов. Такое сочетание называется *схемой замещения* данного устройства.

При построении схемы замещения добиваются того, чтобы зависимости между напряжениями и токами на внешних узлах схемы *с необходимой степенью точности* совпадали с соответствующими зависимостями на зажимах реального устройства, найденными путем измерений. Чем выше точность, с которой схема замещения должна отобразить качества реального объекта, тем сложнее будет схема. Таким образом, для одного и того же объекта схема замещения может иметь различный вид, в зависимости от условий поставленной задачи. Пригодность схемы замещения определяется, в конечном счете, опытом.

Рассмотрим схемы замещения некоторых электротехнических устройств, часто встречающихся на практике.

Рисунок 1.5 – Вольт-амперные характеристики

**Схемы замещения автономных двухполюсников** (неидеальных источников энергии). Измеренная вольт-амперная характеристика автономного двухполюсника изображена на рис. 1.5, где  $E$  – напряжение на зажимах автономного двухполюсника в режиме холостого хода;  $J$  – ток, протекающий при замкнутых накоротко зажимах. На этом рисунке также показаны вольт-амперные характеристики идеальных источников (штрихами – идеальный источник напряжения (ИИН), штрих-пунктир – идеальный источник тока (ИИТ)).

Уравнение прямой, состоящей точки  $E$  и  $J$  на рис. 1.5, можно записать в виде

$$U_{12} = E - Ri. \quad (1.26)$$

Указанная формула описывает двухполюсник, показанный на рис. 1.6, а.

Рисунок 1.6 – Схемы замещения неидеальных источников:  
а – источник напряжения; б – источник тока

Из уравнения (1.26) можно выразить как ток  $i$

$$i = \frac{E - U_{12}}{R} = \frac{E}{R} - \frac{U_{12}}{R} = J - \frac{U_{12}}{R} = J - U_{12}G,$$

где  $J = \frac{E}{R}$ ,  $G = \frac{1}{R}$ . Последнее равенство позволяет изобразить вторую схему

замещения автономного двухполюсника рис. 1.6, б. Примером автономных двухполюсников являются: аккумуляторная батарея, генераторы постоянного тока, гальванические электрические элементы. На схеме рис. 1.6  $R_H$  и  $G_H$  – элементы нагрузки (токи протекают при замкнутой цепи).

### 1.7 Схемы замещения с зависимыми источниками

**Зависимые (управляемые) источники.** До сих пор рассматривались схемы замещения, составленные из двухполюсных элементов. При этом под источником понимали элемент, у которого напряжение или ток не зависят от напряжений и токов других элементов цепи, в которую данный источник входит. Такой источник называется *независимым*.

Оказывается, имеются устройства (например усилительная электронная лампа или транзистор), схемы замещения которых нельзя построить из одних двухполюсных элементов. В эти схемы необходимо ввести трехполюсные или четырехполюсные идеальные элементы. Из таких элементов особенно широко применяются *зависимые (управляемые) источники*. Так называются четырехполюсники, составленные каждый из двух ветвей: первая ветвь представляет собой либо короткое замыкание, либо разрыв. Вторая ветвь представляет собой источник напряжения или тока, параметры которого зависят (обычно в прямой пропорции) от напряжения или тока первой ветви.

В соответствии со сказанным, различают следующие четыре вида зависимых источников: ИНУН – источник напряжения, управляемый напряжением (рис. 1.7, а); ИНУТ – источник напряжения, управляемый током (рис. 1.7, б); ИТУН – источник тока, управляемый напряжением (рис. 1.7, в) и ИТУТ – источник тока, управляемый током (рис. 1.7, г).

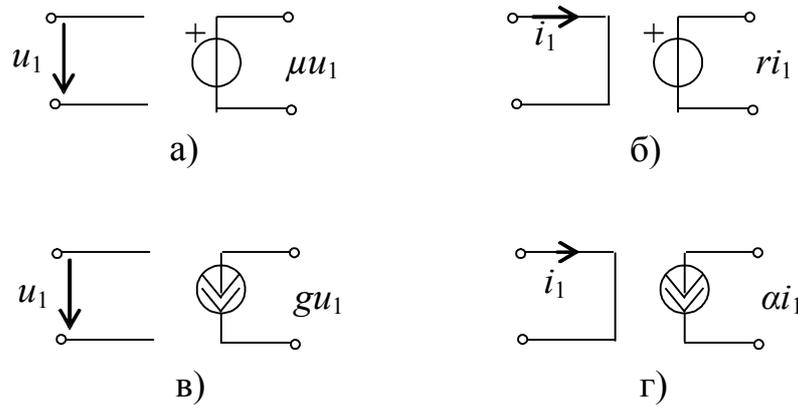


Рисунок 1.7 – Управляемые источники:  
а – ИНУН; б – ИНУТ; в – ИТУН; г – ИТУТ

Коэффициенты пропорциональности  $r$  и  $g$  имеют соответственно размерность сопротивления и проводимости, а коэффициенты  $\alpha$  и  $\mu$  являются безразмерными величинами.

## 1.8 Основы топологии цепей

Если отвлечься от характера элементов электрической цепи и заменить каждый элемент отрезком линии, схему цепи можно изобразить в виде некоторой геометрической фигуры. Эта фигура называется графом цепи. С графом связаны следующие понятия.

На рис. 1.8 изображена электрическая цепь и граф этой цепи.

**Вершиной** называется точка, совмещаемая с концом отрезка линии, а также изолированная точка.

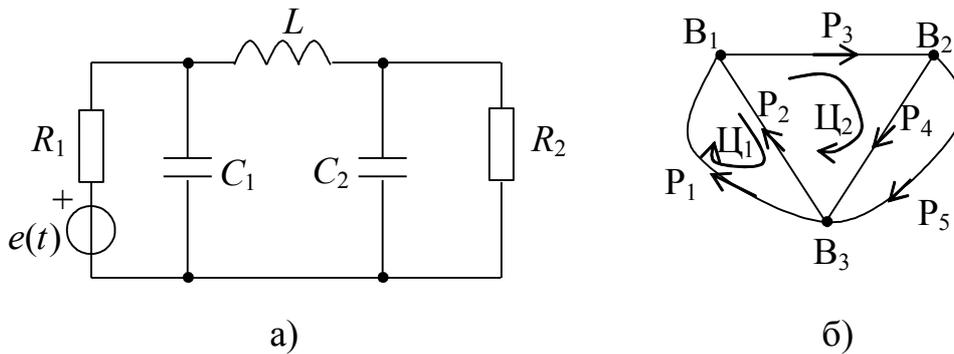


Рисунок 1.8 – Цепь и граф цепи:  
а – электрическая цепь; б – граф электрической цепи

**Ребром** называется отрезок линии, оканчивающийся вершиной.

**Графом** называется совокупность вершин и ребер, в которой ребра совмещаются концами только в вершинах. Каждый конец ребра в графе должен быть обязательно совмещен с вершиной.

Если каждому ребру приписано направление, указываемое стрелкой, граф называется **ориентированным** (граф токов на рис. 1.8, б). В противном случае граф называется **неориентированным**.

**Подграф.** *Подграфом* данного графа называется его часть, в которой каждая вершина и каждое ребро являются одновременно вершиной и ребром исходного графа. В частности, подграф может представлять собой только одну изолированную вершину или только одно ребро с вершинами на концах.

**Путь.** *Путем* называется последовательность из  $m$  ребер и  $m + 1$  вершин графа, в которой каждая вершина, исключая начальную и конечную вершину, является общей для двух ребер этой последовательности. Например, на графе рис. 1.8, б между  $V_1$  и  $V_3$  существуют пути через рёбра: 1)  $P_1$ , 2)  $P_3$  и  $P_4$  и т. д. Вершины  $V_1$  и  $V_3$  являются для этих путей начальными и конечными вершинами.

**Циклом** называется путь, у которого начальная и конечная вершины совмещены. Например, на рис. 1.8, б можно указать цикл  $V_1 - V_3 - V_1$ ,  $V_2 - V_3 - V_2$  и т. д., которые сокращенно обозначаем через  $\Pi_1$ ,  $\Pi_2$  и т. д.

В ориентированном графе циклам, подобно рёбрам, приписывают направление (по ходу или против хода часовой стрелки), указываемое (как на рис. 1.8, б) закругленной стрелкой.

**Планарный граф.** Граф называется *планарным*, если он может быть начерчен на плоскости или на сфере таким образом, что никакие два ребра не пересекаются, кроме как в вершинах (где они совмещаются). В противном случае, граф называется *непланарным*. Так, например, графы рис. 1.8, б и 1.9, а – планарные. Неplanарный граф показан на рис. 1.9, б.

**Связанный граф** – граф, в котором есть путь между каждой парой вершин.

**Дерево** – связанный ациклический граф, у которого все вершины соединены между собой, но нет ни одного цикла (рис. 1.9, в).

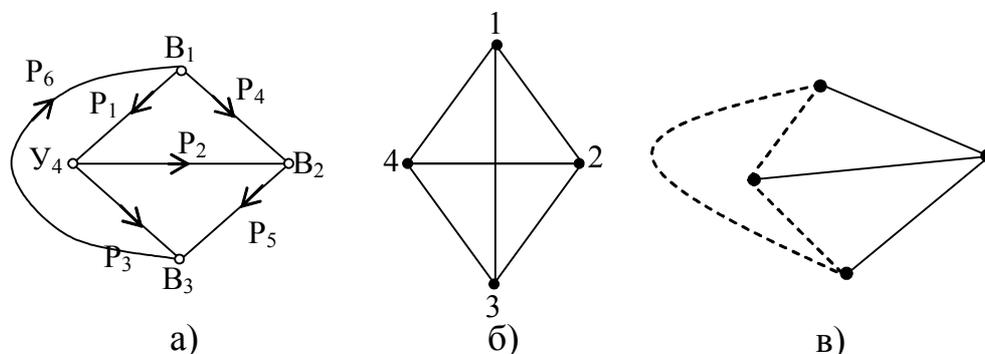


Рисунок 1.9 – Графы цепей:

а – планарный граф; б – неplanарный граф; в – дерево графа

## 1.9 Основные принципы и теоремы теории электрических цепей

**Принцип наложения (суперпозиции).** Для линейных цепей справедлива следующая теорема: *если в цепи действуют несколько источников, то вызванные ими ток или напряжение в любом месте цепи можно вычислить как сумму токов или напряжений, которые вызвал бы в этом месте каждый источник, действуя отдельно, т. е. когда задающие напряжения и токи остальных источников были бы равны нулю.* Другими словами, в линейной цепи отклики на отдельные воздействия складываются независимо.

Справедливость принципа наложения вытекает из следующего свойства системы линейных уравнений: если система уравнений содержит несколько заданных функций, то решение этой системы может быть получено суммированием частных решений, получаемых для каждой функции в предположении, что существует только эта функция, а остальные равны нулю.

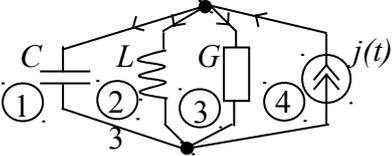
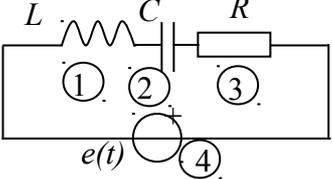
**Принцип дуальности.** Понятие двойственности действий, явлений в природе, в науке существует уже давно. Поэтому на заре развития учения об электричестве на это обстоятельство обратил внимание английский физик Хэвисайд в конце XIX столетия. Это послужило толчком для развития принципа дуальности. В основе принципа в теории цепей лежат постулаты (законы) Кирхгофа о зависимости токов в узлах и напряжений в контурах (см. табл. 1.1). Существенное развитие этот принцип получил только в середине XX века. Большой вклад в развитие этого принципа внесли ученые Одесского электротехнического института связи в области теории электрических цепей Э.В. Зелях, А.М. Ивановичий.

Принцип дуальности можно представить так: если в известном законе, правиле, теореме произвести замену величин и терминов дуальными величинами и терминами в соответствии с таблицей 1.1, то новая формулировка сохраняет смысл. В указанной таблице приведены пары (слева и справа) дуальных соответствий. Эти соответствия относятся к дуальным цепям. Например, ток одной цепи (элемента) соответствует напряжению дуальной цепи (элемента) и наоборот.

Согласно принципу дуальности, любой закономерности, правилу, методу соответствуют дуальные закономерность, правило, метод. Последняя строка таблицы представляет собой пару дуальных цепей (последовательный контур ↔ параллельный контур), содержащие дуальные элементы ( $L, C, R \leftrightarrow C, L, G$ ) и дуальные соединения (контур ↔ узел).

Таблица 1.1 – Дуальные соответствия

Исходные положения	Дуальные положения
$\sum i_k(t) = 0$	$\sum u_k(t) = 0$
узел	контур
$i = G \cdot u$	$u = R \cdot i$
Проводимость $G$	Сопротивление $R$
$i_C = C \frac{du_C}{dt}$	$u_L = L \frac{di_L}{dt}$
Ёмкость $C$	Индуктивность $L$
$i_L = \frac{1}{L} \int u_L dt$	$u_C = \frac{1}{C} \int i_C dt$
$\dot{i}_L = \frac{1}{j\omega L} \dot{U}_L$	$\dot{U}_C = \frac{1}{j\omega C} \dot{I}_C$
Комплексная проводимость индуктивности $Y_L$	Комплексное сопротивление емкости $Z_C$

$\dot{I}_C = j\omega C \cdot \dot{U}_C$	$\dot{U}_L = j\omega L \cdot \dot{I}_L$
Комплексная проводимость емкости $Y_C$	Комплексное сопротивление индуктивности $Z_L$
$\sum \dot{I}_k = 0$	$\sum \dot{U}_k = 0$
	

**Дуальные цепи.** Две цепи, у которых при замене величин и терминов на дуальные величины и термины уравнения одной цепи переходят в уравнения другой цепи, являются **дуальными цепями**.

Представляет большой интерес следующая задача: найти цепь, дуальную по отношению к заданной. Эта задача решается особенно просто, если исходная цепь составлена только из последовательно и параллельно соединенных элементов, как, например, цепь на рис. 1.10, а. В этом случае дуальную цепь можно получить путем замены в исходной цепи последовательного соединения на параллельное, параллельного соединения – на последовательное, сопротивлений – на проводимости, индуктивностей – на емкости, емкостей – на индуктивности, источников напряжения на источники тока и источников тока – на источники напряжения.

В качестве примера на рис. 1.10 показаны дуальные цепи.

Рисунок 1.10 – Дуальные цепи: а – исходная; б – дуальная

**Теорема замещения.** Теорему замещения сформулируем следующим образом:

- 1 Двухполюсник (Д), соединенный с цепью Ц (рис. 1.11, а), можно, не изменяя токов и напряжений в этой цепи, заменить источником напряжения, равного по величине и направлению напряжению на зажимах исходного двухполюсника (рис. 1.11, б).
- 2 Двухполюсник (Д) можно также заменить источником тока, равного по величине и направлению току исходного двухполюсника (рис. 1.11, в).

Рисунок 1.11 – Замещение двухполюсника Д:

а – исходный двухполюсник; б – замещение источником напряжения;  
в – замещение источником тока

**Доказательство.** Включим последовательно между двухполюсником Д и цепью Ц два источника, задающие напряжения которых направлены встречно (рис. 1.12, а) и равны каждое напряжению между зажимами двухполюсника в схеме рис. 1.11, а. При этом токи и напряжения в цепи останутся, очевидно, прежними. Далее, учитывая, что напряжение между точками 1 и 1' равно нулю, эти точки можно соединить накоротко, не изменяя токов и напряжений в цепи.

Перечертив теперь схему в виде рис. 1.12, б и применив первый закон Кирхгофа к узлу 1, видим, что ток в перемычке 1-1' равен нулю. Следовательно, эту перемычку можно отключить, также не изменяя токов и напряжений в цепи. В результате получаем схему рис. 1.11, б, что доказывает справедливость первой части теоремы. В некоторых учебниках эту теорему называют **теоремой компенсации**.

Рисунок 1.12 – Доказательство теоремы замещения:

а – два одинаковых разнополярных источника в одной ветви;  
б – две автономные цепи

**Теорема об эквивалентном генераторе.** Пользуясь понятием "автономный двухполюсник", сформулируем эту теорему следующим образом:

- 1 Ток  $i$  и напряжение  $u$  нагрузки  $N$ , присоединенной к зажимам автономного линейного двухполюсника АД (рис. 1.13, а), не изменится, если заменить этот двухполюсник цепью (рис. 1.13, б), составленной из последовательно соединенных двухполюсника  $D_1$  и источника напряжения, равного напряжению  $u_{xx}$  холостого хода двухполюсника АД.
- 2 Ток и напряжение нагрузки также не изменится, если заменить автономный двухполюсник АД цепью (рис. 1.13, в), составленной из па-

параллельно соединенных двухполюсника  $D_1$  и источника тока, равного току  $i_{кз}$  короткого замыкания двухполюсника АД.



Рисунок 1.13 – К теореме об эквивалентном генераторе:

а – автономный двухполюсник с нагрузкой; б – эквивалентный источник напряжения; в – эквивалентный источник тока

В соответствии со сказанным ранее,  $D_1$  автономного двухполюсника называется неавтономным двухполюсником, получающимся из автономного, в котором заменили источники напряжения короткими замыканиями (КЗ), а источники тока – обрывами (ХХ).

**Напряжением холостого хода автономного двухполюсника** называется напряжение, которое имеет место на его зажимах, когда они разомкнуты, т.е. когда ток, протекающий через эти зажимы, равен нулю.

**Током короткого замыкания автономного двухполюсника** называется ток, протекающий между его зажимами, когда они соединены накоротко.

## 1.10 Эквивалентные преобразования однотипных элементов

### А Последовательное соединение однотипных элементов

**Последовательное соединение сопротивлений.** Соединение элементов, показанное на рис. 1.14, является последовательным (все элементы соединяются между собой с помощью устранимых узлов).

Рисунок 1.14 – Последовательное соединение элементов  $R$

Напряжение на каждом из сопротивлений рис. 1.14 определяется законом Ома:

$$u_1 = R_1 i; \quad u_2 = R_2 i; \quad u_3 = R_3 i \text{ и т. д.}; \quad u_n = R_n i.$$

Общее напряжение на всем участке  $ab$  определится как арифметическая сумма напряжений на каждом из сопротивлений:

$$u_{ab} = R_1 i + R_2 i + R_3 i + \dots + R_n i = i(R_1 + R_2 + R_3 + \dots + R_n) = iR_{\Sigma},$$

где  $R_{\text{Э}}$  – это эквивалентное сопротивление участка "ab" (рис. 1.15), равное арифметической сумме всех сопротивлений участка "ab".

### Рисунок 1.15 – Эквивалентное сопротивление

**Последовательное соединение индуктивностей.** Это соединение изображено на рис. 1.16.

### Рисунок 1.16 – Последовательное соединение индуктивностей

На каждой из индуктивностей будет иметь место соответственно напряжение

$$u_1 = L_1 \frac{di}{dt}; u_2 = L_2 \frac{di}{dt} \text{ и т. д.}$$

Напряжение на участке  $ab$  выразится формулой

$$u_{ab} = L_1 \frac{di}{dt} + L_2 \frac{di}{dt} + L_3 \frac{di}{dt} + \dots + L_n \frac{di}{dt} = \frac{di}{dt} (L_1 + L_2 + L_3 + \dots + L_n) = \frac{di}{dt} L_{\text{Э}},$$

где  $L_{\text{Э}}$  – эквивалентная участку  $ab$  индуктивность (рис. 1.17), равная арифметической сумме всех индуктивностей участка  $ab$ .

### Рисунок 1.17 – Эквивалентная индуктивность

**Последовательное соединение емкостей.** Это соединение изображено на рис. 1.18.

### Рисунок 1.18 – Последовательное соединение емкостей

На каждой емкости будет иметь место соответственно напряжение

$$u_1 = \frac{1}{C_1} \int idt \quad ; \quad u_2 = \frac{1}{C_2} \int idt \quad \text{и т. д.}$$

Напряжение на участке  $ab$  выразится формулой

$$u_{ab} = \frac{1}{C_1} \int idt + \frac{1}{C_2} \int idt + \frac{1}{C_3} \int idt + \dots + \frac{1}{C_n} \int idt = \int idt \left( \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} + \dots + \frac{1}{C_n} \right) = \int idt \frac{1}{C_{\text{Э}}},$$

Рисунок 1.19 –  
Эквивалентная ёмкость

где  $1/C_{\text{Э}}$  – величина, обратная эквивалентной емкости (рис. 1.19) на участке  $ab$ :

$$\frac{1}{C_{\text{Э}}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} + \dots + \frac{1}{C_n};$$

### Последовательное соединение идеальных источников напряжения.

При последовательном соединении независимых источников напряжения они заменяются одним эквивалентным источником напряжения с задающим напряжением  $E_{\text{Э}}$ , равным алгебраической сумме задающих напряжений отдельных источников. Причем со знаком "+" берутся задающие напряжения, совпадающие с задающим напряжением эквивалентного источника, а со знаком "-" – несовпадающие рис. 1.20.

Пример соединения трех источников приведен на рис. 1.20.

Рисунок 1.20 – Эквивалентное преобразование идеальных источников напряжения:

а – последовательное соединение источников; б – эквивалентный источник

На основании второго закона Кирхгофа,

$$u_{12} = E_{\text{Э}} = -E_1 - E_2 + E_3.$$

### Б Параллельное соединение однотипных элементов

Используя принцип дуальности, можно получить формулы эквивалентных параметров параллельного соединения однотипных элементов. Этот анализ предлагается проделать самостоятельно.

### Контрольные вопросы

- 1 Что называется током? Напряжением?
- 2 Какие направления токов и напряжений приняты за положительные?
- 3 Что называется мощностью? Энергией?
- 4 Что такое двухполюсник? Трехполюсник? Четырехполюсник?
- 5 Какие двухполюсники называются автономными и неавтономными?
- 6 Какие двухполюсники называются активными? Пассивными?
- 7 Что называется идеальным сопротивлением? Индуктивностью? Емкостью?
- 8 Что называется идеальным источником напряжения? Тока?
- 9 Как формулируются законы Кирхгофа?
- 10 Какие схемы замещения автономного двухполюсника Вам известны?
- 11 Какие и сколько независимых источников используется в теории электрических цепей?
- 12 Что такое узел? Ветвь? Контур?
- 13 Какие принципы и теоремы используются в курсе теории электрических цепей?
- 14 Какие цепи называются дуальными?
- 15 О чем идет речь в теореме замещения?
- 16 Между какими цепями устанавливается эквивалентность в теореме об эквивалентном генераторе?
- 17 Как определить эквивалентную величину при последовательном соединении двух и более сопротивлений? Индуктивностей? Емкостей?
- 18 Как определить эквивалентную величину при параллельном соединении сопротивлений? индуктивностей? Емкостей?
- 19 Каким элементом можно заменить последовательное соединение источников напряжений?
- 20 Каким элементом можно заменить параллельное соединение источников тока?

## 2 МЕТОДЫ АНАЛИЗА ЛИНЕЙНЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ ПРИ ПОСТОЯННЫХ ВОЗДЕЙСТВИЯХ

### 2.1 Схемы замещения при постоянных воздействиях

Задача анализа *линейных электрических цепей (ЛЭЦ)* заключается в том, чтобы для заданной схемы и величин ее элементов определить токи, напряжения, мощности на каждом элементе. Существует несколько методов анализа электрических цепей. При анализе цепей, содержащих источники постоянного

воздействия, необходимо перейти от схемы при произвольных воздействиях к схеме замещения при постоянных воздействиях.

В табл. 2.1 приведены изображения элементов электрической цепи при произвольных воздействиях, при постоянных воздействиях и их эквиваленты.

## 2.2 Метод уравнений Кирхгофа

Метод основан на составлении уравнений по законам Кирхгофа. Неизвестными в этих уравнениях являются токи в ветвях цепи.

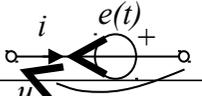
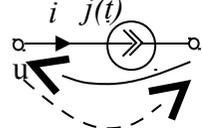
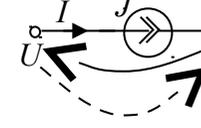
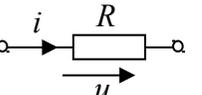
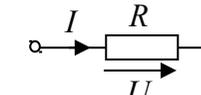
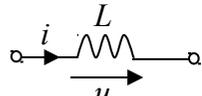
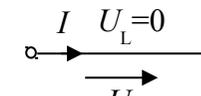
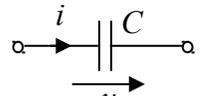
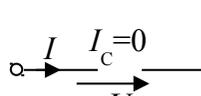
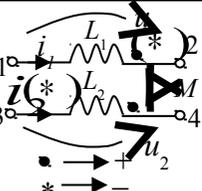
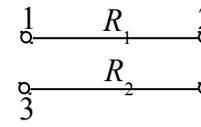
Пусть цепь содержит  $n_B$  ветвей, включая источники напряжения, и  $n_y$  узлов. Положим, что в цепи отсутствуют источники тока.

Зададимся произвольно положительными направлениями токов в ветвях цепи и пронумеруем эти токи в произвольном порядке. Тогда по первому закону Кирхгофа можно составить для  $(n_y - 1)$  узлов такое же количество линейно-независимых уравнений. По второму закону Кирхгофа можно составить  $(n_B - n_y + 1)$  линейно-независимых уравнений для напряжений  $u_k$  ветвей цепи (где  $k$  – номер ветви).

Следовательно, совокупность из  $(n_y - 1)$  уравнений, составленных по первому закону Кирхгофа, и  $(n_B - n_y + 1)$  уравнений, составленных по второму закону Кирхгофа, образуют систему из  $n_y - 1 + n_B - n_y + 1 = n_B$  линейно-независимых алгебраических уравнений относительно такого же числа неизвестных.

Подобная система уравнений, как известно, имеет единственное решение, которое позволяет найти токи в ветвях цепи, а по ним и значения напряжений между любой парой узлов цепи.

Таблица 2.1 – Соответствие элементов при постоянных воздействиях

Элементы схем замещения электрических цепей при произвольных воздействиях $u(t), i(t)$			Элементы схем замещения электрических цепей при постоянных воздействиях $u(t) = U, i(t) = I$		
Название	Условное изображение	Связь $i$ с $u$	Название	Условное изображение	Связь $I$ с $U$
Идеальный источник напряжения		$u = e(t)$ и не зависит от величины и направления тока $i$	Идеальный источник постоянного напряжения		$U = E$ и не зависит от величины и направления $I$
Идеальный источник тока		$i = j(t)$ и не зависит от величины и направления напряжения	Идеальный источник постоянного тока		$I = J$ и не зависит от величины и направления $U$
Сопротивление		$u = iR$	Сопротивление		$U = I \cdot R$ $R = \frac{U}{I}$
Индуктивность		$u = L \frac{di}{dt}$	Перемычка; короткое замыкание (КЗ)		$R = \frac{U}{I} = 0$
Ёмкость		$i = C \frac{du}{dt}$	Разрыв; холостой ход (ХХ)		$R = \frac{U}{I} \rightarrow \infty$
Связанные индуктивности		$u_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} \pm M \frac{di_2}{dt}$ $u_2 = \pm M \frac{di_1}{dt} + L_2 \frac{di_2}{dt}$	Перемычки; короткие замыкания (КЗ)		$R_1 = 0$ $R_2 = 0$

### 2.3 Метод узловых напряжений

Метод узловых напряжений (потенциалов) базируется на законах Кирхгофа и Ома. Это наиболее общий и широко применяемый метод для расчета электрических цепей.

В основе метода лежит расчет напряжений в  $(n_y - 1)$  узлах цепи относительно базисного узла, потенциал которого принимается нулевым. После этого на основании закона Ома, находятся токи в соответствующих ветвях.

Рассмотрим сущность метода узловых напряжений на примере резистивной цепи, изображенной на рис. 2.1.

Выберем произвольно опорный узел, обозначив этот узел нулевым. Остальные узлы произвольно пронумеруем: 1, 2, 3 – получили три независимых узла  $(n_y - 1)$ .

Напряжения этих узлов, относительно опорного узла, обозначим  $u_{10}$ ,  $u_{20}$  и  $u_{30}$  соответственно номерам узлов. Назовем их узловыми напряжениями данной цепи. Выберем произвольно направление токов в каждой ветви (кроме ветви, содержащей источник тока) и составим уравнения по первому закону Кирхгофа для выбранных независимых узлов цепи (узлы 1, 2, 3):

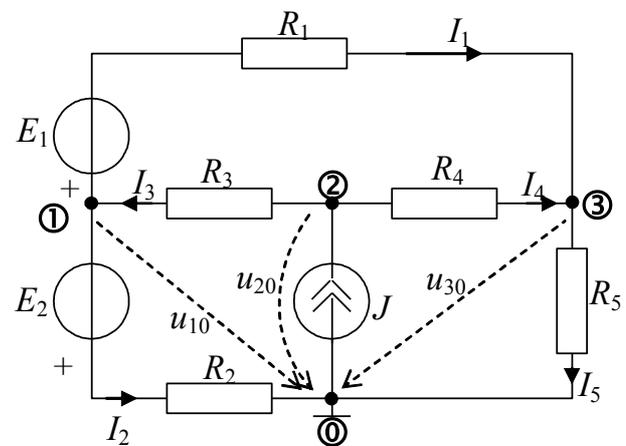


Рисунок 2.1 – Электрическая цепь с четырьмя узлами

$$\text{Узел ① } I_3 - I_1 - I_2 = 0;$$

$$\text{Узел ② } J - I_3 - I_4 = 0;$$

$$\text{Узел ③ } I_4 + I_1 - I_5 = 0.$$

(2.1)

Теперь выразим каждый из токов согласно закону Ома:

$$I_1 = \frac{u_{10} - u_{30} - E_1}{R_1} = (u_{10} - u_{30} - E_1)G_1;$$

$$I_2 = \frac{u_{10} + E_2}{R_2} = (u_{10} + E_2)G_2;$$

$$I_3 = \frac{u_{20} - u_{10}}{R_3} = (u_{20} - u_{10})G_3;$$

$$I_4 = \frac{u_{20} - u_{30}}{R_4} = (u_{20} - u_{30})G_4;$$

$$I_5 = \frac{u_{30}}{R_5} = u_{30}G_5,$$

где



Итак, решая систему уравнений (2.3), состоящую из трех уравнений и содержащую три неизвестных узловых напряжения  $u_{10}$ ,  $u_{20}$  и  $u_{30}$ , определяют эти узловые напряжения.

Ток в каждой из ветвей данной цепи определяется по закону Ома.

Если при решении примера с числовыми данными значения вычисленных токов окажутся отрицательными, то их следует направить в сторону, противоположную указанной в данных ветвях цепи.

## 2.4 Метод наложения

Метод наложения основан на принципе суперпозиции (наложения).

При использовании этого метода анализ разветвленной ЛЭЦ с несколькими источниками сводится к анализу ЛЭЦ с каждым из источников в отдельности.

Рассмотрим пример.

Заданы значения  $E_1$ ,  $J$ ,  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $R_3$  и  $R_4$  (рис. 2.2, а). Определим токи во всех резисторах цепи методом наложения.

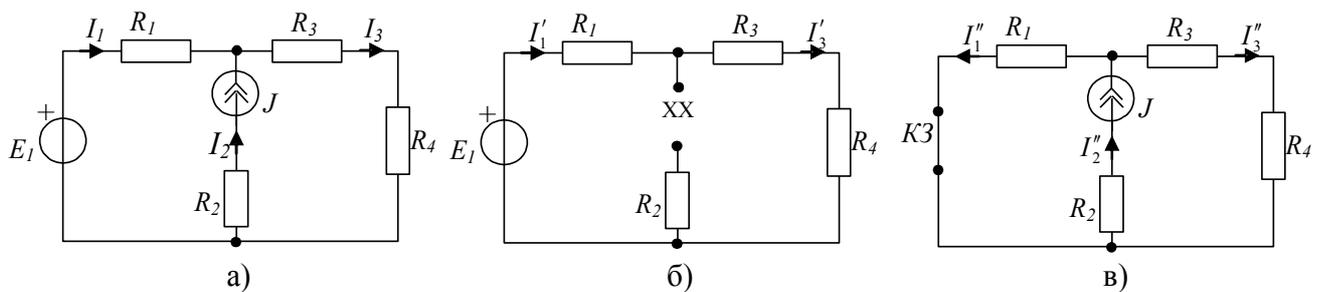


Рисунок 2.2 – Подсхемы метода наложения:  
а – исходная цепь; б – источник тока исключен;  
в – источник напряжения исключен

### Решение

В цепи рис. 2.2, а обозначим условно-положительные направления всех токов:  $I_1$ ,  $I_2$ ,  $I_3$ .

1 Исключим влияние источника тока  $J$  и определим, чему равны токи в резисторах, вызванные только действием источника напряжения  $E_1$ . На месте включения источника тока  $J$  оставим в цепи его внутреннее сопротивление ( $R \rightarrow \infty$ ). При этом рассматриваемая цепь примет вид рис. 2.2, б.

В цепи рис. 2.2, б один источник напряжения. Расчет токов в резисторах  $R_1$ ,  $R_3$  и  $R_4$  производим по закону Ома:

$$I'_2 = 0, \quad I'_1 = I'_3 = I'_4 = \frac{E_1}{R_1 + R_3 + R_4}.$$

2 Исключим влияние источника напряжения  $E_1$  и определим, чему равны токи в резисторах, вызванные только действием источника тока  $J$ . На месте включения источника напряжения  $E_1$  оставим в цепи его внутреннее сопротивление ( $R = 0$ ). При этом рассматриваемая цепь примет вид рис. 2.2, в.

Очевидно, что  $I''_2 = J$ . Токи  $I''_1$  и  $I''_3$  рассчитаем по формуле "чужого" сопротивления:

$$I''_1 = J \frac{R_3 + R_4}{R_1 + R_3 + R_4},$$

$$I''_3 = J \frac{R_1}{R_1 + R_3 + R_4}.$$

3 Теперь, учитывая направления токов в цепях рис. 2.2, б и рис. 2.2, в, а также их величины, можно определить величину и истинное направление токов в исходной цепи рис. 2.2, а:

$I_1 = I'_1 - I''_1$ , если  $|I'_1| > |I''_1|$  и направлен ток  $I_1$  в сторону тока  $I'_1$ ;

$I_4 = I_3 = I'_3 + I''_3$  и направлен  $I_3$  в сторону токов  $I'_3$  и  $I''_3$ ;  $I_2 = I'_2 + I''_2 = J$ .

Таким образом, анализ цепи методом наложения сводится к расчету нескольких цепей (по числу источников в исходной цепи) с одним источником.

## 2.5 Метод эквивалентного генератора

Метод эквивалентного генератора целесообразно применять в тех случаях, когда требуется определить ток (или напряжение) лишь в одной из ветвей цепи.

Этот метод можно представить в двух вариантах:

- 1 метод эквивалентного источника напряжения,
- 2 метод эквивалентного источника тока.

Оба метода основаны на теореме об эквивалентном генераторе (см. 1.9), которая в свою очередь состоит из двух частей соответственно.

Рассмотрим метод эквивалентного источника напряжения, который базируется на теореме об эквивалентном источнике напряжения.

Согласно методу, ветвь, в которой следует определить ток, размыкается – и относительно точек разрыва находятся напряжение и сопротивление оставшейся цепи. При определении сопротивления все источники цепи заменяются своими внутренними сопротивлениями. Затем искомый ток ветви определяется согласно теореме об эквивалентном источнике напряжения.

Рассмотрим пример. Дана цепь (рис. 2.3, а).

Заданы значения  $E_1$ ,  $E_2$ ,  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $R_3$  и  $R_4$ . Требуется определить ток в резисторе  $R_4$ .

### Решение

1 Отключаем ветвь, в которой нужно найти ток, от остальной цепи и в точках отключения (точки  $a$ ,  $b$ ) определяем напряжение холостого хода  $U_{xx\ ab}$  (см. рис. 2.3, б):

$$U_{xx\ ab} = -E_2 + I \cdot R_2,$$

где

$$I = \frac{E_1 + E_2}{R_1 + R_2 + R_3}.$$

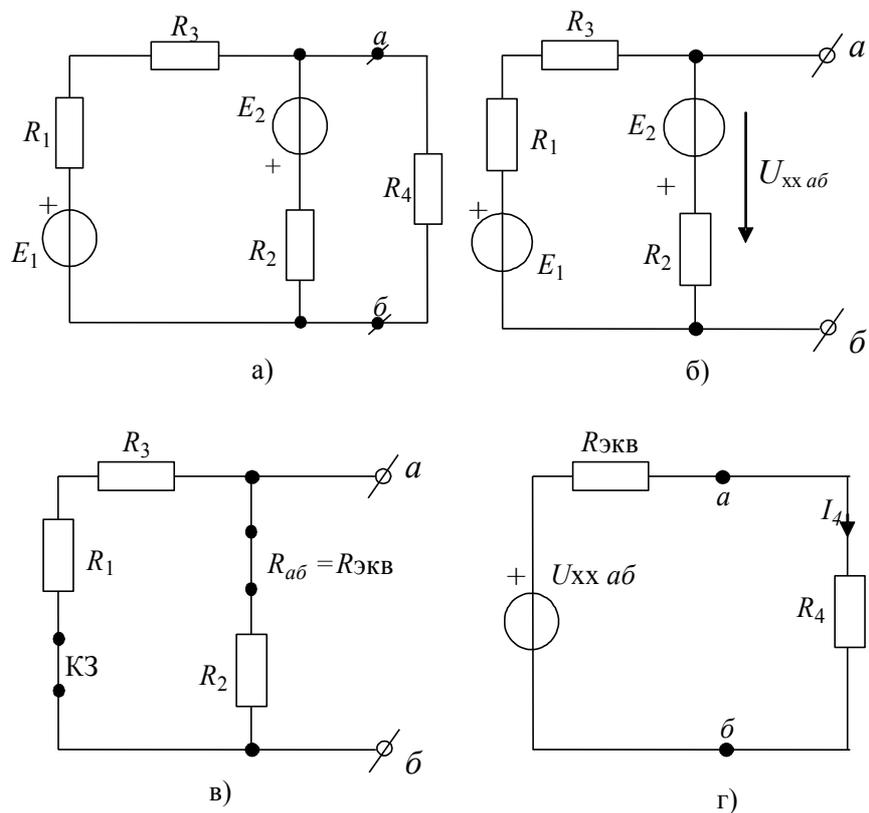


Рисунок 2.3 – К расчету тока методом эквивалентного источника напряжения:  
 а – исходная цепь; б – определение напряжения холостого хода;  
 в – определение эквивалентного сопротивления; г – определение искомого тока

2 Определяем эквивалентное сопротивление  $R_{\text{экв}}$  (рис. 2.3, в) относительно точек а, б:

$$R_{\text{экв}} = \frac{R_2(R_1 + R_3)}{R_1 + R_2 + R_3}.$$

3 Применив теорему об эквивалентном источнике напряжения, определяем ток в резисторе  $R_4$  (см. рис. 2.3, г):

$$I_4 = \frac{U_{\text{xx аб}}}{R_{\text{экв}} + R_4}.$$

При использовании метода эквивалентного источника тока ветвь, в которой следует определить ток, замыкается накоротко и определяется ток короткого замыкания. Затем определяется сопротивление цепи при отключенной ветви, в которой следует определить ток, таким же образом, как и в методе эквивалентного источника напряжения. Напряжение ветви  $R_4$  определяется согласно теореме об источнике тока:

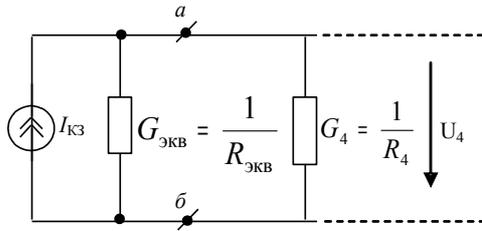


Рисунок 2.4 – К расчету напряжения методом эквивалентного источника тока

$$U_4 = \frac{I_{кз}}{G_{\text{ЭКВ}} + G_4},$$

где  $I_{кз}$  – ток короткого замыкания,

$$G_{\text{ЭКВ}} = \frac{1}{R_{\text{ЭКВ}}}, G_4 = \frac{1}{R_4} \text{ (рис.2.4).}$$

## 2.6 Метод контурных токов

Используя принцип дуальности (см. 1.9), применительно к методу узловых напряжений (см. 2.2), можно получить уравнения, составленные согласно методу контурных токов.

Рекомендуется все выкладки для этого метода сделать самостоятельно.

### Контрольные вопросы

- 1 Как записать и сформулировать законы Кирхгофа?
- 2 Сколько уравнений необходимо составить для электрической цепи, пользуясь методом законов Кирхгофа?
- 3 Сколько уравнений необходимо составить, рассчитывая цепь методом узловых напряжений?
- 4 Как определяется собственная проводимость узла?
- 5 Как определяется взаимная проводимость между двумя узлами цепи?
- 6 Как определяется узловой ток?
- 7 В чем заключается понятие “опорного” узла?
- 8 Какой принцип положен в основу метода суперпозиции и в чем его суть?
- 9 На какой теореме базируется метод эквивалентного генератора?
- 10 Из каких вариантов состоит метод эквивалентного генератора?
- 11 В каких случаях целесообразно применять метод эквивалентного генератора?
- 12 Сколько уравнений необходимо составить для ЛЭЦ, пользуясь методом контурных токов?
- 13 Как определяется собственное сопротивление контура?
- 14 Как определяется взаимное сопротивление контуров?
- 15 Как определяется контурное напряжение?
- 16 Как определить токи в ветвях по методу контурных токов?

## 3 РЕЖИМ ГАРМОНИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ В ЛИНЕЙНЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЯХ

### 3.1 Гармонические колебания. Основные понятия и определения

Наряду с источниками постоянных воздействий (токов и напряжений) в электрических цепях могут действовать источники, у которых токи и напряжения изменяются во времени, например периодически. Для периодического колебания справедливо равенство

$$i(t) = i(t + kT),$$

где  $T$  – *период колебания*, т. е. наименьший промежуток времени, в течение которого функция проходит все свои значения и после которого значения функции  $i(t)$  повторяются.

Наиболее распространенным видом периодического колебания в электрических цепях является гармоническое. Мгновенное значение гармонического тока можно описать функцией синуса или косинуса:

$$i(t) = I_m \sin(\omega t + \varphi_i) = I_m \sin \psi_i(t), \quad (3.1)$$

где  $I_m$  – амплитуда, максимальное абсолютное значение синусоидального колебания;

$\varphi_i$  – начальная фаза колебания (радианы или градусы);

$\psi_i(t) = \omega t + \varphi_i$  – текущая фаза колебания;

$\omega = d\psi_i/dt$  – угловая частота, представляющая собой скорость изменения аргумента (рад/с).

Период  $T$  и угловая частота  $\omega$  связаны соотношением

$$T = 2\pi/\omega.$$

Число периодов в единицу времени называют *циклической частотой* –  $f = 1/T$ . Единицей измерения частоты является герц (Гц). В Европейских странах принята стандартная частота промышленного переменного тока – 50 Гц.

Очевидно, что  $\omega = 2\pi f = 2\pi / T$  рад/с.

Представленное в (3.1) колебание может быть записано косинусоидальной функцией:

$$i(t) = I_m \cos(\omega t + \varphi_i'); \quad (3.2)$$

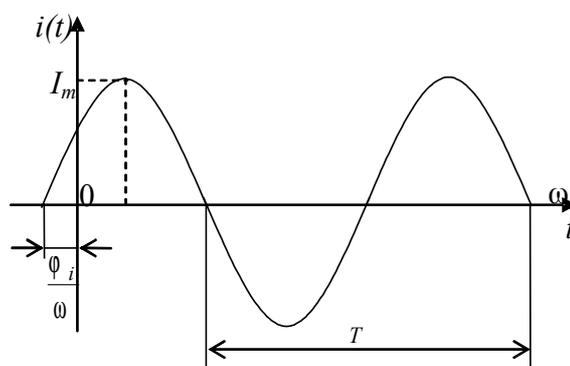


Рисунок 3.1 – Временная зависимость гармонического тока

$$\varphi_i' = \varphi_i + \pi/2.$$

На рис. 3.1 приведена временная диаграмма гармонического тока.

В телекоммуникационных технологиях используют гармонические колебания от единиц герц до сотен гигагерц.

Кроме величины амплитуды  $I_m$  тока, в гармоническом колебании различают действующее значение  $I$  и среднее  $I_{cp}$ . **Действующее значение** гармонического тока  $i(t)$  (его называют еще среднеквадратичным) определяется по формуле

$$I = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2 dt} \quad (3.3)$$

При токе

$$i(t) = I_m \cos \omega t \quad (3.4)$$

$$\int_0^T i^2 dt = \int_0^T I_m^2 \cos^2 \omega t dt = (I_m^2 / 2) \int_0^T (1 + \cos 2\omega t) dt = (I_m^2 / 2) T.$$

Согласно (3.3),

$$I = I_m / \sqrt{2} \approx 0,707 I_m. \quad (3.5)$$

Аналогично определяется действующее значение гармонического напряжения:

$$U \approx 0,707 U_m$$

Возведя (3.3) в квадрат и умножив обе части полученного выражения на  $RT$ , определим тепловую энергию, которая выделяется гармоническим колебанием  $i(t)$  за период  $T$  в резистивном элементе с сопротивлением  $R$ :

$$w_R = \int_0^T p dt = \int_0^T Ri^2 dt = TRI^2 \quad (3.6)$$

Отсюда следует, что действующее значение гармонического тока равно по величине такому постоянному току, который, протекая через сопротивление  $R$  за время, равное  $T$ , выделяет то же количество тепла, что и гармонический ток.

Естественно, что среднее значение гармонического тока (напряжения) за период

$$I_{cp} = 1/T \int_0^T i dt \quad (3.7)$$

равно нулю, так как площадь положительной полуволны компенсируется площадью отрицательной полуволны гармонической функции (см. рис. 3.1). В связи с этим используется понятие среднего полупериодного значения:

$$I'_{cp} = \frac{2}{T} \int_{-T/4}^{T/4} i dt = \frac{2I_m}{T} \int_{-T/4}^{T/4} \cos \omega t dt = \frac{2I_m}{\omega T} \left| \sin \omega t \right|_{-T/4}^{T/4} = (2/\pi) I_m \approx 0,637 I_m. \quad (3.8)$$

Аналогично среднее значение гармонического напряжения:

$$U_{cp} \approx 0,637 U_m.$$

### 3.2 Спектральное (частотное) представление гармонических колебаний

Гармонический ток  $i(t)$  представлен временной диаграммой рис. 3.1. Временное представление гармонических колебаний наглядно, но при решении задач анализа цепей оно требует громоздких тригонометрических преобразований. В дальнейшем будут рассмотрены и другие способы представления гармонических колебаний, выбор которых зависит от характера поставленной задачи.

Гармоническое колебание  $i(t)$  (см. рис. 3.1) полностью характеризуется следующими основными параметрами: амплитудой  $I_m$ , угловой частотой  $\omega$  и начальной фазой  $\varphi_i$ . Эти параметры используются при спектральном представлении гармонических колебаний в виде амплитудного и фазового спектра. Амплитудный и фазовый спектры отображаются с помощью отрезков линий, соответствующих значениям амплитуд и начальных фаз в прямоугольной системе координат.

На рис. 3.2 представлен амплитудный (рис. 3.2, а) и фазовый (рис. 3.2, б) спектры гармонического тока, заданного уравнением

$$i_1(t) = I_{m1} \cos(\omega_1 t + \varphi_1). \quad (3.9)$$

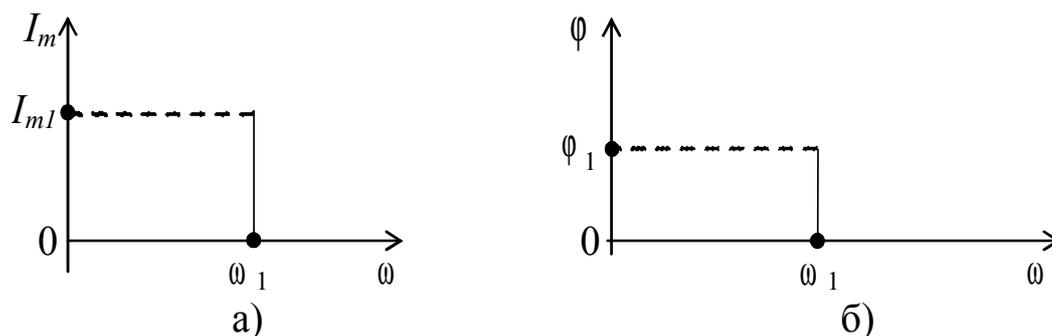


Рисунок 3.2 – Спектры гармонического колебания:  
а – спектр амплитуды; б – спектр начальной фазы

Спектральное представление гармонических колебаний в ряде случаев значительно удобнее временного. В дальнейшем подробно рассматривается спектральное представление гармонических колебаний и методы, основанные на нем.

### 3.3 Гармонические колебания в пассивных элементах

#### Резистивный элемент

Если к резистивному элементу с сопротивлением  $R$  приложено гармоническое напряжение

$$u = U_m \cos(\omega t + \varphi_u), \quad (3.10)$$

то, по закону Ома, через этот резистор будет протекать ток

$$i = u / R = (U_m / R) \cos(\omega t + \varphi_u) = I_m \cos(\omega t + \varphi_i), \quad (3.11)$$

где амплитуда тока

$$I_m = U_m / R ;$$

начальная фаза

$$\varphi_i = \varphi_u = \varphi .$$

Следовательно, напряжения на зажимах резистора и ток, протекающий по нему, совпадают по фазе:  $\varphi_u - \varphi_i = 0$ .

Мгновенная мощность, выделяемая в резистивном элементе,

$$p = ui = U_m I_m \cos^2(\omega t + \varphi) = UI [1 + \cos 2(\omega t + \varphi)] = UI + UI \cdot \cos 2(\omega t + \varphi). \quad (3.12)$$

Из (3.12) следует, что мгновенная мощность, выделяемая в резисторе, имеет две составляющие:

постоянную –  $UI$  и гармоническую  $UI \cdot \cos 2(\omega t + \varphi)$  составляющую удвоенной частоты  $2\omega$ . Так как напряжение и ток совпадают по фазе на резистивном элементе, то мгновенная мощность  $P$  всегда положительна. Это означает, что в резисторе происходят необратимые потери энергии.

На рис. 3.3 представлены временные диаграммы тока, напряжения и мгновенной мощности на резистивном элементе.

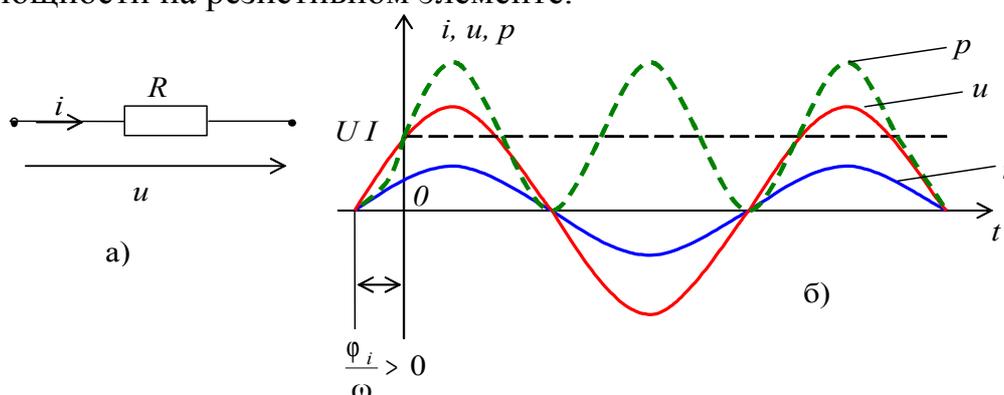


Рисунок 3.3 – Временные зависимости  $u$ ,  $i$ ,  $p$  резистивного элемента  
а – резистивный элемент; б – зависимости  $i(t)$ ,  $u(t)$ ,  $p(t)$

Среднее за период  $T$  значение мощности, выделяемой в резисторе,

$$P_{\text{cp}} = 1/T \int_0^T p dt = 1/T \int_0^T u i dt \quad (3.13)$$

называется **активной мощностью** и измеряется в ваттах (Вт). Из выражения (3.12) и рис. 3.3 следует, что

$$P_{\text{cp}} = UI = I^2 R = U^2 G \quad (3.14)$$

### Индуктивный элемент

Через индуктивный элемент протекает ток

$$i = I_m \cos(\omega t + \varphi_i).$$

В соответствии с уравнением индуктивного элемента, напряжение на нем:

$$u = L \frac{di}{dt} = -\omega LI_m \sin(\omega t + \varphi_i) = U_m \cos\left(\omega t + \varphi_i + \frac{\pi}{2}\right) = U_m \cos(\omega t + \varphi_u), \quad (3.15)$$

где

$$\varphi_u = \varphi_i + \frac{\pi}{2}, \quad \varphi_u - \varphi_i = \frac{\pi}{2},$$

$$U_m = I_m \omega L, \quad U = I \omega L.$$

Величина  $\omega L$  имеет размерность сопротивления, называется **индуктивным сопротивлением** и обозначается  $X_L$ . Обратная ей величина

$$B_L = \frac{1}{X_L} = \frac{1}{\omega L}$$

называется **индуктивной проводимостью**. Следовательно,

$$I_m = B_L U_m, \quad I = B_L U.$$

Из (3.15) следует, что начальные фазы тока и напряжения на индуктивном элементе отличаются на угол  $\pi/2$ . Принято говорить, что напряжение на индуктивном элементе опережает ток на угол  $\pi/2$ .

Мгновенная мощность, поступающая в индуктивный элемент, определяется выражением:

$$p = ui = UI \cdot \sin(2\omega t + 2\varphi_i) = \omega LI^2 \cdot \sin(2\omega t + 2\varphi_i) \quad (3.16)$$

и изменяется по гармоническому закону с удвоенной частотой (в этом выражении напряжение и ток индуктивного элемента соответствуют рис. 3.4).

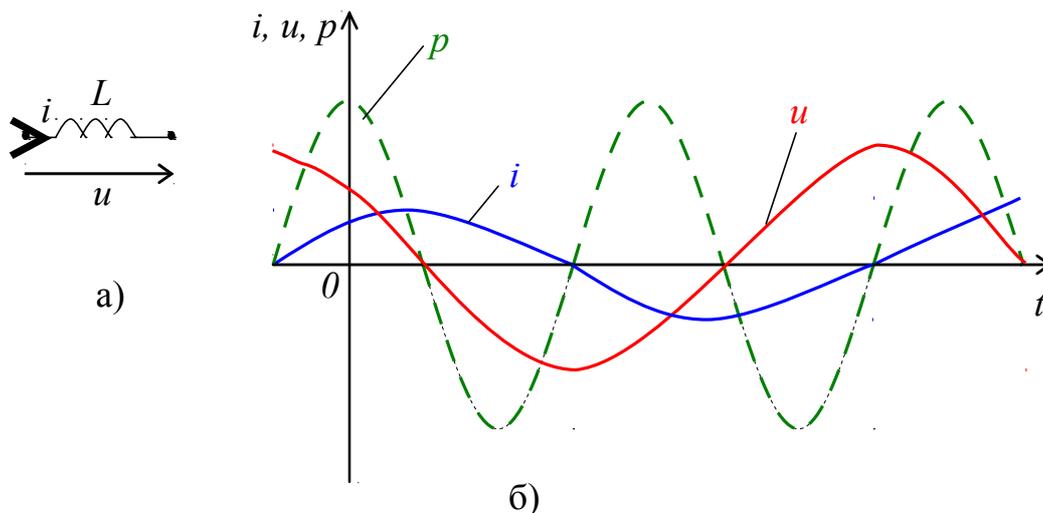


Рисунок 3.4 – Временные зависимости  $u$ ,  $i$ ,  $p$  индуктивного элемента:

а – индуктивный элемент; б – зависимости  $i(t)$ ,  $u(t)$ ,  $p(t)$

Наличие отрицательных значений мощности говорит о том, что индуктивность отдает энергию в течении полупериода. Очевидно, что средняя мощность за период в индуктивном элементе равна нулю.

Энергия магнитного поля индуктивности

$$w_L = \frac{L i^2}{2} = \frac{L I_m^2}{2} \cos^2(\omega t + \varphi_i) = \frac{L I_m^2}{2} [1 + \cos 2(\omega t + \varphi_i)] \quad (3.17)$$

изменяется с частотой  $2\omega$  в пределах от 0 до  $L I_m^2/2$ . Она равна нулю, когда ток индуктивности равен нулю и достигает максимума при амплитудном значении тока. Таким образом, происходит обмен энергией между источником и индуктивным элементом. Поступая от источника, энергия запасается в магнитном поле индуктивности и затем возвращается к источнику при исчезновении магнитного поля.

### Емкостный элемент

Пусть к емкостному элементу приложено напряжение

$$u = U_m \cos(\omega t + \varphi_u).$$

В соответствии с уравнением емкостного элемента, ток

$$i = C \frac{du}{dt} = -\omega C U_m \sin(\omega t + \varphi_u) = I_m \cos(\omega t + \varphi_u + \frac{\pi}{2}) = I_m \cos(\omega t + \varphi_i) \quad (3.18)$$

где

$$\varphi_i = \varphi_u + \frac{\pi}{2}, \quad \varphi_u - \varphi_i = -\frac{\pi}{2}.$$

Амплитудные и действующие значения тока и напряжения связаны соотношением:

$$I_m = \omega C U_m, \quad I = \omega C U.$$

Величина

$$B_C = \omega C$$

имеет размерность проводимости и называется **емкостной проводимостью**. Обратная ей величина, соответственно, является **емкостным сопротивлением**

$$X_C = \frac{1}{\omega C}.$$

Начальные фазы емкостного тока и напряжения отличаются на угол  $\pi/2$ . Принято говорить, что напряжение на емкости отстает от тока на угол  $\pi/2$ . Временные диаграммы тока и напряжения емкости приведены на рис. 3.5.

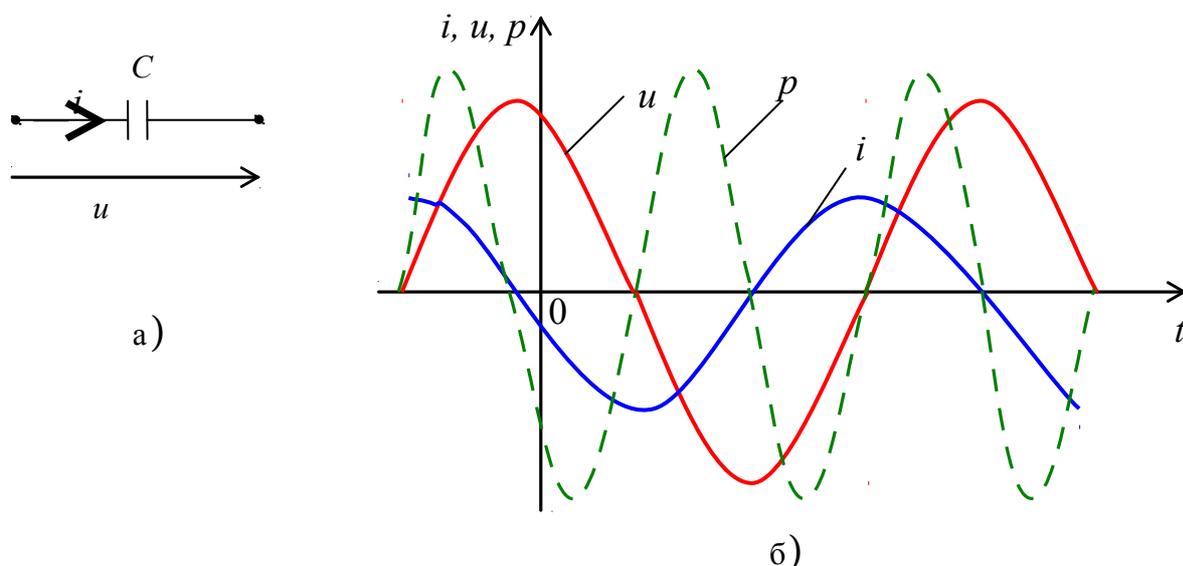


Рисунок 3.5 – Временные зависимости  $u$ ,  $i$ ,  $p$  емкостного элемента:

а – емкостный элемент; б – зависимости  $i(t)$ ,  $u(t)$ ,  $p(t)$

Мгновенная мощность, поступающая в емкостный элемент, имеет тот же характер, что и в случае индуктивного элемента:

$$p = ui = UI \cdot \sin(2\omega t + 2\varphi_u) = \omega CU^2 \cdot \sin(2\omega t + 2\varphi_u) \quad (3.19)$$

При этом средняя мощность за период в емкостном элементе равна нулю. Энергия, связанная с электрическим полем емкостного элемента определяется:

$$w_c = \int_0^T p dt = \frac{Cu^2}{2} \quad (3.20)$$

Так же как и в индуктивной, в емкостной цепи происходит обмен энергией между источником и емкостью. Поступая от источника, энергия запасается в электрическом поле емкости и затем возвращается к источнику при исчезновении электрического поля.

В заключение следует отметить, что определения действующих значений тока и напряжения (3.3), а также средней мощности за период (3.13) справедливы для периодических напряжений и токов любой формы.

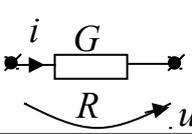
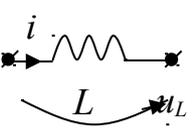
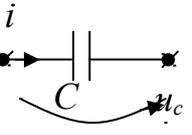
Из рассмотренного выше режима гармонических колебаний в линейных электрических цепях следует очень важный вывод:

Если в линейной цепи, содержащей  $R$ ,  $L$ ,  $C$  – элементы, действует гармонический источник некоторой частоты  $\omega$ , то напряжения и токи, возникающие на всех участках этой цепи, изменяются также по гармоническому закону с той же частотой.

В табл. 3.1 приведены уравнения элементов цепи во временной форме для мгновенных и действующих значений при гармоническом режиме.

Таблица 3.1 – Уравнения элементов цепи

Элемент	Временная	Гармонический режим
---------	-----------	---------------------

	форма	мгновенные значения	действующие значения
<b>Резистивный</b> 	$u_R = Ri$ $i_R = Gu$	$u_R = RI_m \cos(\omega t + \varphi)$ $i_R = GU_m \cos(\omega t + \varphi)$	$U = RI$ $I = GU$
<b>Индуктивный</b> 	$u_L = L \frac{di}{dt}$ $i_L = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^t u dt$	$u_L = \omega LI_m \cos(\omega t + \varphi)$ $i_L = \frac{1}{\omega L} U_m \cos(\omega t + \varphi - \frac{\pi}{2})$	$U = \omega LI$ $I = \frac{1}{\omega L} U$
<b>Емкостный</b> 	$u_c = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i dt$ $i_c = C \frac{du}{dt}$	$u_c = \frac{1}{\omega C} I_m \cos(\omega t + \varphi)$ $i_c = \omega C U_m \cos(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2})$	$U = \frac{1}{\omega C} I$ $I = \omega C U$

### 3.4 Векторное представление гармонических колебаний одной частоты

При анализе электрических цепей векторное представление гармонического колебания является более удобной формой, чем временное.

Выше отмечалось, что в линейной цепи с гармоническим источником некоторой частоты  $\omega_n$  все токи и напряжения имеют также гармонический характер той же частоты. Это позволяет при анализе цепи исключить частоту  $\omega_n$  из числа аргументов колебаний токов и напряжений и характеризовать их только двумя параметрами – амплитудой и начальной фазой. При этом каждому колебанию ставится в соответствие вращающийся вектор определенной длины с заданной начальной фазой. Эти векторы изображаются в полярной системе координат и все операции над ними выполняются в соответствии с векторной алгеброй.

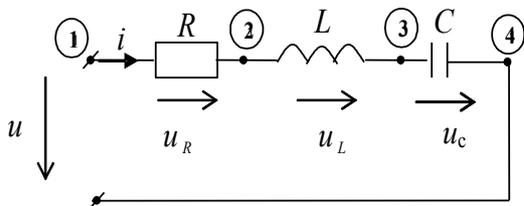


Рисунок 3.6 – Последовательная  $RLC$  цепь

Применение векторного представления гармонических колебаний предлагается рассмотреть на примере цепи рис. 3.6.

При прохождении через эту цепь гармонического тока

$$i = I_m \cos \omega t$$

на ее зажимах создается гармоническое напряжение, равное на основании второго закона Кирхгофа (ЗНК):

$$u = u_R + u_L + u_C.$$

В соответствии с таблицей 3.1,

$$u = RI_m \cos \omega t + \omega LI_m \cos(\omega t + \frac{\pi}{2}) + \frac{1}{\omega C} I_m \cos(\omega t - \frac{\pi}{2}).$$

Сумме гармонических колебаний соответствует сумма векторов

$$RI_m \angle 0 + \omega LI_m \angle \frac{\pi}{2} + \frac{1}{\omega C} I_m \angle -\frac{\pi}{2} = U_m \angle \varphi,$$

или

(3.21)

$$U_{mR} \angle 0 + U_{mL} \angle \frac{\pi}{2} + U_{mC} \angle -\frac{\pi}{2} = U_m \angle \varphi.$$

На рис. 3.7 представлена эта векторная сумма в полярной системе координат, причем начало каждого следующего вектора соответствует концу предыдущего. Такая векторная диаграмма называется **топографической** ( $X_L < X_C$ ).

Из рис. 3.7 следует, что амплитуда приложенного напряжения:

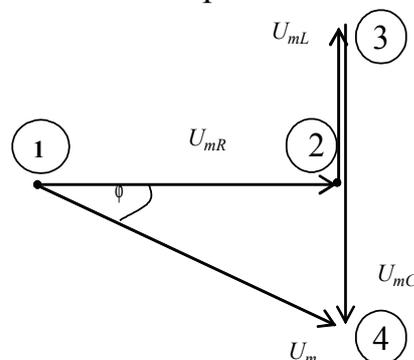


Рисунок 3.7 – Векторная диаграмма напряжений  $RLC$  цепи

$$U_m = \sqrt{U_{mR}^2 + (U_{mL} - U_{mC})^2}$$

а начальная фаза его

$$\varphi = \arctg \frac{U_{mL} - U_{mC}}{U_{mR}}.$$

Располагая этими параметрами приложенного к цепи рис. 3.6 напряжения, получают его мгновенное значение

$$u = U_m \cos(\omega t + \varphi).$$

Использование векторных диаграмм делает анализ цепей в гармоническом режиме наглядным и является удобным способом проверки вычислений. При-

мер изображения векторной диаграммы токов для параллельного контура предлагается выполнить самостоятельно.

Анализ электрических цепей с помощью векторных диаграмм обычно применяется в случае достаточно простых цепей.

Метод, позволяющий рассчитывать сложные цепи в гармоническом режиме алгебраически, был введен в электротехнику А.Е. Кеннели и П.Ч. Штейнметцем в 1893 – 1894 гг. Он получил название **метода комплексных амплитуд**, или **символического метода**. Всё последующее изложение курса ТЭЦС, а также и специальных курсов базируется на этом методе. Символический метод сочетает аналитические расчеты с геометрическими представлениями.

### Контрольные вопросы

- 1 Какое напряжение (ток) называется гармоническим?
- 2 Что называется мгновенным, средним и действующим значением гармонического тока (напряжения)?
- 3 Какими параметрами обладает гармоническое колебание?
- 4 Что такое векторные диаграммы напряжений, токов?
- 5 Как отличаются начальные фазы тока и напряжения в индуктивности (ёмкости)?
- 6 Какими способами можно представить гармоническое колебание?
- 7 Что собой представляет индуктивное сопротивление, индуктивная проводимость?
- 8 Что собой представляет емкостное сопротивление, емкостная проводимость?

## 4 МЕТОД КОМПЛЕКСНЫХ АМПЛИТУД ПРИ АНАЛИЗЕ ЛИНЕЙНЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ

### 4.1 Представление гармонических колебаний с помощью комплексных чисел

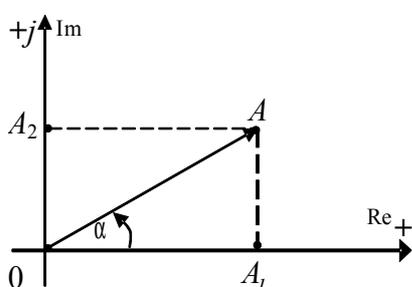


Рисунок 4.1 – Точка А на комплексной плоскости (Re – вещественная ось, Im – мнимая ось)

Известно, что любая точка на комплексной плоскости определяется радиус-вектором этой точки. Так называют вектор, начало которого совпадает с

началом координат, а конец находится в точке, соответствующей данному комплексному числу (рис. 4.1).

В **полярной**, или **показательной** форме некоторое комплексное число  $\dot{A}$  представляется как:  $\dot{A} = A \angle \alpha = Ae^{j\alpha}$ , где  $A$  – модуль,  $\alpha$  – аргумент,  $j = \sqrt{-1}$  – мнимая единица.

Применив формулу Эйлера, получают тригонометрическую форму записи комплексного числа:  $\dot{A} = A \cos \alpha + jA \sin \alpha$  или, соответственно, алгебраическую форму:

$$\dot{A} = A_1 + jA_2, \text{ где } A_1 = A \cos \alpha; A_2 = A \sin \alpha.$$

Совершенно очевидно, что:

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2}, \quad \alpha = \arctg \frac{A_2}{A_1}.$$

Если вектор вращается против часовой стрелки с угловой скоростью  $\omega$ , то в любой момент времени его положение определяется комплексной величиной

$$Ae^{j(\omega t + \alpha)} = \dot{A}e^{j\omega t}, \quad (4.1)$$

где

$$\dot{A} = Ae^{j\alpha}$$

– комплексная амплитуда, представляющая данный вектор в момент  $t = 0$

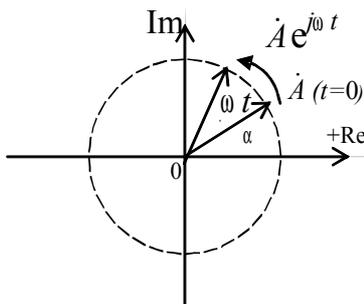


Рисунок 4.2 – Вращающийся вектор  $\dot{A}$  на комплексной плоскости

(рис. 4.2), т. е.  $\dot{A}$  – это комплексная величина, не зависящая от времени. Модуль и аргумент, соответственно, равны амплитуде и начальной фазе гармонического колебания.

Умножение комплексной амплитуды  $\dot{A}$  на оператор вращения  $e^{j\omega t}$  означает поворот вектора  $\dot{A}$  на угол  $\omega t$  в положительном направлении. Из тригонометрической формы комплексной функции (4.1)

$Ae^{j(\omega t + \alpha)} = A \cos(\omega t + \alpha) + jA \sin(\omega t + \alpha)$  следует, что гармоническая функция  $A \cos(\omega t + \alpha)$  может рассматриваться как действительная часть комплексной функции (4.1) или как проекция вращающегося вектора на действительную ось. Условно это записывается следующим образом:

$$A \cos(\omega t + \alpha) = \text{Re}(\dot{A} e^{j\omega t}). \quad (4.2)$$

Если задан ток  $i = 14,1 \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{6}\right)$ , то выражение комплексной амплитуды этого тока ( $I_m=14,1$ ;  $\varphi = \pi/6$ )  $\dot{I}_m = 14,1 e^{j\pi/6}$ . При этом комплексное действующее значение тока равно

$$\dot{I} = \frac{\dot{I}_m}{\sqrt{2}} = 10 e^{j\frac{\pi}{6}}.$$

## 4.2 Уравнения пассивных элементов в комплексной форме

Комплексные токи и напряжения по сути своей являются символами (изображениями) реальных гармонических токов и напряжений.

Комплексным сопротивлением двухполюсника  $Z$ , по которому протекает комплексный ток  $\dot{I}_m$ , создающий комплексное напряжение  $\dot{U}_m$ , условимся называть выражение

$$Z = \frac{\dot{U}_m}{\dot{I}_m}.$$

### Резистивный элемент

Если по резистивному элементу сопротивления  $R$  протекает гармонический ток

$$i = I_m \cos(\omega t + \varphi),$$

которому соответствует комплексная амплитуда

$$\dot{I}_m = I_m e^{j\varphi},$$

то, согласно уравнению этого элемента  $u = Ri$ , на нем возникает напряжение

$$u = RI_m \cos(\omega t + \varphi),$$

которому соответствует комплексная амплитуда

$$\dot{U}_m = RI_m e^{j\varphi}.$$

Тогда очевидно, что

$$Z_R = \frac{RI_m e^{j\varphi}}{I_m e^{j\varphi}} = R. \quad (4.3)$$

### Индуктивный элемент

Если по индуктивному элементу протекает ток

$$i = I_m \cos(\omega t + \varphi) \Leftrightarrow I_m e^{j\varphi},$$

то, в соответствии с уравнением индуктивного элемента

$$u = L \frac{di}{dt},$$

возникает напряжение

$$u = \omega LI_m \cos\left(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow \omega LI_m e^{j\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right)}.$$

Тогда

$$Z_L = \frac{\dot{U}_{mL}}{\dot{I}_{mL}} = \frac{\omega LI_m e^{j\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right)}}{I_m e^{j\varphi}} = \omega L \cdot e^{j\frac{\pi}{2}}.$$

По формуле Эйлера

$$e^{j\frac{\pi}{2}} = j.$$

Подставив это значение в последнее выражение, получим

$$Z_L = j\omega L \tag{4.4}$$

или

$$Z_L = jX_L.$$

### Емкостный элемент

Аналогично для емкостного элемента

$$Z_C = \frac{1}{j\omega C} = -j \frac{1}{\omega C}$$

или

$$Z_C = -jX_C. \tag{4.5}$$

## 4.3 Основные законы теории электрических цепей в комплексной форме

Приведенные выше уравнения пассивных элементов в комплексной форме имеют одинаковую структуру:

$$\dot{U}_{mR} = \dot{I}_{mR} R; \quad \dot{U}_{mL} = \dot{I}_{mL} Z_L; \quad \dot{U}_{mC} = \dot{I}_{mC} Z_C;$$

Поэтому выражения

$$\dot{U}_m = \dot{I}_m Z; \tag{4.6a}$$

и

$$\dot{U} = \dot{I} Z, \text{ а } \dot{I} = U Y, \tag{4.6б}$$

где

$$Y = \frac{1}{Z}$$

называют **законом Ома в комплексной форме для амплитудных и действующих значений**. При этом для комплексных токов и напряжений сохраняется та же система направлений отсчета, которая принята для мгновенных значений токов и напряжений. Согласно первому закону Кирхгофа (ЗТК), в любом узле цепи, находящейся в режиме гармонических колебаний,

$$\sum_{k=1}^l i_k = \sum_{k=1}^l I_{mk} \cos(\omega t + \varphi_{ik}) = 0.$$

Заменив мгновенные значения токов  $i_k$  их комплексными амплитудами  $\dot{I}_{mk}$ , получим:

для амплитудных значений тока

$$\sum_{k=1}^l \dot{I}_{mk} = 0; \quad (4.7a)$$

для действующих значений тока

$$\sum_{k=1}^l \dot{I}_k = 0. \quad (4.7b)$$

Аналогично по второму закону Кирхгофа, для любого контура

$$\sum_{k=1}^n \dot{U}_{mk} = 0 \quad (4.8a)$$

и

$$\sum_{k=1}^n \dot{U}_k = 0. \quad (4.8b)$$

Отсюда следует, что существует полная аналогия в записи основных законов для цепей постоянного тока и для цепей, находящихся в режиме гармонических колебаний. Поэтому все методы анализа цепей постоянного тока формально справедливы и для цепей при гармонических воздействиях.

#### 4.4 Система узловых уравнений для комплексных амплитуд

Рассмотрим анализ цепи в режиме гармонических колебаний методом узловых напряжений.

В канонической форме записи система уравнений для комплексных амплитуд отличается от системы, составленной для цепи постоянного тока, только обозначениями. Для упрощения обозначений вместо комплексных амплитуд  $\dot{U}_m$ ,  $\dot{I}_m$  принято составлять уравнения для комплексных действующих значений

$$\dot{U} = \frac{\dot{U}_m}{\sqrt{2}} = \frac{U_m}{\sqrt{2}} e^{j\varphi_u} = U e^{j\varphi_u},$$

$$\dot{I} = \frac{\dot{I}_m}{\sqrt{2}} = \frac{I_m}{\sqrt{2}} e^{j\varphi_i} = I e^{j\varphi_i}.$$

Часто вместо термина „комплексное действующее значение напряжения или тока” принято говорить „комплексное напряжение” или „комплексный ток”.

Таким образом, система уравнений для комплексных узловых напряжений имеет вид:

$$\left. \begin{array}{l} \textcircled{1} \quad Y_{11}\dot{U}_1 - Y_{12}\dot{U}_2 - \dots - Y_{1N}\dot{U}_N = \dot{J}_{11}; \\ \textcircled{2} \quad -Y_{21}\dot{U}_1 + Y_{22}\dot{U}_2 - Y_{23}\dot{U}_3 - \dots - Y_{2N}\dot{U}_N = \dot{J}_{22}; \\ \dots \\ \textcircled{N} \quad -Y_{N1}\dot{U}_1 - Y_{N2}\dot{U}_2 - Y_{N3}\dot{U}_3 - \dots + Y_{NN}\dot{U}_N = \dot{J}_{NN}, \end{array} \right\} \quad (4.9)$$

где  $Y_{kk}$  представляет собой сумму комплексных проводимостей ветвей, сходящихся в узле  $k$ ; а  $Y_{kl} = Y_{lk}$  – комплексную проводимость ветви, включенной между  $k$ -м и  $l$ -м узлами. На рис. 4.3 дан фрагмент некоторой цепи. Проводимость ветви, соединяющей между собой узлы  $k$  и  $l$ , имеет вид:

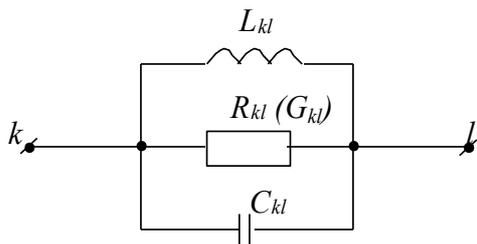


Рисунок 4.3 – Параллельная  $RLC$  цепь

$$Y_{kl} = \frac{1}{j\omega L_{kl}} + \frac{1}{R_{kl}} + j\omega C_{kl}.$$

Для остальных методов предлагается самостоятельно записать выражения в комплексной форме.

При машинных методах анализа цепей в гармоническом режиме используются подпрограммы для вычисления проводимостей и сопротивлений типовых пассивных двухполюсников, составляющих эти цепи.

#### 4.5 Анализ цепей со связанными индуктивностями

Ранее рассматривались цепи, в которых отсутствовали катушки индуктивности, связанные общими магнитными потоками. При наличии двух и более индуктивностей с общим магнитным потоком напряжение на любой из них зависит как от тока, протекающего через каждую индуктивность, так и от токов, протекающих через другие связанные с ней индуктивности. Это явление называют *явлением взаимной индукции*.

##### 4.5.1 Магнитные связи в электрических цепях

Рассмотрим особенности составления уравнений для линейных цепей с индуктивными связями. Будем считать, что в индуктивностях нет потерь.

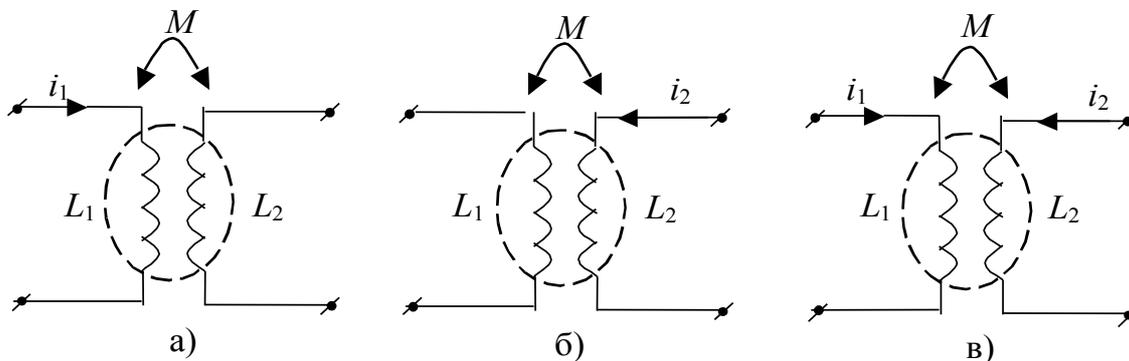


Рисунок 4.4 – Индуктивности, связанные общим магнитным потоком:

а – действует один ток  $i_1$ ; б – действует один ток  $i_2$ ; в – действуют два тока  $i_1$  и  $i_2$

Рассмотрим случай, когда по индуктивности  $L_1$ , протекает ток  $i_1$ , а зажимы второй индуктивности разомкнуты (рис. 4.4, а). Часть магнитного потока, создаваемого током  $i_1$ , пронизывает витки второй индуктивности.

Потокосцепление первой катушки (сумма магнитных потоков, сцепленных с отдельными витками индуктивности  $L_1$ ) обозначим –  $\psi_1$ , а потокосцепление второй индуктивности –  $\psi_{12}$ . Оба потокосцепления пропорциональны току  $i_1$  и равны:

$$\psi_1 = L_1 i_1 \quad \text{и} \quad \psi_{12} = M i_1 ,$$

где  $M$  – взаимная индуктивность. Единица измерения взаимной индуктивности  $M$  – генри (Гн).

Взаимная индуктивность определяется соотношением

$$M = k \sqrt{L_1 L_2} ,$$

где *коэффициент связи*  $k$  может принимать значения  $0 \leq k \leq 1$ . Когда весь магнитный поток, пронизывающий витки одной индуктивности, пронизывает и витки другой,  $k = 1$  (так называемая *жесткая связь*). При отсутствии связи между индуктивностями  $k = 0$ .

Аналогично при протекании тока  $i_2$  через индуктивность  $L_2$  (рис. 4.4б), когда зажимы первой индуктивности разомкнуты,  $\psi_2 = L_2 i_2$  и  $\psi_{21} = M i_2$ . Когда токи протекают через обе индуктивности (рис. 4.4, в) общее потокосцепление первой и второй:

$$\psi_{11} = \psi_1 \pm \psi_{21} \quad \text{и} \quad \psi_{22} = \psi_2 \pm \psi_{12}$$

или

(4.10)

$$\psi_{11} = L_1 i_1 \pm M i_2 \quad \text{и} \quad \psi_{22} = \pm M i_1 + L_2 i_2.$$

Знаки слагаемых в (4.10) зависят от направления магнитных потоков в индуктивностях. А направления магнитных потоков зависят от направления токов, протекающих через индуктивности. Если индуктивности включены таким образом, что потокосцепления  $\psi_1$  и  $\psi_{21}$  (а значит и  $\psi_2$  и  $\psi_{12}$ ) складываются, то такое включение называется *согласным* и в (4.10) ему соответствует знак „плюс“, а знак „минус“ соответствует *встречному* включению, когда потокосцепления вычитаются.

Для удобства изображения схем электрических цепей с взаимной индуктивностью вводится понятие *одноименных зажимов*. **Одноименными зажимами** называют узлы, относительно которых одинаково ориентированные токи создают магнитные потоки, которые складываются.

На рис. 4.5 отмечены одноименные зажимы для случая *согласного* (рис. 4.5, а) и *встречного* (рис. 4.5, б) включения индуктивностей  $L_1$  и  $L_2$ .

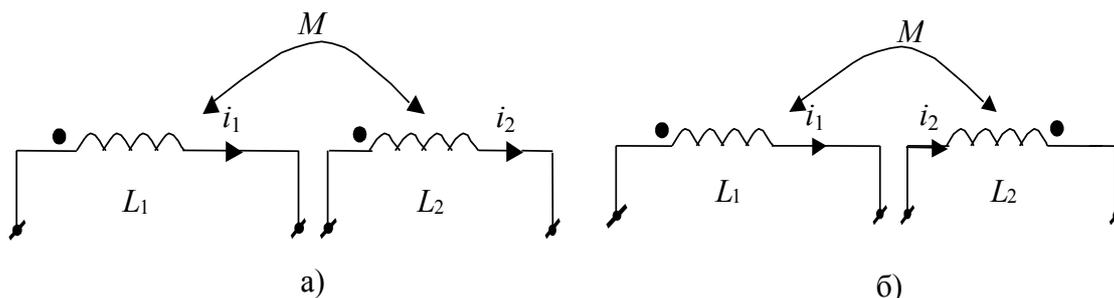


Рисунок 4.5 – Включение индуктивностей: а – согласное; б – встречное

Продифференцировав уравнения (4.10) по переменной  $t$ , находим соотношения между токами и напряжениями на внешних зажимах двух связанных индуктивностей:

$$\left. \begin{aligned} \dot{U}_1 &= j\omega L_1 \dot{I}_1 \pm j\omega M \dot{I}_2 \\ \dot{U}_2 &= \pm j\omega M \dot{I}_1 + j\omega L_2 \dot{I}_2 \end{aligned} \right\} \quad (4.11)$$

Если цепь находится в режиме гармонических колебаний, то в комплексной форме эти соотношения примут вид

$$\left. \begin{aligned} \dot{U}_1 &= j\omega L_1 \dot{I}_1 \pm j\omega M \dot{I}_2 \\ \dot{U}_2 &= \pm j\omega M \dot{I}_1 + j\omega L_2 \dot{I}_2 \end{aligned} \right\} \quad (4.12)$$

Аналогично учитываются индуктивные связи и в более сложных случаях, когда общим магнитным потоком охвачены три и более индуктивности:

$$\begin{aligned} \dot{U}_1 &= j\omega L_1 \dot{I}_1 \pm j\omega M_{12} \dot{I}_2 \pm j\omega M_{13} \dot{I}_3 \pm \dots \pm j\omega M_{1N} \dot{I}_N; \\ \dot{U}_2 &= \pm j\omega M_{21} \dot{I}_1 + j\omega L_2 \dot{I}_2 \pm j\omega M_{23} \dot{I}_3 \pm \dots \pm j\omega M_{2N} \dot{I}_N; \\ \dot{U}_3 &= \pm j\omega M_{31} \dot{I}_1 \pm j\omega M_{32} \dot{I}_2 + j\omega L_3 \dot{I}_3 \pm \dots \pm j\omega M_{3N} \dot{I}_N; \\ &\vdots \\ \dot{U}_N &= \pm j\omega M_{N1} \dot{I}_1 \pm j\omega M_{N2} \dot{I}_2 \pm j\omega M_{N3} \dot{I}_3 \pm \dots + j\omega L_N \dot{I}_N. \end{aligned}$$

#### 4.5.2 Последовательное соединение связанных индуктивностей

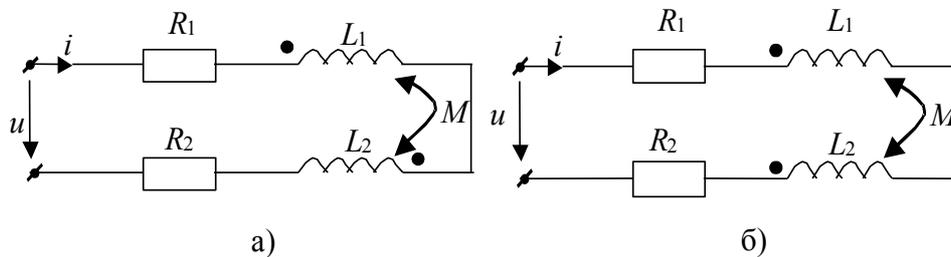


Рисунок 4.6 – Последовательное соединение двух индуктивностей: а – согласное, б – встречное

Рассмотрим последовательное согласное включение индуктивностей с потерями (рис. 4.6, а). Согласно закону Кирхгофа, напряжение на внешних зажимах указанной цепи в комплексной форме

$$\dot{U} = (R_1 + R_2)\dot{I} + j\omega (L_1 + L_2 + 2M)\dot{I} \quad (4.13)$$

Отсюда комплексное эквивалентное сопротивление цепи при согласном включении индуктивностей

где (4.14)

$$Z_{\text{э.с}} = R_{\text{э}} + j\omega L_{\text{э.с}},$$

Тогда уравнение (4.13) можно записать в виде:

$$R_{\text{э}} = R_1 + R_2 + \frac{L_1 + L_2 + 2M}{L_1 L_2} M. \quad (4.15)$$

Сдвиг фаз между приложенным напряжением и током:

$$\varphi_{\text{э.с}} = \varphi_u - \varphi_i = \arctg \frac{\omega L_{\text{э.с}}}{R_{\text{э}}} \quad (4.16)$$

Комплексное напряжение на каждой индуктивности с потерями при согласном включении

$$\dot{U}_1 = [R_1 + j\omega(L_1 + M)]\dot{I} \quad \text{и} \quad \dot{U}_2 = [R_2 + j\omega(L_2 + M)]\dot{I}$$

При встречном включении индуктивностей (рис. 4.6, б) комплексное эквивалентное сопротивление цепи

где

$$Z_{\text{э.в}} = R_{\text{э}} + j\omega L_{\text{э.в}},$$

Сдвиг фаз между приложенным напряжением и током (4.17)

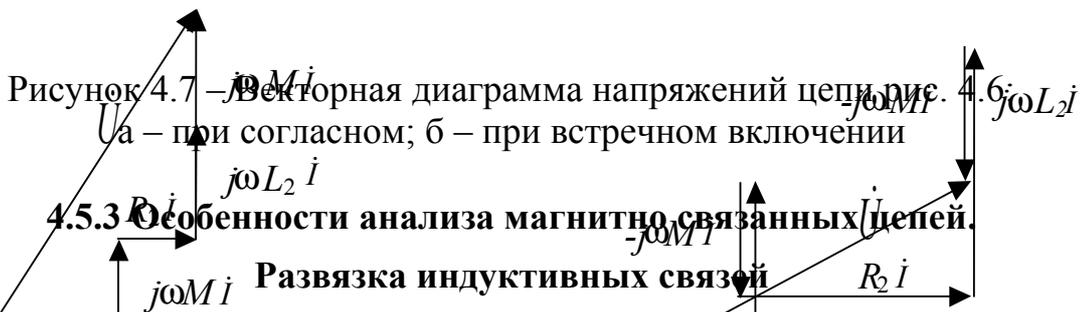
$$L_{\text{э.в}} = L_1 + L_2 - 2M.$$

$$\varphi_{\text{э.в}} = \varphi_u - \varphi_i = \arctg \frac{\omega L_{\text{э.в}}}{R_{\text{э}}}. \quad (4.18)$$

Комплексное напряжение на каждой из индуктивностей при встречном их включении

$$\dot{U}_1 = [R_1 + j\omega(L_1 - M)]\dot{I} \quad \text{и} \quad \dot{U}_2 = [R_2 + j\omega(L_2 - M)]\dot{I}$$

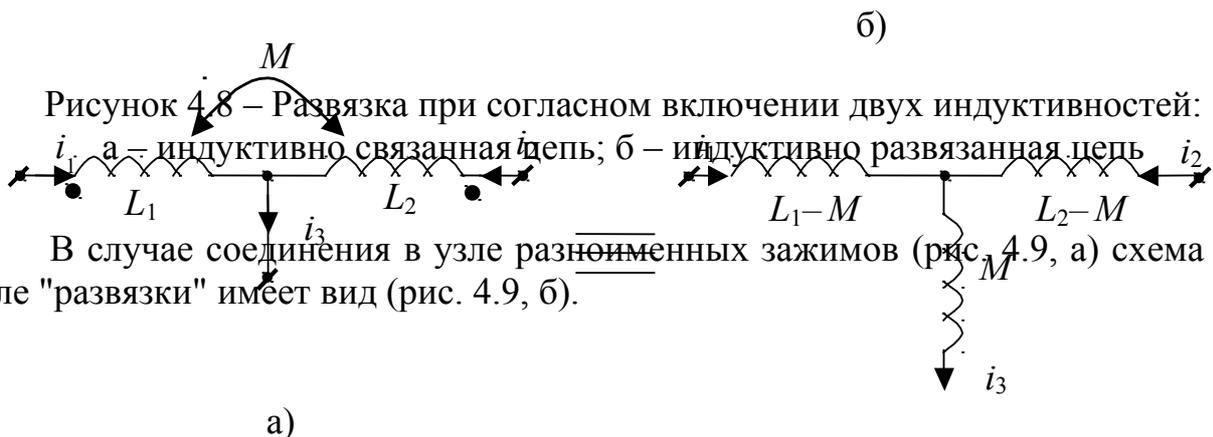
Ниже представлены векторные диаграммы напряжений при согласном (рис. 4.7, а) и встречном (рис. 4.7, б) включении катушек  $L_1$  и  $L_2$ .



Обычно при расчете индуктивно связанных цепей используют метод токов ветвей, или метод контурных токов. Метод узловых напряжений и метод эквивалентного генератора неприемлемы из-за наличия индуктивных связей.

Для того чтобы можно было использовать все известные методы расчета, применяют преобразование цепи, называемое **развязкой индуктивных связей**.

Ниже представлены две связанные индуктивности, соединенные в узле одноименными зажимами (рис. 4.8, а). А на рис. 4.8, б изображена эквивалентная замена этого соединения после “развязки”, не содержащая в явном виде индуктивных связей.



а)

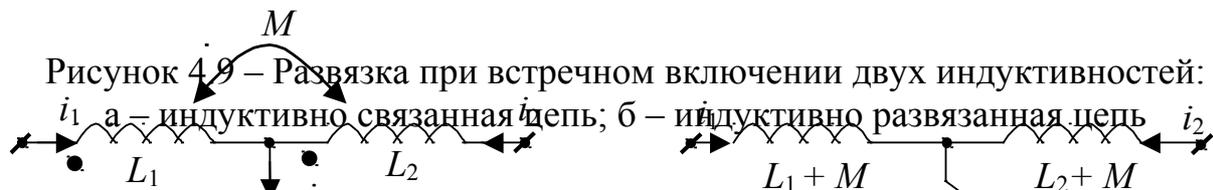


Рисунок 4.9 – Развязка при встречном включении двух индуктивностей:

а – индуктивно связанная цепь; б – индуктивно развязанная цепь

С доказательством эквивалентности схем 4.8, а и б (а также 4.9, а и б), выполненным по законам Кирхгофа, можно ознакомиться по рекомендованной литературе.

а)

#### 4.6 Баланс мощностей б)

б)  $i_3$



Рисунок 4.10 – Цепь под воздействием источника

Пусть ко входу некоторой пассивной электрической цепи (рис. 4.10) подключен источник гармонического напряжения

$$u = U_m \cos(\omega t + \varphi_u).$$

Под воздействием этого источника в цепи протекает ток

$$i = I_m \cos(\omega t + \varphi_i).$$

Отдаваемая источником в цепь за период  $T$  средняя мощность

$$P_{cp} = \frac{1}{T} \int_0^T u i dt = \frac{1}{T} \int_0^T U_m I_m \cos(\omega t + \varphi_u) \cos(\omega t + \varphi_i) dt = \frac{1}{T} \int_0^T U_m I_m \frac{1}{2} \cos(\varphi_u + \varphi_i) dt +$$

$$+ \frac{1}{T} \int_0^T U_m I_m \frac{1}{2} \cos(2\omega t + \varphi_u + \varphi_i) dt = \frac{U_m I_m}{2} \cos(\varphi_u - \varphi_i) \frac{1}{T} \int_0^T dt = \frac{U_m I_m}{2} \cos \varphi = U I \cos \varphi,$$

где  $\varphi = \varphi_u - \varphi_i$ .

$$P_{cp} = U I \cos \varphi = z I \cdot I \cdot \cos \varphi = I^2 \cdot z \cdot \cos \varphi. \quad (4.19)$$

Среднюю мощность за период чаще называют **потребляемой**. Она зависит от среднеквадратичных значений тока  $I$  и напряжения  $U$  и косинуса угла между ними. Если учесть, что  $Z = R + jX = z \cdot \cos \varphi + jz \cdot \sin \varphi$ , то

$$z = \frac{R}{\cos\varphi}$$

и уравнение (4.19) можно представить следующим образом:

$$P_{\text{ср}} = P = I^2 R = U^2 G. \quad (4.20)$$

Следовательно, средняя за период мощность  $P$  равна мощности, рассеиваемой на резистивном элементе (проводимости). Отсюда еще одно название средней мощности – **активная мощность**. Измеряется активная мощность в ваттах (Вт). Наряду с активной мощностью  $P$  в цепях гармонического тока используется понятие **реактивной мощности**.

$$Q = UI \sin \varphi = I^2 X = U^2 B \quad (4.21)$$

и **комплексной мощности**

$$\tilde{S} = P + jQ = \dot{U} \cdot I^*, \quad (4.22)$$

где  $I^*$  – сопряженный комплекс тока: если  $\dot{I} = I \cdot e^{j\varphi}$ , то  $I^* = I \cdot e^{-j\varphi}$ .

Модуль комплексной мощности называется **полной мощностью**

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2}. \quad (4.23)$$

Единица измерения реактивной мощности – вольт-ампер реактивный (ВАр); полной – вольт-ампер (В×А). Используя известные соотношения мощностей  $P$ ,  $Q$ ,  $S$ , можно записать

$$\tilde{S} = UI \cos \varphi + jUI \sin \varphi. \quad (4.24)$$

Следовательно,

$$P = \operatorname{Re}[\dot{U} I^*] = \operatorname{Re}[\tilde{S}]; \quad Q = \operatorname{Im}[\dot{U} I^*] = \operatorname{Im}[\tilde{S}]; \quad (4.25)$$

$$S = UI = |\tilde{S}|; \quad \cos \varphi = \frac{P}{S}. \quad (4.26)$$

**Косинус  $\varphi$**  в энергетике **называют коэффициентом мощности**. Чем больше  $\cos\varphi$ , тем меньше потери энергии. Максимальное значение  $\cos\varphi = 1$  при  $P = S$ ,  $Q = 0$  (т. е. цепь имеет чисто активный характер).

Рассмотрим условие баланса мощности в цепях при гармоническом воздействии. Для этого запишем теорему о мощности (Теллегена) в комплексной форме (так как законы Кирхгофа справедливы для комплексных действующих значений токов  $\dot{I}$  и напряжений  $\dot{U}$ ):

$$\sum_{k=1}^{n_g} \dot{U}_k \dot{I}_k = 0. \quad (4.27)$$

Так как закон Кирхгофа справедлив и по отношению к сопряженным токам  $I_k^*$ , то уравнение (4.27) можно представить таким образом:

$$\sum_{k=1}^{n_g} \dot{U}_k I_k^* = \sum_{k=1}^{n_g} \tilde{S}_k = 0, \quad (4.28)$$

откуда следует, что сумма комплексных мощностей, потребляемых всеми ветвями цепи, равна нулю. Это уравнение отражает баланс комплексной мощности. Можно использовать и другую формулировку баланса мощности: сумма комплексных мощностей, отдаваемых источниками, равна сумме комплексных мощностей, потребляемых остальными ветвями электрической цепи:

$$\sum_{k=1}^{n_g} \tilde{S}_{k \text{ ист}} = \sum_{k=1}^{n_g} \tilde{S}_{k \text{ пот}} \quad (4.29)$$

Из (4.29) получаем условия баланса активных и реактивных мощностей:

$$\sum_{k=1}^{n_g} P_{k \text{ ист}} = \sum_{k=1}^{n_g} P_{k \text{ пот}}; \quad (4.30)$$

$$\sum_{k=1}^{n_g} Q_{k \text{ ист}} = \sum_{k=1}^{n_g} Q_{k \text{ пот}}; \quad (4.31)$$

#### 4.7 Режимы работы источников и условия передачи максимальной мощности

Активная двухполюсная электрическая цепь, способная генерировать гармонические колебания, является источником гармонических колебаний. Согласно теореме об эквивалентном генераторе, существуют две схемы замещения источника гармонических колебаний (рис. 4.11, а и б).

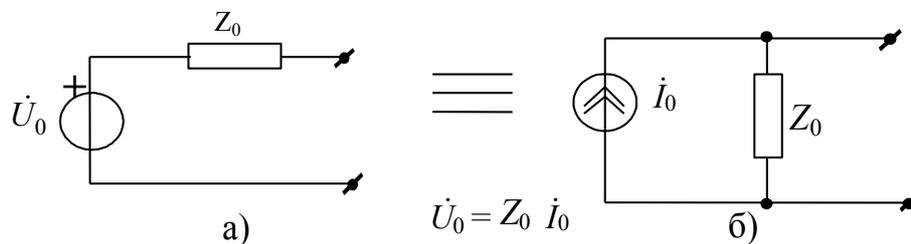


Рисунок 4.11 – Источники: а – напряжения; б – тока

Задающее напряжение источника  $\dot{U}_0$  (рис.4.1а) равно комплексному напряжению на его разомкнутых зажимах. Задающий ток  $\dot{i}_0$  (рис.4.11б) равен комплексному току через коротко замкнутые зажимы. Комплексное сопротивление двухполюсника –

$$Z_0 = \frac{\dot{U}_0}{\dot{I}_0} = R_0 + jX_0$$

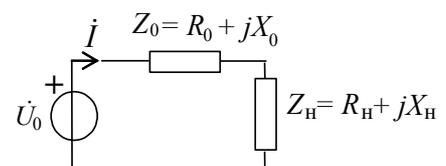


Рисунок 4.12 – Нагруженный источник напряжения

называют внутренним сопротивлением источника. Подключим к источнику в качестве нагрузки некоторый двухполюсник с сопротивлением

$$Z_{\text{н}} = R_{\text{н}} + jX_{\text{н}}$$

и получим условие выделения в ней максимальной мощности. Согласно закону Ома комплексный ток в цепи (см. рис. 4.12)

$$\dot{I} = \frac{\dot{U}_0}{Z_0 + Z_{\text{н}}} = \frac{\dot{U}_0}{R_0 + R_{\text{н}} + j(X_0 + X_{\text{н}})}$$

При этом активная мощность в нагрузке

$$P = I^2 R_{\text{н}} = \frac{U_0^2 R_{\text{н}}}{(R_0 + R_{\text{н}})^2 + (X_0 + X_{\text{н}})^2}$$

Совершенно очевидно, что выделяемая в нагрузке мощность будет максимальной, когда

$$X_0 + X_{\text{н}} = 0, \text{ т. е. если } X_{\text{н}} = -X_0, \quad (4.32)$$

тогда

$$P = \frac{U_0^2 R_{\text{н}}}{(R_0 + R_{\text{н}})^2}$$

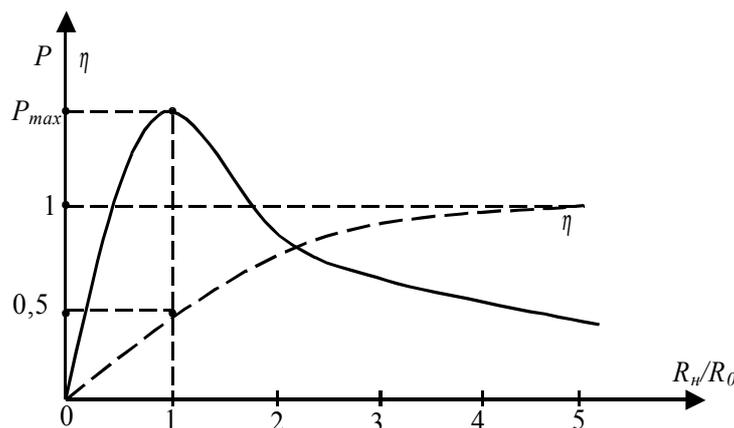


Рисунок 4.13 – Зависимости активной мощности  $P$  и к. п. д.  $\eta$  от нагрузки

На рис. 4.13 приведен график функции  $P(R_{\text{н}})$  (сплошная линия). Максимальное значение функция  $P(R_{\text{н}})$  принимает при

$$R_{\text{н}} = R_0. \quad (4.33)$$

Таким образом, выделение максимальной мощности в нагрузке в режиме гармонических колебаний возможно, если сопротивление нагрузки сопряжено с внутренним сопротивлением генератора:

$$Z_{\text{н}} = R_0 - jX_0.$$

В этом случае говорят, что источник нагружен на сопряженную нагрузку. При этом максимально возможное значение средней мощности в нагрузке будет

$$P_{\text{макс}} = \frac{U_0^2}{4R_0}. \quad (4.34)$$

Коэффициент полезного действия источника  $\eta$  при сопряженной нагрузке составляет только 50 % (так как на внутреннем сопротивлении генератора выделяется та же средняя мощность, что и в нагрузке).

С увеличением  $R_n$  средняя мощность в нагрузке падает, но к. п. д. растет. График зависимости к. п. д. источника от  $R_n/R_0$  показан на рис. 4.13 штриховой линией.

Из условия (4.32) следует, что обеспечить режим максимальной мощности можно только на одной частоте или в узком диапазоне частот.

В системах передачи информации обычно сопротивление нагрузки выбирают равным внутреннему сопротивлению генератора:

$$Z_n = Z_0 = R_0 + jX_0. \quad (4.35)$$

В этом случае принято говорить, что источник нагружен согласованно. На рис. 4.14 приведена схема источника, нагруженного согласованно.

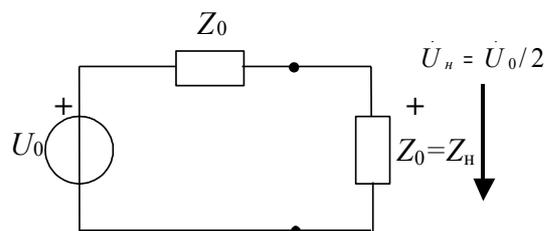


Рисунок 4.14 – Согласованное включение нагрузки

При согласованной нагрузке независимо от частоты напряжение на ее зажимах всегда равно половине задающего напряжения источника. В дальнейшем будет доказано, что это позволяет избежать искажения передаваемого по такой цепи сигнала.

#### 4.8 Порядок расчета линейных электрических цепей методом комплексных амплитуд

- 1 Все элементы исходной схемы заменяются их комплексными изображениями в соответствии с табл. 4.1.
- 2 Определяются комплексные сопротивления (проводимости) пассивных элементов цепи.
- 3 Выбирается оптимальный метод анализа и составляется система алгебраических уравнений в комплексной форме.
- 4 Решается система уравнений относительно неизвестных комплексных токов и напряжений.
- 5 Выполняется проверка расчета составлением баланса мощностей в комплексной форме или построением векторных диаграмм.
- 6 Записываются мгновенные значения токов и напряжений (оригиналы) на основании их комплексных изображений.

#### Контрольные вопросы

- 1 Как записываются комплексные значения токов и напряжений при гармоническом воздействии?

- 2 Что называется комплексным сопротивлением (проводимостью) двухполюсника?
- 3 Как записываются уравнения по законам Кирхгофа и узловые уравнения для комплексных амплитуд?
- 4 Какие индуктивности называются взаимосвязанными?
- 5 Как рассчитывают токи и напряжения при встречном (согласном) включении индуктивностей?
- 6 Как выглядят уравнения баланса мощностей при гармоническом воздействии?
- 7 При каком условии передается максимальная активная мощность от источника в нагрузку?

## 5 АНАЛИЗ НЕЛИНЕЙНЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ

Таблица 4.1 – Комплексные соответствия элементов

Элементы схем замещения электрических цепей при произвольных воздействиях $u(t), i(t)$			Элементы схем замещения электрических цепей плитудных значений $\dot{U}_m$ и $\dot{I}_m$	
Название	Условное изображение	Связь $i$ с $u$	Название	Условное изображение
Идеальный источник напряжения		$u = e(t)$ и не зависит от величины и направления тока $i$	Комплексное изображение источника напряжения	
Идеальный источник тока		$i = j(t)$ и не зависит от величины и направления и напряжения	Комплексное изображение источника тока	
Сопротивление		$u = iR$	Сопротивление	
Индуктивность		$u = L \frac{di}{dt}$	Комплексное сопротивление индуктивности	
Ёмкость		$i = C \frac{du}{dt}$	Комплексное сопротивление ёмкости	
Связанные индуктивности		$u_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} \pm M \frac{di_2}{dt}$ $u_2 = \pm M \frac{di_1}{dt} + L_2 \frac{di_2}{dt}$	Комплексное изображение связанных индуктивностей	

\* → - ПРИБЛИЖЕНИЕ ПРИ ПОСТОЯННЫХ ВОЗДЕЙСТВИЯХ

### 5.1 Элементы и их характеристики

Элемент электрической цепи, у которого параметр зависит от протекающего через него тока и приложенного к нему напряжения, называется **нелинейным элементом** (НЭ). Его (НЭ) можно описать в виде функций

$$i = f(u) \text{ или } u = f^l(i). \tag{5.1}$$

Электрическая цепь, в которой имеется хотя бы один НЭ, будет **нелинейной** (НЦ).

Нелинейные элементы, как и линейные, можно разделить на **резистивные, индуктивные и ёмкостные**.

Нелинейная цепь, в которой отсутствуют реактивные элементы, называется *резистивной (безынерционной)*.

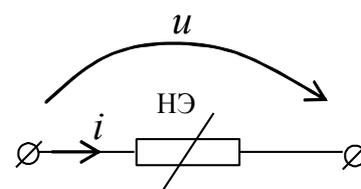


Рисунок 5.1 – Условное изображение нелинейного элемента

Условное графическое изображение нелинейного элемента представлено на рис. 5.1.

Графическое изображение описывающей НЭ функции в декартовой системе координат называется вольт-амперной характеристикой (ВАХ).

Примером резистивного НЭ является полупроводниковый диод, его изображение и примерная ВАХ представлены на рис. 5.2, а и б соответственно. Для идеального диода (вентилля) ВАХ будет такой, как на рис. 5.2, в.

Рисунок 5.2 – Изображение диода (а) и ВАХ неидеального (б) и идеального (в)

Характеристика (ВАХ) НЭ может быть представлена и в виде таблицы соответствующих значений напряжений и токов.

Классифицировать НЭ можно по различным критериям:

- 1 симметричность ВАХ относительно начала координат;
- 2 монотонность ВАХ;
- 3 по количеству зажимов НЭ: двухполюсные (диоды), трехполюсные (триоды) и т. д.

Предлагаем самостоятельно разобраться в вопросах классификации НЭ.

Для полного определения свойств НЭ требуется задание всей ВАХ, но для отдельных точек этой характеристики вводятся понятия **статического** и **динамического** (дифференциального) сопротивлений.

**Статическим сопротивлением** НЭ называют отношение напряжения в выбранной точке характеристики к току в этой же точке (рис. 5.3, а):

$$R_c = \frac{u_1}{i_1}. \quad (5.1)$$

**Динамическим сопротивлением** называют отношение малого приращения напряжения в выбранной точке к соответствующему приращению тока:

$$R_d = \lim_{\Delta i \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta i} = \frac{du}{di}; \quad (5.2)$$

на падающих участках ВАХ оно может приобретать отрицательное значение.

Часто применяют параметр, величина которого является обратной величиной  $R_d$ , который называют крутизной ВАХ:

$$S = \frac{di}{du}. \quad (5.3)$$

На рис. 5.3, а изображена ВАХ и точка на ней, поясняющая нахождение параметров НЭ. На рис. 5.3, б изображена ВАХ туннельного диода. На участке  $(u_1 - u_2)$  динамическое сопротивление принимает отрицательное значение. Следует отметить, что на (рис. 5.3, б) существуют три точки – 1, 2, 3 – в которых и статические и динамические сопротивления различные.

Рисунок 5.3 – Характеристики нелинейных элементов и нахождение по ним параметров:

а – с одной рабочей точкой на ВАХ; б – с тремя точками при одном токе  $i_1$

## 5.2 Способы описания характеристик нелинейных элементов

Вольт-амперные характеристики НЭ получают экспериментально. Для расчётов же необходима характеристика в виде функциональной зависимости. В связи с этим возникает задача подбора такой функции, которая бы с достаточной степенью точности отображала экспериментальную характеристику. Эта задача носит название *аппроксимации*.

**Кусочно-линейная аппроксимация.** Способ заключается в том, что реальную характеристику заменяют отрезками прямых линий с различным наклоном  $i = i_0 + iu$ .

**Степенная аппроксимация.** Наиболее распространенный способ заключается в использовании полинома  $n$ -ой степени:

$$i = a_0 + a_1u + a_2u^2 + a_3u^3 + \dots + a_nu^n,$$

где коэффициенты  $a_0, a_1, a_2, a_3 \dots$  – вещественные числа, определяемые по формуле

$$a_n = \frac{1}{n!} \left. \frac{d^n i}{du^n} \right|_{u = U_0},$$

где  $U_0$  – рабочая точка.

Нетрудно заметить, что  $a_1 = \frac{di}{du}$  крутизна ВАХ в точке  $u = U_0$ ,  $a_2$  – первая производная крутизны (с коэффициентом  $1/2!$ ),  $a_3$  – вторая производная крутизны (с коэффициентом  $1/3!$ ) и т.д. Количество членов разложения определяется заданной точностью расчетов. Существуют и другие способы аппроксимации: экспоненциальные и тригонометрические полиномы, гиперболические функции.

### 5.3 Методы анализа нелинейных цепей

**Аналитический метод расчета** нелинейных цепей заключается в составлении уравнений Кирхгофа. Особенность системы уравнений заключается в том, что в ней обязательно будут присутствовать функции, описывающие НЭ. Поэтому система уравнений в целом будет нелинейной, задача заключается в том, чтобы решить эту систему нелинейных уравнений.

**Пример.** Цепь на рис. 5.4 содержит два узла и три ветви. Если бы цепь была линейной, то потребовалось бы решить систему из трёх уравнений:

$$\begin{aligned} 1к. \quad u_1 + u_2 - E &= 0, \\ 2к. \quad u_3 + u_n - u_2 &= 0, \\ \textcircled{1} \quad i_1 - i_2 - i_n &= 0. \end{aligned}$$

Кроме резисторов в цепи имеется НЭ; для него необходимо записать аппроксимирующую функцию  $i_n = f(u_n)$ . Для большинства сложных цепей аналитическое решение представляет затруднение, поэтому наиболее эффективными являются численные методы решения систем нелинейных уравнений.

**Графо-аналитический метод** применяется для сравнительно простых цепей, содержащих один нелинейный элемент. В этом случае оптимальным является метод эквивалентного генератора.

Например, цепь рис. 5.4 можно заменить эквивалентной цепью рис. 5.5, а, где

Рисунок 5.4 – Двухконтурная цепь с одним нелинейным элементом

$$U_{\text{ЭГ}} = U_{\text{xx}} = i_{2\text{X}} R_2 = \frac{E \cdot R_2}{R_1 + R_2} \quad \text{по рис. 5.5, б;}$$

$$R_{\text{ЭГ}} = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} + R_3 \quad \text{по рис. 5.5, в.}$$

Рисунок 5.5 – Эквивалентное преобразование цепи рис. 5.4:

а – схема эквивалентного источника напряжения; б – нахождение напряжения  $U_{\text{xx}}$ ; в – нахождение эквивалентного сопротивления

Для определения рабочей точки НЭ можно воспользоваться методом обращённой характеристики линейного элемента, т.е. нагрузочная характеристика строится по двум точкам:

- 1)  $u_{\text{н}}=0, i_{\text{кз}} = \frac{E_{\text{ЭГ}}}{R_{\text{ЭГ}}}$
- 2)  $i_{\text{н}}=0, U_{\text{ЭГ}} = U_{\text{xx}}$ .

На рис. 5.6 построена эта линия. Точка, где пересекаются две характеристики, является рабочей точкой, искомыми величинами являются  $u_{\text{н}}$  и  $i_{\text{н}}$ .

Рисунок 5.6 – Нахождение рабочей точки с помощью нагрузочной прямой

Теперь можно выполнить проверку закона Кирхгофа:

$$u_{\text{н}} + i_{\text{н}} \cdot R_{\text{ЭГ}} = U_{\text{ЭГ}}$$

Зная величины  $u_n$  и  $i_n$  можно вычислить остальные величины в цепи рис. 5.4.

Формулы рекомендуется записать самостоятельно.

**Графический метод** эквивалентного преобразования нелинейных цепей состоит в замене ВАХ участков с последовательным или параллельным соединением элементов одной ВАХ. Замена состоит в суммировании заданных характеристик по осям токов (при параллельном соединении элементов) или по осям напряжений (при последовательном соединении элементов).

На рис.5.7,а изображены две характеристики элементов.



Рисунок 5.7 – Преобразование ВАХ: а – при последовательном соединении элементов; б – при параллельном соединении элементов.

При последовательном соединении элементов эти характеристики следует сложить при фиксированных значениях тока, как показано на рис. 5.7, а, и получить третью, эквивалентную.

При параллельном соединении двух элементов следует складывать токи при фиксированных значениях напряжения, как показано на рис. 5.7, б. Достоинство графического метода состоит в том, что в процессе эквивалентных преобразований выявляются влияния на решение характеристик отдельных элементов, вид исходных характеристик не имеет значения; не требуется составления уравнений. К недостатком этого метода следует отнести большую погрешность получаемых результатов (15...20 %).

### Контрольные вопросы

- 1 Какая цепь называется нелинейной?
- 2 Что называется статическим, динамическим сопротивлением нелинейного элемента?
- 3 Что такое крутизна вольт-амперной характеристики?
- 4 Что понимают под аппроксимацией вольт-амперной характеристики нелинейного элемента?
- 5 Как понимать кусочно-линейную аппроксимацию?

- 6 В чем суть аналитического метода расчета нелинейной цепи?
- 7 В чем суть графического метода расчета нелинейной цепи?
- 8 От чего зависит точность графического метода расчета нелинейной цепи?

### *Список рекомендуемой литературы*

- 1 Бакалов В.П., Воробиенко П.П., Крук Б.И. Теория электрических цепей. Радио и связь, 1998.
- 2 Белецкий А.Ф. Теория линейных электрических цепей. – М: Энергия, 1986.
- 3 Зелях Э.В. Теория линейных электрических цепей: Учеб. пособие. Разд. первый – Одесса: ОЭИС им. О.С. Попова, 1978.
- 4 Атабеков Г.И. Теоретические основы электротехники. Ч. 1 – М.: Энергия, 1978.
- 5 Матханов П.Н. Основы анализа электрических цепей. Линейные цепи – М.: Высшая школа, 1990.
- 6 Зевеке Г.В. и др. Основы теории цепей: Учебник для вузов.– М., Энергия, 1975.
- 7 Воробиенко П.П. Теория линейных электрических цепей. Сборник задач и упражнений: Учеб. пособие для вузов. – М.: Радио и связь, 1989.
- 8 Шебес М.Р., Каблукова М.В. Задачник по теории линейных электрических цепей: Учеб. пособие для электро- и радиотехнических спец. вузов. – М.: Высшая школа, 1990.

## ЧАСТЬ 2

# Методические указания к лабораторным работам

## Лабораторная работа № 1 ИССЛЕДОВАНИЕ АВТОНОМНЫХ ДВУХПОЛЮСНИКОВ

### 1 Цель работы

- 1.1 Исследовать несколько автономных двухполюсников (АД) путем измерения вольт-амперных характеристик (ВАХ) двухполюсников.
- 1.2 Определить их внутренние сопротивления и возможные схемы замещения.

### 2 Список литературы

- 2.1 Бакалов В.П., Воробиевко П.П., Крук Б.И. Теория электрических цепей: Учебник для вузов. – М.: Радио и связь, 1998.
- 2.2 Воробиевко П.П. Теория линейных электрических цепей. – М.: Радио и связь, 1989. – № 2.11, 2.12, 2.13.

### 3 Тест-вопросы

- 3.1 Тест-вопросы для выявления степени готовности к выполнению лабораторной работы приведены в Приложении А.

### 4 Домашнее задание

- 4.1 Дать ответы на тест-вопросы.
- 4.2 Ознакомиться с описанием лабораторной работы и содержанием лабораторного задания.
- 4.3 Составить таблицы для измерения ВАХ АД.

### 5 Лабораторное задание

- 5.1 Измерить ВАХ АД рис. 5.1). Результаты измерений занести в таблицу.
- 5.2 Построить соответствующие вольт-амперные характеристики.
- 5.3 Рассчитать внутренние сопротивления АД для каждого случая и привести возможные схемы замещения данных двухполюсников.

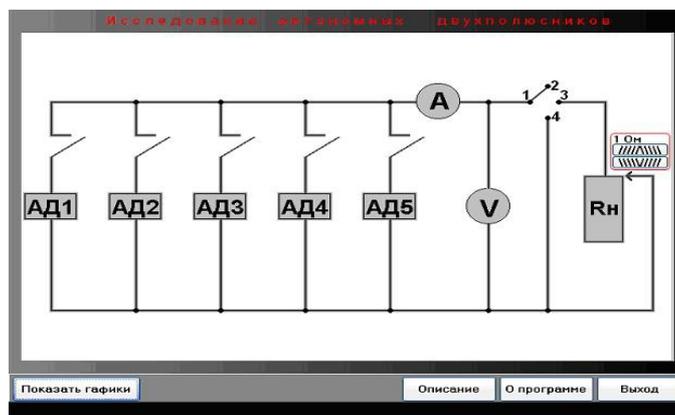


Рисунок 5.1 – Виртуальный макет для измерения ВАХ АД

## 6 Порядок выполнения работы

- 6.1 Для измерения ВАХ двухполюсника необходимо подключить исследуемый двухполюсник (например АД1) к цепи. Для этого нужно привести курсор мыши на ключ, соединенный последовательно с данным двухполюсником, и нажать левую кнопку мыши. При этом ключ замыкается и подключает данный двухполюсник к цепи.
- 6.2 Каждый АД исследуется в трех режимах: режиме холостого хода (х.х.) (переключатель в положении „2”), под нагрузкой (переключатель в положении „3”) и в режиме короткого замыкания (к.з.) (переключатель в положении „4”). Переключение между режимами осуществляется с помощью мыши. В режимах х.х. и к.з. необходимо зафиксировать показания амперметра  $A$  и вольтметра  $V$ .
- 6.3 С помощью мыши подключить исследуемый АД к нагрузке (установить переключатель в положении „3”). Изменяя сопротивление нагрузки  $R_n$ , нажимая кнопки „вверх” и „вниз” рядом с сопротивлением  $R_n$ , зафиксировать показания амперметра  $A$  и вольтметра  $V$  для каждого значения  $R_n$ .
- 6.4 Результаты измерений оформить в виде таблицы.
- 6.5 Аналогично измерить ВАХ остальных АД.
- 6.6 По данным измерений необходимо построить графики зависимости тока от напряжения (ВАХ) для каждого АД.
- 6.7 По построенным ВАХ необходимо определить внутреннее сопротивление (проводимость) каждого АД и привести возможные схемы замещения.
- 6.8 По ВАХ определить, к какому из идеальных источников (тока или напряжения) приближается каждый из исследуемых АД.

## 7 Содержание протокола

- 7.1 Тема и цель работы.
- 7.2 Исследуемая схема.
- 7.3 Таблицы измерений и графики ВАХ АД.
- 7.4 Результаты расчетов.
- 7.5 Эквивалентные схемы замещения АД.
- 7.6 Выводы.

## Лабораторная работа № 2

### ИССЛЕДОВАНИЕ РЕЗИСТИВНОЙ ЦЕПИ С ДВУМЯ ИСТОЧНИКАМИ

#### 1 Цель работы

- 1.1 Освоить применение законов Ома и Кирхгофа при расчете электрической цепи.
- 1.2 Освоить метод наложения.
- 1.3 Экспериментально подтвердить правильность расчетов.

#### 2 Список литературы

- 2.1 Белецкий А.Ф. Теория линейных электрических цепей. – М.: Радио и связь, 1986.– С. 49...62, 31...39.
- 2.2 Воробиенко П.П. Теория линейных электрических цепей. – М.: Радио и связь, 1989.– задачи № 1.13, 1.18; № 2.1, 2.2; № 3.1, 3.2, 3.4, 3.5, 3.8, 3.

#### 3 Тест-вопросы

- 3.1 Тест-вопросы для выявления степени готовности к выполнению лабораторной работы приведены в Приложении А.

#### 4 Домашнее задание

- 4.1 Изучить теоретический материал по данной теме и дать ответы на тест-вопросы.
- 4.2 Изобразить заданную схему с двумя источниками (схему для расчетов и измерений выдает преподаватель).
- 4.3 Изобразить заданную схему с одним источником напряжения (при этом источник тока заменяется х.х.).
- 4.4 Рассчитать  $R_{\text{эkv}}$  относительно источника.
- 4.5 Выполнить расчет токов во всех ветвях и показать их условно-положительные направления на схеме.
- 4.6 Проверить правильность расчета с помощью уравнений Кирхгофа.
- 4.7 Изобразить схему с одним источником тока (при этом источник напряжения заменяется к.з.).
- 4.8 Выполнить пункты 4.4...4.6 для полученной схемы.
- 4.9 Рассчитать токи в исходной схеме (с двумя источниками) методом наложения, используя результаты расчетов в пп. 4.5, 4.8.
- 4.10 Проверить выполнение законов Кирхгофа для исходной схемы.

#### 5 Лабораторное задание

- 5.1 Измерить все токи в схеме с одним источником напряжения. Сравнить с расчетом.
- 5.2 Измерить все токи в схеме с одним источником тока. Сравнить с расчетом.

- 5.3 Измерить все токи в схеме с двумя источниками. Сравнить с расчетом.
- 5.4 Изменить направление источника тока на противоположное. Измерить все токи. Сравнить с результатами п. 5.3.
- 5.5 Сделать выводы.

## 6 Порядок выполнения работы

- 6.1 Собрать заданную схему с двумя источниками энергии. Для этого необходимо привести указатель мыши на каждый из двухполюсников  $Z_1 \dots Z_6$  (см. рис. 6.1) и нажать левую кнопку мыши. При этом символ двухполюсника изменится на символ элемента  $R$ ,  $E$  или  $J$  (при повторном нажатии символ заменяется очередным). При выборе источников особое внимание следует обратить на их полярность. По окончании сборки схемы следует подтвердить выбор, нажав кнопку „схема выбрана” в правом нижнем углу окна макета.

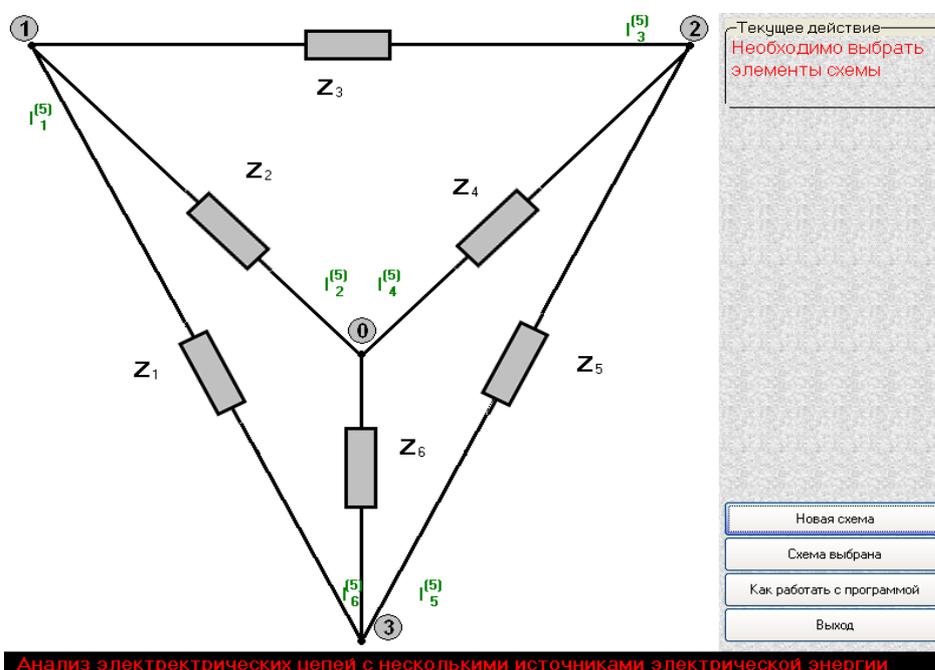


Рисунок 6.1 – Виртуальный макет для анализа разветвленных цепей при постоянном воздействии

- 6.2 В правом верхнем углу макета появятся поля для ввода величин элементов схемы. В эти поля с клавиатуры необходимо ввести величины элементов (в системе СИ) и подтвердить свой выбор, нажав кнопку „Значения элементов введены” в правом нижнем углу окна макета.
- 6.3 При этом автоматически открывается первая частная схема (с одним из источников) с указанием направлений частных токов, значения которых указаны справа от схемы.
- 6.4 Для просмотра остальных частных схем и общей (исходной) схемы и определения соответствующих токов необходимо нажать кнопки от „2” до „6” (в зависимости от количества частных схем) или кнопку „Р” – для вывода исходной схемы; кнопки расположены в правом нижнем углу окна макета.

- 6.5 Для каждой из схем необходимо сравнить полученные результаты с предварительными расчетами и сделать соответствующие выводы.
- 6.6 Для изменения направления источника (исследования новой схемы) необходимо нажать кнопку „Новая схема” в правом нижнем углу окна макета и повторить пп. 6.1...6.5.

### **7 Содержание протокола**

- 7.1 Тема и цель работы.
- 7.2 Исследуемая схема.
- 7.3 Результаты расчетов частных схем и исходной схемы.
- 7.4 Результаты эксперимента.
- 7.7 Выводы.

### **Лабораторная работа № 3**

## **ИССЛЕДОВАНИЕ ЛИНЕЙНЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ ПРИ ГАРМОНИЧЕСКИХ ВОЗДЕЙСТВИЯХ**

### **1 Цель работы**

- 1.1 Исследовать свойства последовательного и параллельного соединений элементов  $R$ ,  $L$  и  $C$  при гармоническом воздействии.

### **2 Список литературы**

- 2.1 Бакалов В.П., Воробийенко П.П., Крук Б.И. Теория электрических цепей: Учебник для вузов. – М.: Радио и связь, 1998.
- 2.2 Воробийенко П.П. Теория линейных электрических цепей. – М.: Радио и связь, 1989. – С.120, зад. 7.1.

### **3 Тест-вопросы**

- 3.1 Тест-вопросы для выявления степени готовности к выполнению лабораторной работы приведены в Приложении А.

### **4 Домашнее задание**

- 4.1 Изучить теоретический материал по рекомендованной литературе и конспекту лекций.
- 4.2 Ответить на тест-вопросы.
- 4.3 Уметь определять основные параметры гармонического колебания (частоту, амплитуду, начальную фазу) по графику временной зависимости тока или напряжения.
- 4.4 Уметь определять разность начальных фаз двух гармонических колебаний по графикам.
- 4.5 Уметь изображать заданное колебание в частотной области и на комплексной плоскости.
- 4.6 Уметь записывать аналитическое выражение по графику временной зависимости тока или напряжения.

## 5 Лабораторное задание

- 5.1 Исследовать последовательное соединение элементов  $R$ ,  $L$  и  $C$  (канонический последовательный колебательный контур):
  - 2.1.1 Определить резонансную частоту  $\omega_0$ , амплитудные и действующие значения напряжений на элементах, максимальные значения реактивных мощностей, зарисовать временные зависимости напряжений и мощностей.
  - 5.1.2 Повторить п. 5.1.1 для частот  $\omega_1 = \omega_0/2$  и  $\omega_2 = 2\omega_0$ .
  - 5.1.3 По временным зависимостям напряжений записать аналитические выражения и построить векторные диаграммы напряжений.
  - 5.1.4 Определить сопротивления реактивных элементов на каждой частоте.
- 5.2 Исследовать параллельное соединение элементов  $R$ ,  $L$  и  $C$  (канонический параллельный колебательный контур):
  - 5.2.1 Выполнить пп. 5.1.1...5.1.4, в качестве объектов исследований выбрав токи через элементы и активную мощность.
- 5.3 Для произвольной частоты, отличной от  $\omega_1$ ,  $\omega_0$  и  $\omega_2$ , определить разность начальных фаз между напряжениями на элементах для последовательного и токов через элементы – для параллельного колебательных контуров, построить векторные диаграммы.

## 6 Порядок выполнения работы

- 6.1 В окне программы лабораторной работы выбрать закладку „Последовательный контур” (рис. 6.1). При этом на экране появится стенд исследования последовательного соединения элементов  $R$ ,  $L$  и  $C$ . В правом верхнем углу – схема контура и аналитическое выражение гармонического воздействия – входного тока; в левом углу – кнопки увеличения (направлена по часовой стрелке) и уменьшения (против часовой стрелки) частоты; внизу – графики временных зависимостей напряжений и мощностей (цвет кривой соответствует цвету элемента на схеме).
- 6.2 Изменяя частоту воздействия с помощью кнопок увеличения и уменьшения частоты, определить резонансную частоту контура (при этом напряжения на реактивных элементах равны по величине и противоположны по знаку).
- 6.3 Резонансную частоту и соответствующие ей графики занести в протокол.
- 6.14 С помощью кнопок увеличения и уменьшения частоты установить частоты  $\omega_1$  и  $\omega_2$ . Соответствующие им графики напряжений и мощностей занести в протокол.
- 6.5 Для каждой кривой записать аналитическое выражение и привести векторные диаграммы напряжений для всех трех частот.
- 6.6 Для исследования параллельного соединения элементов  $R$ ,  $L$  и  $C$  необходимо выбрать закладку „параллельный контур”. Появляется стенд, аналогичный предыдущему (рис. 6.2), на временных диаграммах приводятся графики токов и активной мощности.

6.7 Все исследования выполняются аналогично применительно к токам через элементы и мгновенной мощности на резистивном элементе.

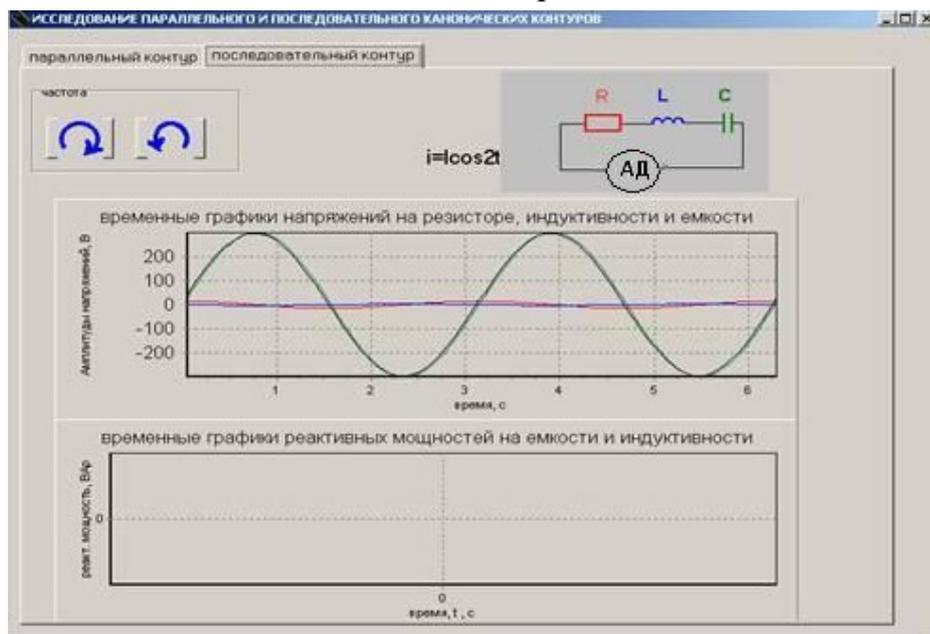


Рисунок 6.1 – Виртуальный макет для исследования последовательного соединения элементов  $R$ ,  $L$  и  $C$

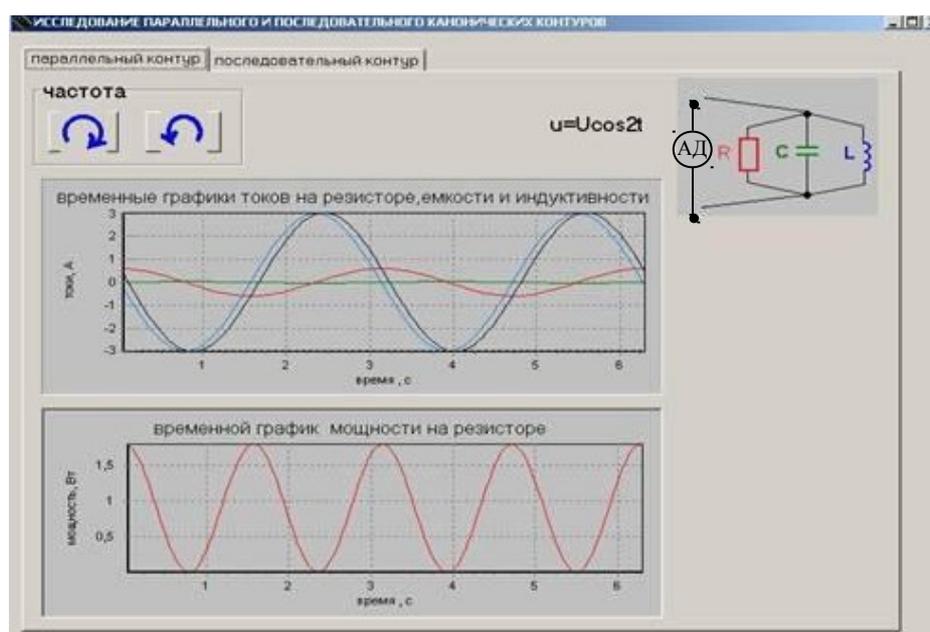


Рисунок 6.2 – Виртуальный макет для исследования параллельного соединения элементов  $R$ ,  $L$  и  $C$

### 7 Содержание протокола

- 7.1 Тема и цель работы.
- 7.2 Результаты выполнения домашнего задания.
- 7.3 Схемы измерений, графики, векторные диаграммы, аналитические выражения.
- 7.4 Выводы.

## Лабораторная работа № 4

### ИССЛЕДОВАНИЕ ВХОДНЫХ ФУНКЦИЙ ЦЕПЕЙ ( $RL$ , $RC$ , $RLC$ )

#### 1 Цель работы

- 1.1 Исследовать частотные зависимости линейных пассивных двухполюсников, содержащих элементы  $R$ ,  $L$ ,  $C$ .

#### 2 Литература

- 2.1 Бакалов В.П., Воробиенко П.П., Круг Б.Н. Теория электрических цепей: Учебник для вузов. – М.: Радио и связь, 1998.
- 2.2 Белецкий А.Ф. Теория линейных электрических цепей. – М.: Радио и связь, 1986.

#### 3 Тест-вопросы

- 3.1 Тест-вопросы для выявления степени готовности к выполнению лабораторной работы приведены в Приложении А.

#### 4 Домашнее задание

- 4.1 Изучить свойства пассивных элементов  $R$ ,  $L$ ,  $C$  при гармоническом воздействии.

- 4.2 Определить величины элементов по формулам

$$R = n, \text{ Ом}; \quad L = \frac{n}{m+n}, \text{ мГн}; \quad C = \frac{10}{n(m+n)}, \text{ мкФ},$$

где  $m$  – номер академической группы на потоке (например ТС-25,  $m = 5$ ),  
 $n$  – порядковый номер студента по журналу.

- 4.3 Выполнить расчеты для трех схем рис. 4.1.

Рисунок 4. 1– Исследуемые схемы

Расчетные формулы для схемы 1 рис. 4.1:  $Z_{RL} = R + jX_L = z_{RL} e^{j\varphi_{RL}}$ ;

$$X_L = \omega L; \quad z_{RL} = \sqrt{R^2 + X_L^2}; \quad I_{RL} = \frac{U_{\Gamma}}{z_{RL}}; \quad \varphi_{RL} = \arctg \frac{X_L}{R}.$$

Расчеты проводить на частотах:  $0$ ;  $0,25\omega_{11}$ ;  $0,5\omega_{11}$ ;  $\omega_{11}$ ;  $2\omega_{11}$ ;  $3\omega_{11}$ ;  $\infty$ ,  
где  $\omega_{11}$  – опорная частота, определяется из соотношения  $X_L = R$ , откуда

$$\omega_{11} = \frac{R}{L}, \frac{\text{рад}}{\text{с}}; \quad U_{\Gamma} = 10 \text{ В}.$$

Расчеты свести в таблицу 4.1. По результатам расчетов построить частотные характеристики.

Таблица 4.1

$\omega$ , p/c	$X_L$ , Ом	$z_{RL}$ , Ом	$I_{RL}$ , mA	$\varphi_{RL}^\circ$
----------------	------------	---------------	---------------	----------------------

Расчетные формулы для схемы 2 рис. 4.1:  $Z_{RC} = R - jX_C = z_{RC} e^{j\varphi_{RC}}$ ;

$$X_C = \frac{1}{\omega C}; z_{RC} = \sqrt{R^2 + X_C^2}; I_{RC} = \frac{U_\Gamma}{z_{RC}}; \varphi_{RC} = -\arctg \frac{X_C}{R}.$$

Расчеты проводить на частотах: 0; 0,25 $\omega_{12}$ ; 0,5 $\omega_{12}$ ;  $\omega_{12}$ ; 2 $\omega_{12}$ ; 3 $\omega_{12}$ ;  $\infty$ , где  $\omega_{12}$  – опорная частота, определяемая из соотношения  $X_C = R$ , откуда  $\omega_{12} = \frac{1}{RC}$ , рад/с;  $U_\Gamma = 10$  В.

Расчеты свести в таблицу 4.2. По результатам расчетов построить частотные характеристики.

Таблица 4.2

$\omega$ , p/c	$X_C$ , Ом	$z_{RC}$ , Ом	$I_{RC}$ , mA	$\varphi_{RC}^\circ$
----------------	------------	---------------	---------------	----------------------

Расчетные формулы для схемы 3 рис. 4.1:  $Z = R + jX_{LC} = z_{RLC} e^{j\varphi_{RLC}}$ ;

$$X_{LC} = X_L - X_C; z_{RLC} = \sqrt{R^2 + X_{LC}^2}; I_{RLC} = \frac{U_\Gamma}{z_{RLC}}; \varphi_{RLC} = \arctg \frac{X_{LC}}{R}.$$

Расчеты проводить на частотах: 0; 0,25 $\omega_0$ ; 0,5 $\omega_0$ ;  $\omega_0$ ; 2 $\omega_0$ ; 3 $\omega_0$ ;  $\infty$ ,

где  $\omega_0$  – опорная частота, определяемая:  $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ , рад/с.

Расчеты свести в таблицу 4.3, по результатам расчетов построить частотные характеристики.

Таблица 4.3

$\omega$ , p/c	$X_L$ , Ом	$X_C$ , Ом	$X_{LC}$ , Ом	$z_{RLC}$ , Ом	$I_{RLC}$ , mA	$\varphi_{RLC}^\circ$
----------------	------------	------------	---------------	----------------	----------------	-----------------------

## 5 Лабораторное задание

5.1 Собрать схему рис. 4.1. Установить значения элементов, напряжение генератора.

5.2 Изменяя частоту  $f$  (Гц) источника гармонических колебаний, измерить и записать показания вольтметров в таблицу 5.1. Измерения производить на частотах: 0,25 $f_{11}$ ; 0,5 $f_{11}$ ;  $f_{11}$ ; 2 $f_{11}$ ; 3 $f_{11}$  ( $f_{11} = \frac{\omega_{11}}{2\pi}$ ).

Таблица 5.1

$f$ , Гц	$U_R$ , В	$U_L$ , В	$I_{RL}$ , mA	$X_L$ , Ом	$z_{RL}$ , Ом	$\varphi_{RL}^\circ$
----------	-----------	-----------	---------------	------------	---------------	----------------------

5.3 По результатам измерений рассчитать параметры цепи по формулам

$$I_{RL} = \frac{U_R}{R}; X_L = \frac{U_L}{I_{RL}}; z_{RL} = \frac{U_{\Gamma}}{I_{RL}}; \varphi_{RL} = \arctg \frac{U_L}{U_R}, \text{ а результаты расчетов занести в таблицу 5.1.}$$

5.4 Повторить пункты 5.1...5.3 для схемы 2 рис. 4.1. Расчетные формулы по

результатам измерений:  $I_{RC} = \frac{U_R}{R}; X_C = \frac{U_C}{I_{RC}}; z_{RC} = \frac{U_{\Gamma}}{I_{RC}}; \varphi_{RC} = -\arctg \frac{U_C}{U_R}.$

Результаты расчетов свести в таблицу 5.2.

Таблица 5.2

$f, \text{Гц}$	$U_R, \text{В}$	$U_C, \text{В}$	$I_{RC}, \text{мА}$	$X_C, \text{Ом}$	$z_{RC}, \text{Ом}$	$\varphi_{RC}^{\circ}$
----------------	-----------------	-----------------	---------------------	------------------	---------------------	------------------------

5.5 Повторить пункты 5.1...5.3 для схемы 3 рис. 4.1. Расчетные формулы по результатам измерений:

$$I_{RLC} = \frac{U_R}{R}; X_L = \frac{U_L}{I_{RLC}}; X_C = \frac{U_C}{I_{RLC}}; z_{RLC} = \frac{U_{\Gamma}}{I_{RLC}}; \varphi_{RLC} = \arctg \frac{U_L - U_C}{U_R}.$$

Результаты измерений и расчетов по ним свести в таблицу 5.3.

Таблица 5.3

$f, \text{Гц}$	$U_R, \text{В}$	$U_L, \text{В}$	$U_C, \text{В}$	$U_{LC}, \text{В}$	$I_{RLC}, \text{мА}$	$X_L, \text{Ом}$	$X_C, \text{Ом}$	$z_{RLC}, \text{Ом}$	$\varphi_{RLC}^{\circ}$
----------------	-----------------	-----------------	-----------------	--------------------	----------------------	------------------	------------------	----------------------	-------------------------

По данным таблиц построить соответствующие графики.

## 6 Порядок выполнения работы

6.1 Собрать схему исследуемой цепи ( $RL, RC, RLC$ ). Для этого необходимо нажать кнопку „Выбор элементов” вверху виртуального макета (рис. 6.1). В появившемся окне каждому из двухполюсников  $Z_1, Z_2, Z_3$  необходимо поставить в соответствие элемент цепи ( $R, L$  или  $C$ ). При исследовании двухполюсников  $RL$  и  $RC$  элемент  $Z_3$  необходимо заменить коротким замыканием (КЗ). Пример схемы для исследования  $RL$  цепи приведен на рис. 6.2.

6.2 Установить значения элементов  $R, L, C$  согласно заданному варианту. Для этого необходимо нажать на кнопку „Значения элементов” лабораторного макета. В появившемся окне ввести значения элементов в системе СИ и нажать кнопку „ОК”.

Примечание. Кратные единицы удобнее вводить с помощью указателя порядка, например  $5 \text{ мкФ} - „5e-6” \text{ Ф}$ .

6.3 Установить параметры генератора. Для этого нажать кнопку „Параметры генератора”. В появившемся окне ввести задающее напряжение (устанавливается один раз), частоту из табличных данных, начальную фазу (обычно  $0$  градусов) и нажать кнопку „ОК”.

Замечание. Частоту, равную  $0$  и  $\infty$ , на генераторе выставить нельзя.

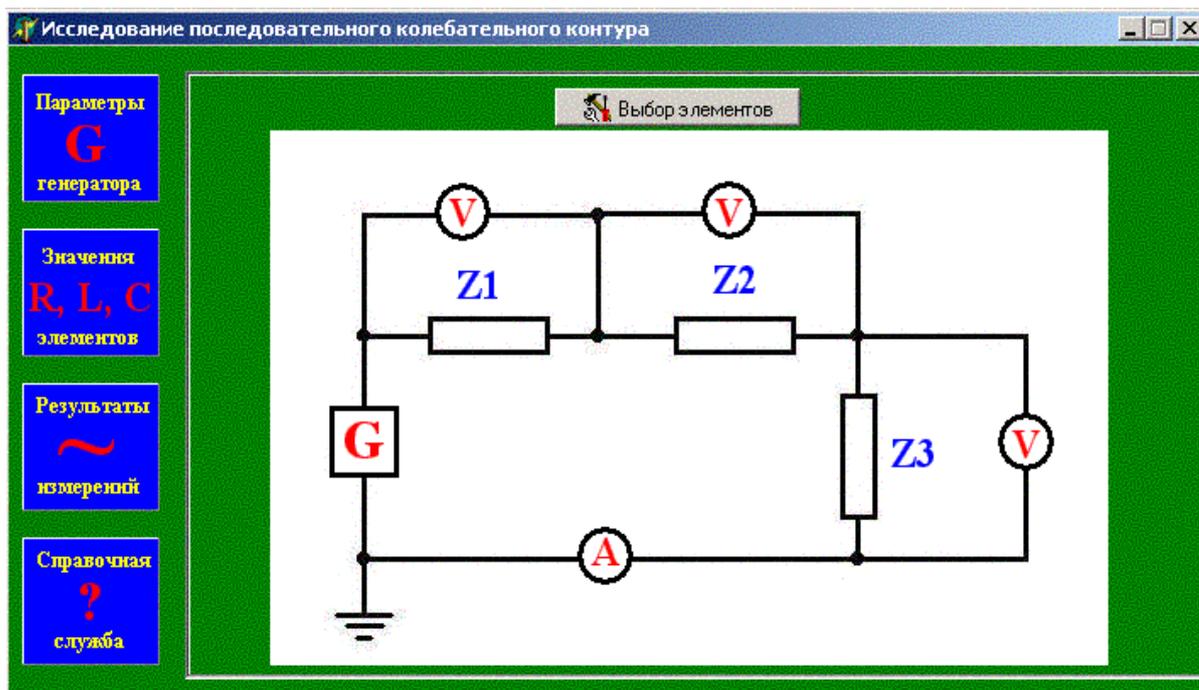


Рисунок 6.1 – Виртуальный макет исследуемой цепи

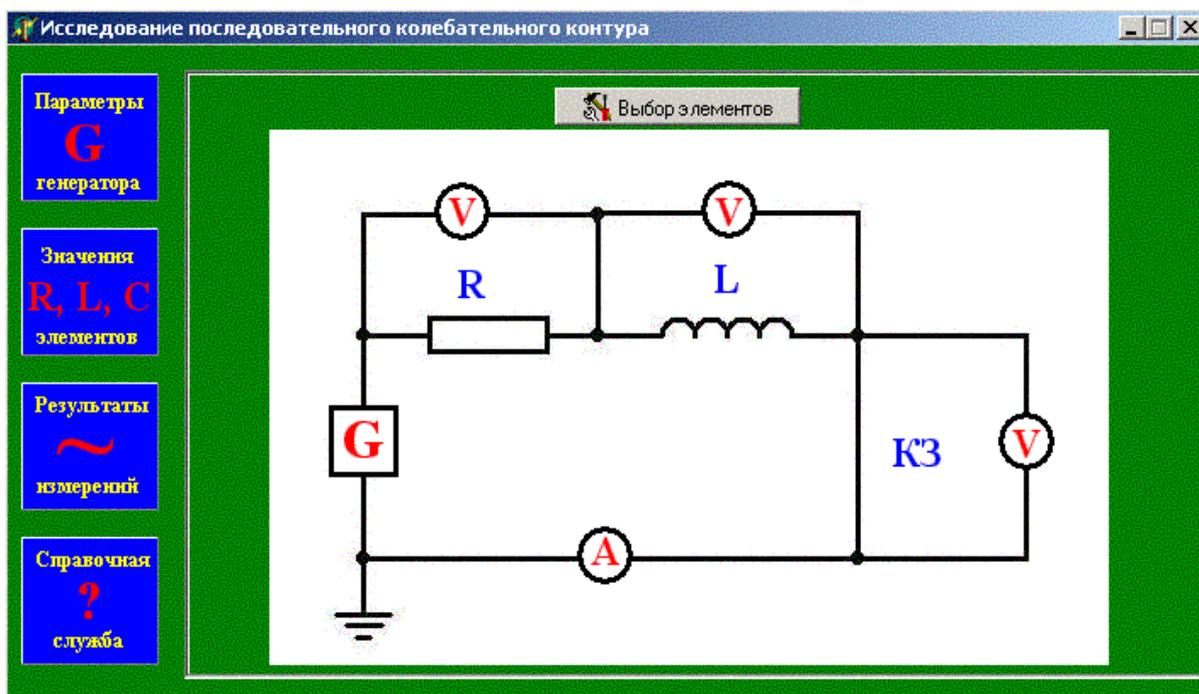


Рисунок 6.2 – Виртуальный макет для исследования RL цепи

- 6.4 Зафиксировать показания приборов. Для этого необходимо навести курсор мыши на измерительный прибор и нажать левую кнопку мыши. В появившемся окне приведены показания прибора в системе СИ.
- 6.5 Для снятия частотных характеристик цепи необходимо выполнить пункты 6.3 и 6.4 для всех значений частот.
- 6.6 Для изменения схемы необходимо повторить пункты 6.1 и 6.2.

6.7 Примерные графики частотных характеристик данной цепи можно пронаблюдать, нажав на кнопку „Результаты измерений”. Возврат осуществляется с помощью кнопки „Изменить схему”.

## **7 Содержание протокола**

7.1 Тема и цель работы.

7.2 Результаты выполнения домашнего задания.

7.3 Схемы измерений, графики, аналитические выражения, таблицы.

7.4 Выводы.

## Приложение А

### Тест - вопросы к лабораторным работам

#### Лабораторной работе № 1

#### ИССЛЕДОВАНИЕ АВТОНОМНЫХ ДВУХПОЛЮСНИКОВ

- 1 Что называется электрической цепью?
- 2 Что понимают под схемой замещения?
- 3 Какие схемы называются эквивалентными?
- 4 Какие электрические элементы называются автономными?
- 5 Какие электрические элементы называются активными?
- 6 Что такое мгновенная мощность?
- 7 Что такое электрическая схема?
- 8 Какой элемент называют линейным?
- 9 Какой элемент называют идеальным источником напряжения?
- 10 Какой элемент называют идеальным источником тока?
- 11 Как правильно сформулировать закон Кирхгофа для токов?
- 12 Как правильно сформулировать закон Кирхгофа для напряжений?
- 13 Какое соединение двухполюсников называется последовательным?
- 14 Какое соединение двухполюсников называется параллельным?
- 15 Из каких элементов состоит схема замещения неидеального источника напряжения?
- 16 Из каких элементов состоит схема замещения неидеального источника тока?
- 17 Какие источники называются зависимыми?
- 18 Сколько зависимых источников можете назвать?
- 19 Какие электрические элементы называются пассивными?
- 20 Какие электрические элементы называются неавтономными?
- 21 Как записать уравнение по 1-му закону Кирхгофа для указанного узла?
- 22 Как записать уравнение емкости  $C$ ?
- 23 Как записать уравнение индуктивности  $L$ ?
- 24 Как выглядит ВАХ неидеального источника напряжения?
- 25 Как выглядит ВАХ неидеального источника тока?
- 26 Как определяется количество энергии?
- 27 Какой элемент называется нелинейным?
- 28 В каких единицах измеряется проводимость?
- 29 В чем отличие источника напряжения от источника тока?

## Лабораторная работа № 2

### ИССЛЕДОВАНИЕ РЕЗИСТИВНОЙ ЦЕПИ С ДВУМЯ ИСТОЧНИКАМИ

- 1 Как связаны между собой токи и величины проводимостей в резистивном делителе тока?
- 2 Как связаны между собой токи и величины емкостей в емкостном делителе тока?
- 3 Как связаны между собой токи и величины индуктивностей в индуктивном делителе тока?
- 4 Как связаны между собой напряжения и величины сопротивлений в резистивном делителе напряжения?
- 5 Как связаны между собой напряжения и величины емкостей в емкостном делителе напряжения?
- 6 Как связаны между собой напряжения и величины индуктивностей в индуктивном делителе напряжения?
- 7 В чем суть метода наложения при расчете электрической сети?
- 8 В чем суть метода узловых напряжений при расчете электрической цепи?
- 9 В чем суть метода эквивалентного источника напряжения при расчете электрической цепи?
- 10 В чем суть метода эквивалентного источника тока при расчете электрической цепи?
- 11 Что называется делителем тока?
- 12 Что называется делителем напряжения?
- 13 Как записать уравнение делителя напряжения?
- 14 Как записать уравнение делителя тока?
- 15 Что такое собственная проводимость узла?
- 16 Верно ли утверждение, что последовательное соединение элементов – это такое соединение, при котором все элементы соединены в один узел?
- 17 Верно ли утверждение, что алгебраическая сумма напряжений в контуре равняется нулю?
- 18 Верно ли утверждение, что сумма всех токов в контуре равняется нулю?
- 19 Как записать уравнение по 1-му закону Кирхгофа для указанного узла?
- 20 Как записать уравнение емкости  $C$ ?
- 21 Как записать уравнение индуктивности  $L$ ?
- 22 Как выглядит ВАХ неидеального источника напряжения?
- 23 Что называется графом электрической цепи?
- 24 Что называется вершиной графа?
- 25 Что называется ребром графа?
- 26 Что называется циклом графа?
- 27 Что понимается под деревом графа?
- 28 Какие графы называются изоморфными?
- 29 Что такое направленный сигнальный граф?
- 30 Какой граф называют планарным?

### Лабораторная работа № 3

## ИССЛЕДОВАНИЕ ЛИНЕЙНЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ ПРИ ГАРМОНИЧЕСКОМ ВОЗДЕЙСТВИИ

- 1 Чему равна разность начальных фаз гармонических напряжения и тока в резисторе?
- 2 Чему равна разность начальных фаз гармонических напряжения и тока в индуктивности?
- 3 Чему равна разность начальных фаз гармонических напряжения и тока в емкости?
- 4 Чему равна разность начальных фаз гармонических напряжений на элементах  $L$  и  $C$ , если они включены последовательно?
- 5 Чему равна разность начальных фаз гармонических напряжений на элементах  $R$  и  $L$ , если они включены последовательно?
- 6 Чему равна разность начальных фаз гармонических напряжений на элементах  $R$  и  $C$ , если они включены последовательно?
- 7 Чему равна разность начальных фаз гармонических напряжений на  $RLC$  контуре и тока, протекающего через элементы, если  $U_R = U_C = U_L = 1$  В?
- 8 Чему равна разность начальных фаз гармонических токов в элементах  $L$  и  $C$ , если они включены параллельно?
- 9 Чему равна разность начальных фаз гармонических токов в элементах  $R$  и  $C$ , если они включены параллельно?
- 10 Чему равна разность начальных фаз гармонических токов в элементах  $R$  и  $L$ , если они включены параллельно?
- 11 Какое воздействие называется гармоническим?
- 12 В каких единицах измеряется угловая частота  $\omega$ ?
- 13 Как определить амплитудное значение напряжения, если известно его действующее значение?
- 14 В каких единицах измеряется циклическая частота  $f$ ?
- 15 Что называется периодом гармонического колебания?
- 16 Как связаны между собой угловая частота и период гармонического колебания?
- 17 Что представляет собой среднее значение гармонического колебания?
- 18 Как определяется энергия в резистивном элементе?
- 19 Как определяется индуктивное сопротивление?
- 20 Как определяется индуктивная проводимость?
- 21 Как определяется емкостное сопротивление?
- 22 Как определяется емкостная проводимость?
- 23 Какой режим электрической цепи называется резонансом?
- 24 Как определить реактивное сопротивление цепи?
- 25 Как определить реактивную проводимость цепи?

## Лабораторная работа № 4

### ИССЛЕДОВАНИЕ ВХОДНЫХ ФУНКЦИЙ ЦЕПЕЙ

- 1 В какой форме необходимо представить комплексные сопротивления при последовательном соединении элементов?
- 2 В какой форме необходимо представить числа, чтобы умножить комплексные проводимости?
- 3 Чему равно общее напряжения на двух последовательно соединенных элементах  $L$  и  $R$ , если напряжения на каждом из них равно 2 В?
- 4 Чему равен угол между векторами напряжений, если  $U_L = U_R = 10$  В, а элементы  $R$  и  $L$  включены последовательно?
- 5 Чему равен угол между общим напряжением и напряжением на резисторе, если  $U_L = U_R = 1$  В, а элементы  $R$  и  $L$  включены последовательно?
- 6 Чему равно полное сопротивление последовательно соединенных элементов  $R$  и  $C$ , если  $R = 3$  Ом,  $X_C = 4$  Ом?
- 7 Что понимают под частотной характеристикой?
- 8 Что понимают под фазо-частотной характеристикой?
- 9 Как зависит сопротивление индуктивности от частоты?
- 10 Как зависит сопротивление емкости от частоты?
- 11 Как меняется ток в двухполюснике, состоящем из последовательно соединенных индуктивности и резистора?
- 12 Как меняется ток в двухполюснике, состоящем из последовательно соединенных емкости и резистора?
- 13 Как зависит от частоты проводимость индуктивности?
- 14 Как зависит от частоты проводимость емкости?
- 15 В каком виде необходимо представить два комплексных сопротивления, чтобы вычесть их?
- 16 В каком виде необходимо представить напряжение и ток, чтобы определить сопротивление или проводимость цепи  $RLC$ ?
- 17 Чему равен ток в двух параллельно соединенных элементах  $R$  и  $C$ , если  $I_R = I_C = 1$  А?
- 18 Чему равен угол между векторами токов, если  $I_R = I_C = 1$  А, а элементы  $R$  и  $C$  включены параллельно?
- 19 Чему равен угол между общим током и током в резисторе, если  $I_R = I_C = 1$  А, а элементы  $R$  и  $C$  соединены параллельно?
- 20 Чему равен общий ток при параллельном соединении элементов, если  $I_R = I_C = 1$  А?
- 21 Чему равно напряжение в последовательном контуре, если  $U_R = U_C = 2$  В?
- 22 Чему равен общий ток при параллельном соединении элементов  $R$  и  $L$ , если  $I_R = 3$  А,  $I_L = 4$  А?
- 23 Чему равно общее напряжение при последовательном соединении элементов  $R$  и  $C$ , если  $U_R = 2$  В,  $U_C = 1$  В?
- 24 Чему равна частота  $\omega$ , если  $X_L = R = 100$  Ом, а  $L = 0,1$  Гн?

- 25 Чему равна частота  $\omega$ , если  $X_C = R = 100 \text{ Ом}$ , а  $C = 10 \text{ мкФ}$ ?
- 26 Чему равен ток, протекающий через последовательное соединение элементов  $R$  и  $L$ , если к ним приложено постоянное напряжение  $U = 10 \text{ В}$ , а  $R = 10 \text{ Ом}$ ,  $L = 10 \text{ мГн}$ ?
- 27 Чему равен ток, протекающий через последовательное соединение элементов  $R$  и  $C$ , если к ним приложено постоянное напряжение  $U = 10 \text{ В}$ , а  $R = 10 \text{ Ом}$ ,  $C = 10 \text{ мкФ}$ ?
- 28 Чему равен сдвиг фаз между напряжением на индуктивности и током, протекающим через последовательное соединение  $R$  и  $L$  на частоте  $\omega = 0$ ?
- 29 Чему равен сдвиг фаз между напряжением на индуктивности и током, протекающим через последовательное соединение  $R$  и  $L$ , если  $R = X_L = 10 \text{ Ом}$ ?
- 30 Чему равен сдвиг фаз между напряжением на емкости и током, протекающим через последовательное соединение  $R$  и  $C$ , если  $R = X_C = 10 \text{ Ом}$ ?
- 31 Чему равен модуль комплексного сопротивления последовательной  $RL$  цепи, если  $R = X_L = 10 \text{ Ом}$ ?
- 32 Чему равен модуль комплексного сопротивления последовательной  $RLC$  цепи, если  $R = 1 \text{ Ом}$ ,  $X_L = 2 \text{ Ом}$ ,  $X_C = 1 \text{ Ом}$ ?
- 33 Чему равно общее напряжение на зажимах двухполюсника, состоящего из последовательно соединенных элементов  $L$  и  $C$ , если  $U_L = U_C = 5 \text{ В}$ ?

## Приложение Б

### Примеры решения задач модуля 1

#### Задача 1 Уравнения Кирхгофа

В узле электрической цепи сходятся ветви, направление токов в которых и их значения приведены на схеме (рис. 1.1).

Необходимо определить неизвестный ток  $I_5$ .

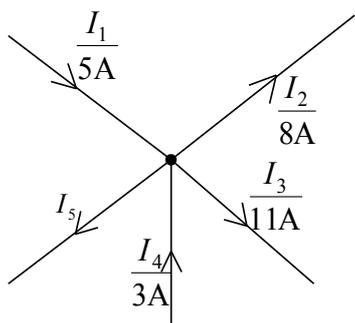


Рисунок 1.1

#### Решение

Запишем уравнение по первому закону Кирхгофа для данного узла:

$$I_1 - I_2 - I_3 + I_4 - I_5 = 0,$$

откуда

$$\begin{aligned} I_5 &= I_1 - I_2 - I_3 + I_4 = \\ &= 5 - 8 - 11 + 3 = -11 \text{ A.} \end{aligned}$$

Проверка:

$$\begin{aligned} 5 - 8 - 11 + 3 - (-11) &= 0, \\ 0 &\equiv 0. \end{aligned}$$

#### Задача 2 Уравнения Кирхгофа

Дана электрическая цепь рис. 2.1:  $R_1 = 10 \text{ Ом}$ ,  $R_2 = 20 \text{ Ом}$ ,  $E = 15 \text{ В}$ ,  $J = 1 \text{ А}$ .  
Определить  $u_j$ .

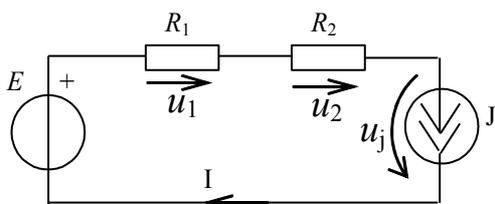


Рисунок 2.1

#### Решение

Направление тока  $I$  в данной схеме совпадает с направлением тока источника тока  $J$ . Тогда напряжения  $U_1$  и  $U_2$  направлены как показано на рисунке и равны соответственно:

$$U_1 = I \cdot R_1 = 1 \cdot 10 = 10 \text{ В};$$

$$U_2 = I \cdot R_2 = 1 \cdot 20 = 20 \text{ В}.$$

Запишем уравнение по второму закону Кирхгофа для данного контура:

$$U_1 + U_2 + U_j - E = 0;$$

$$U_j = E - U_1 - U_2 = 10 - 10 - 20 = -10 \text{ В}.$$

Знак „минус” означает, что направление напряжения источника тока обратно указанному на схеме.

#### Задача 3 Уравнения Кирхгофа

Определить токи в ветвях методом уравнений Кирхгофа для цепи рис. 3.1.  
 Дано:  $R_1 = 10 \text{ Ом}$ ,  $R_2 = 20 \text{ Ом}$ ,  $R_3 = 30 \text{ Ом}$ ,  $E_1 = 20 \text{ В}$ ,  $E_2 = 10 \text{ В}$ .

Для данной схемы можно записать одно независимое уравнение по первому закону Кирхгофа и два – по второму закону. Для этого выберем произвольно направления токов  $I_1$ ,  $I_2$ ,  $I_3$  как показано на рис. 3.1 и направления обходов контуров, как показано на этом рисунке штриховыми стрелками.

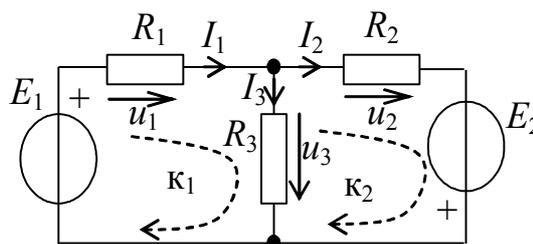


Рисунок 3.1

В результате, на основании первого и второго законов Кирхгофа, получим систему уравнений вида

$$\begin{aligned} \text{Узел: } & I_1 - I_2 - I_3 = 0; \\ \text{K}_1: & U_1 + U_3 - E_1 = 0; \\ \text{K}_2: & U_2 - E_2 - U_3 = 0. \end{aligned}$$

Выразим напряжения  $U_1$ ,  $U_2$ ,  $U_3$  через токи и сопротивления:

$$\begin{cases} I_1 - I_2 - I_3 = 0; \\ I_1 \cdot R_1 + 0 + I_3 \cdot R_3 = E_1; \\ 0 + I_2 \cdot R_2 - I_3 \cdot R_3 = E_2. \end{cases}$$

Теперь токи  $I_1$ ,  $I_2$ ,  $I_3$  можно определить с помощью определителей:

$$I_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}; \quad I_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}; \quad I_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta},$$

где

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ R_1 & 0 & R_3 \\ 0 & R_2 & -R_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 10 & 0 & 30 \\ 0 & 20 & -30 \end{vmatrix} = -600 - [10 \cdot (30 + 20)] = -1100;$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 \\ E_1 & 0 & R_3 \\ E_2 & R_2 & -R_3 \end{vmatrix} = -E_1[R_3 - R_2] + E_2[-R_3] = -20(50) + 10(-30) = -1000 - 300 = -1300;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ R_1 & E_1 & R_3 \\ 0 & E_2 & -R_3 \end{vmatrix} = -E_1[-R_3] - E_2[R_3 + R_1] = 20(-30) - 10(40) = -600 - 400 = -1000;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ R_1 & 0 & E_1 \\ 0 & R_2 & E_2 \end{vmatrix} = -E_1 \cdot R_2 + E_2 \cdot R_1 = -20 \cdot 20 + 10 \cdot 10 = -400 + 100 = -300;$$

$$I_1 = \frac{1300}{1100} = 1,182 \text{ A}, \quad I_2 = \frac{1000}{1100} = 0,91 \text{ A}, \quad I_3 = \frac{300}{1100} = 0,273 \text{ A}.$$

Проверку найденных токов можно произвести с помощью баланса мощностей:

$$\sum P_k = 0,$$

или  $P_{\text{ист}} = P_{\text{потр}}$ .

$$- I_1 \cdot E_1 - I_2 \cdot E_2 + I_1^2 \cdot R_1 + I_2^2 \cdot R_2 + I_3^2 \cdot R_3 = 0.$$

После подстановки значений убеждаемся в правильности полученных значений токов. Эту операцию советуем сделать самостоятельно.

#### Задача 4 Анализ цепи с одним источником энергии

Определить токи ветвей и напряжения на элементах цепи, схема которой изображена на рис. 4.1. Параметры элементов следующие:  $E = 6 \text{ В}$ ,  $R_1 = 5 \text{ Ом}$ ,  $R_2 = 30 \text{ Ом}$ ,  $R_3 = 10 \text{ Ом}$ ,  $R_4 = 20 \text{ Ом}$ .

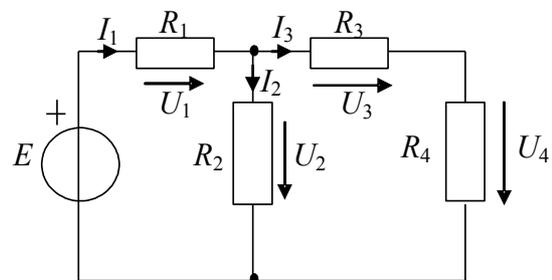


Рисунок 4.1

#### Решение

1 Обозначим направления токов и напряжений, как показано на схеме рис. 4.1.

2 Так как цепь содержит последовательно-параллельные соединения элементов, то воспользуемся методом эквивалентных преобразований. Сопротивления  $R_3$  и  $R_4$  на

схеме рис. 4.1 соединены последовательно; их можно заменить одним эквивалентным сопротивлением  $R_{34}$ , величина которого

$$R_{34} = R_3 + R_4 = 10 + 20 = 30 \text{ Ом}.$$

После преобразования схема приобретает вид рис. 4.2.

В данной схеме сопротивления  $R_2$  и  $R_{34}$  соединены параллельно. Заменим их одним эквивалентным сопротивлением  $R_{234}$ :

$$R_{234} = \frac{R_2 \cdot R_{34}}{R_2 + R_{34}} = \frac{30 \cdot 30}{30 + 30} = 15 \text{ Ом}$$

При этом  $U_2 = U_{34} = U_3 + U_4$ . Токи в ветвях определим по формуле „чужого”

$$\text{сопротивления: } I_2 = I_1 \frac{R_{34}}{R_2 + R_{34}}; \quad I_3 = I_1 \frac{R_2}{R_2 + R_{34}}.$$

Преобразованная схема приобретает вид рис. 4.3.

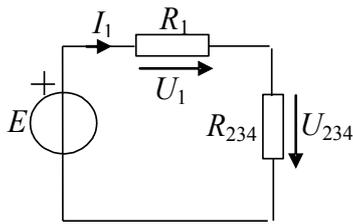


Рисунок 4.3

Схема рис. 4.3 содержит последовательное соединение источника напряжения и двух сопротивлений. Ток в цепи и напряжения на элементах определим по закону Ома:

$$I_1 = \frac{E}{R_1 + R_{234}} = \frac{6}{5 + 15} = 0,3 \text{ A};$$

$$U_1 = I_1 \cdot R_1 = 0,3 \cdot 5 = 1,5 \text{ В};$$

$$U_2 = I_1 \cdot R_{234} = 0,3 \cdot 15 = 4,5 \text{ В}.$$

Определим токи  $I_2$  и  $I_3$  (см. выше)

$$I_2 = 0,3 \frac{30}{30 + 30} = 0,15 \text{ A};$$

$$I_3 = 0,3 \frac{30}{30 + 30} = 0,15 \text{ A}.$$

По закону Ома определим напряжения

$$U_3 = I_3 \cdot R_3 = 0,15 \cdot 10 = 1,5 \text{ В};$$

$$U_4 = I_3 \cdot R_4 = 0,15 \cdot 20 = 3 \text{ В}.$$

3 Проверку расчетов можно выполнить, составив уравнение баланса мощностей для исходной цепи:

$$- E \cdot I_1 + I_1 \cdot U_1 + I_2 \cdot U_2 + I_3 \cdot U_3 + I_4 \cdot U_4 = 0.$$

Подставим значения и произведем расчеты:

$$- 6 \cdot 0,3 + 0,3 \cdot 1,5 + 0,15 \cdot 4,5 + 0,15 \cdot 1,5 + 0,15 \cdot 3 = 0;$$

$$- 1,8 + 0,45 + 0,675 + 0,225 + 0,45 = 0;$$

$$- 1,8 + 1,8 = 0; 0 \equiv 0.$$

Проверка подтвердила правильность расчетов.

### Задача 5 Метод наложения

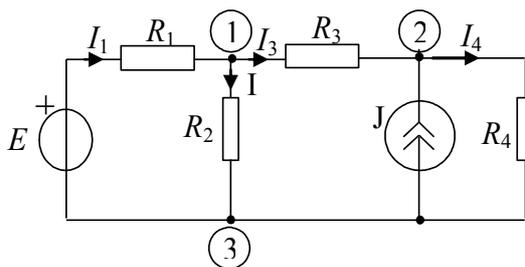


Рисунок 5.1

Методом наложения определить токи ветвей цепи, схема которой изображена на рис. 5.1. Параметры элементов следующие:  $E = 6 \text{ В}$ ;  $I = 0,6 \text{ A}$ ;  $R_1 = R_2 = 20 \text{ Ом}$ ;  $R_3 = R_4 = 10 \text{ Ом}$ .

**Решение**

1 Зададимся условно положительными направлениями токов, как показано на рис. 5.1.

2 Положим задающий ток источника тока равным нулю ( $J = 0$ ). При этом источник тока заменим холостым ходом. Получим первую частную схему с одним источником энергии (рис. 5.2).

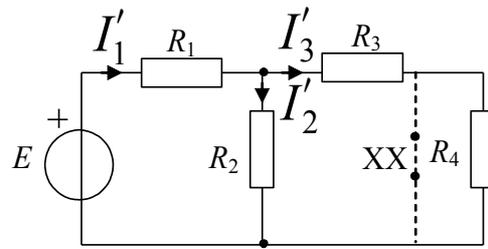


Рисунок 5.2

Для определения частных токов  $I'_1 - I'_3$  воспользуемся результатами предыдущей задачи:

$$R_{34} = R_3 + R_4 = 10 + 10 = 20 \text{ Ом};$$

$$R_{234} = \frac{R_2 \cdot R_{34}}{R_2 + R_{34}} = \frac{20 \cdot 20}{20 + 20} = 10 \text{ Ом};$$

$$I'_1 = \frac{E}{R_1 + R_{234}} = \frac{6}{20 + 10} = 0,2 \text{ А};$$

$$I'_2 = I'_1 \frac{R_{34}}{R_2 + R_{34}} = 0,2 \frac{20}{20 + 20} = 0,1 \text{ А};$$

$$I'_3 = I'_1 \frac{R_2}{R_2 + R_{34}} = 0,2 \frac{20}{20 + 20} = 0,1 \text{ А}.$$

3 Положим задающее напряжение источника напряжения равным нулю ( $E = 0$ ). При этом источник напряжения заменим коротким замыканием. Получим вторую частную схему с одним источником энергии (рис. 5.3).

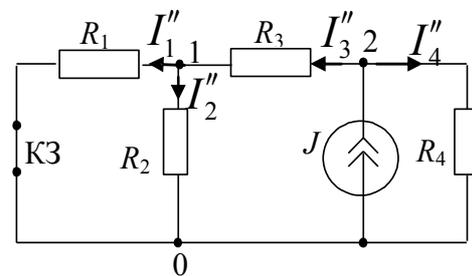


Рисунок 5.3

Преобразуем схему рис. 5.3. Заменяем параллельно-последовательное соединение сопротивлений  $R_1, R_2, R_3$  эквивалентным сопротивлением  $R_{123}$ :

$$R_{123} = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} + R_3 =$$

$$= \frac{20 \cdot 20}{20 + 20} + 10 = 20 \text{ Ом}.$$

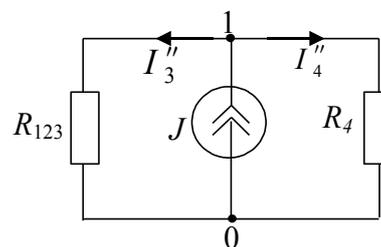


Рисунок 5.4

Используя формулу „чужого” сопротивления, определим токи:

$$I_3'' = I \frac{R_4}{R_{13} + R_4} = 0,6 \frac{10}{20 + 10} = 0,2 \text{ A};$$

$$I_4'' = I \frac{R_{13}}{R_{13} + R_4} = 0,6 \frac{20}{20 + 10} = 0,4 \text{ A};$$

$$I_1'' = I_3'' \frac{R_2}{R_1 + R_2} = 0,2 \frac{20}{20 + 20} = 0,1 \text{ A};$$

$$I_2'' = I_3'' \frac{R_1}{R_1 + R_2} = 0,2 \frac{20}{20 + 20} = 0,1 \text{ A}.$$

4 Выполним процедуру наложения. За основные направления токов примем направления на исходной схеме (см. рис. 5.1). Частные токи, совпадающие по направлению с токами исходной схемы, записываем со знаком „+”, не совпадающие – со знаком „-”. Результирующие токи определяются следующим образом:

$$I_1 = I_1' - I_1'' = 0,2 - 0,1 = 0,1 \text{ A};$$

$$I_2 = I_2' + I_2'' = 0,1 + 0,1 = 0,2 \text{ A};$$

$$I_3 = I_3' - I_3'' = 0,1 - 0,2 = -0,1 \text{ A};$$

$$I_4 = I_4' + I_4'' = 0,1 + 0,4 = 0,5 \text{ A}.$$

Знак „-” в результате говорит о том, что направление тока в цепи противоположно направлению, указанному на схеме.

5 Выполним проверку расчетов, составив уравнение по ЗТК для узла 3:

$$- I_1 + I_2 - J + I_4 = 0.$$

Подставим значения токов:

$$- 0,1 + 0,2 - 0,6 + 0,5 = 0.$$

Проверка подтверждает правильность расчетов.

## Задача 6 Метод узловых напряжений

Определить токи в цепи рис. 6.1 методом узловых напряжений при исходных данных таких, как в задаче 5.

### Решение

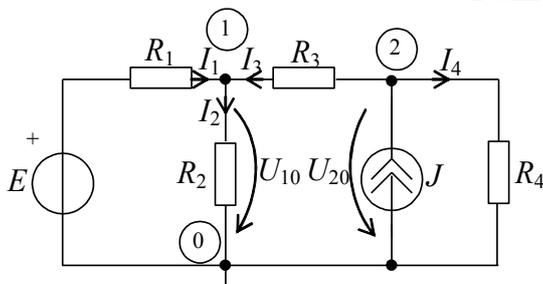


Рисунок 6.1

- 1 Зададимся условно-положительными направлениями искоемых токов, как показано на рисунке рис. 6.1.
- 2 Схема содержит три неустранимых узла: 1, 2, 0.

В качестве базисного выберем узел 0. Для оставшихся узлов составим уравнения по методу узловых напряжений относительно напряжений  $U_{10}$  и  $U_{20}$ :

$$\begin{cases} \textcircled{1} G_{11}U_{10} + G_{12}U_{20} = I_{11}; \\ \textcircled{2} G_{21}U_{10} + G_{22}U_{20} = I_{22}, \end{cases}$$

где  $U_{10}, U_{20}$  – искомые узловые напряжения;

$G_{11}, G_{22}$  – собственные проводимости узлов 1 и 2;

$G_{12} = G_{21}$  – взаимные проводимости между узлами 1 и 2;

$I_{11}, I_{22}$  – узловые токи узлов 1 и 2 соответственно;

$$G_{11} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} = \frac{1}{20} + \frac{1}{20} + \frac{1}{10} = 0,2 \text{ См};$$

$$G_{22} = \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} = \frac{1}{10} + \frac{1}{10} = 0,2 \text{ См};$$

$$G_{12} = G_{21} = -\frac{1}{R_3} = -\frac{1}{10} = -0,1 \text{ См};$$

$$I_{11} = \frac{E}{R_1} = \frac{6}{20} = 0,3 \text{ А};$$

$$I_{22} = J = 0,6 \text{ А}.$$

Подставим полученные значения в систему уравнений и решим ее относительно напряжений  $U_{10}$  и  $U_{20}$ :

$$\begin{cases} 0,2U_{10} - 0,1U_{20} = 0,3; \\ -0,1U_{10} + 0,2U_{20} = 0,6. \end{cases}$$

Решим систему методом определителей:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0,2 & -0,1 \\ -0,1 & 0,2 \end{vmatrix} = 0,2 \cdot 0,2 - (-0,1)(-0,1) = 0,04 - 0,01 = 0,03;$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0,3 & -0,1 \\ 0,6 & 0,2 \end{vmatrix} = 0,3 \cdot 0,2 - (-0,1)0,6 = 0,06 + 0,06 = 0,12;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 0,2 & 0,3 \\ -0,1 & 0,6 \end{vmatrix} = 0,2 \cdot 0,6 - 0,3(-0,1) = 0,12 + 0,03 = 0,15;$$

$$U_{10} = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{0,12}{0,03} = 4 \text{ В};$$

$$U_{20} = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{0,15}{0,03} = 5 \text{ В}.$$

Зная узловые напряжения, определим токи ветвей:

$$I_1 = \frac{E - U_{10}}{R_1} = \frac{6 - 4}{20} = 0,1 \text{ А};$$

$$I_2 = \frac{U_{10}}{R_2} = \frac{4}{20} = 0,2 \text{ А};$$

$$I_3 = \frac{U_{21}}{R_3} = \frac{U_{20} - U_{10}}{R_3} = \frac{5 - 4}{10} = 0,1 \text{ А};$$

$$I_4 = \frac{U_{20}}{R_4} = \frac{5}{10} = 0,5 \text{ А.}$$

3 Проверку расчетов можно выполнить путем составления уравнения баланса мощностей:

$$\begin{aligned} & - E \cdot I_1 + I_1^2 R_1 + I_2^2 R_2 + I_3^2 R_3 - U_{20} \cdot J + I_4^2 \cdot R_4 = 0; \\ & - 6 \cdot 0,1 + 0,1^2 \cdot 20 + 0,2^2 \cdot 20 + 0,1^2 \cdot 10 - 5 \cdot 0,6 + 0,5^2 \cdot 10 = 0; \\ & - 0,6 + 0,2 + 0,8 + 0,1 - 3 + 2,5 = 0; \\ & - 3,6 + 3,6 = 0; \\ & 0 \equiv 0. \end{aligned}$$

Проверка подтверждает правильность расчетов.

### Задача 7 Метод эквивалентного источника

Определить ток  $I_3$  в цепи рис. 7.1, а методом эквивалентного источника напряжения, если  $E_1 = 20 \text{ В}$ ,  $E_2 = 10 \text{ В}$ ,  $R_1 = 10 \text{ Ом}$ ,  $R_2 = 20 \text{ Ом}$ ,  $R_3 = 30 \text{ Ом}$ .

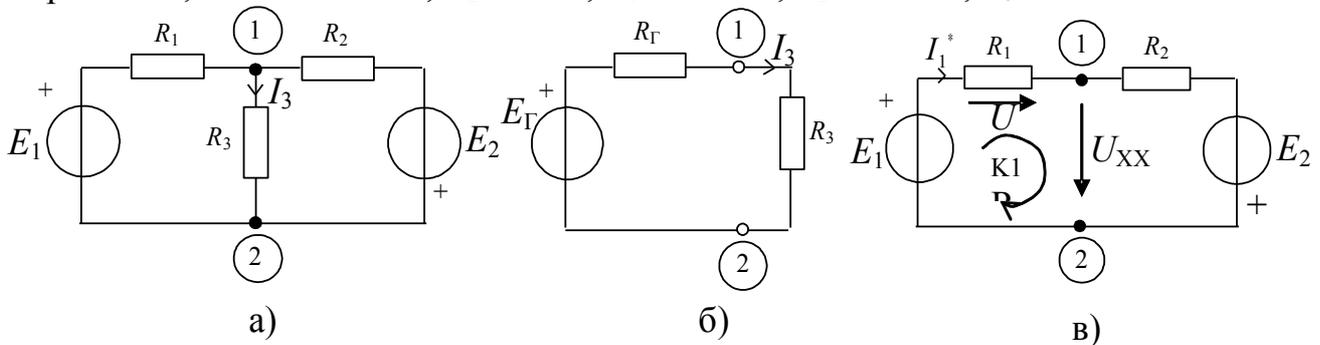


Рисунок 7.1

#### Решение

Ветвь с сопротивлением  $R_3$  будем считать нагрузкой, а остальную схему – автономным двухполюсником с  $E_\Gamma$  и  $R_\Gamma$ . В результате получим схему, показанную на рис. 7.1, б, для которой  $I_3 = \frac{E_\Gamma}{R_\Gamma + R_3}$  (\*).

Определим  $E_\Gamma$  и  $R_\Gamma$ . Для определения  $E_\Gamma$  отключим в схеме рис. 7.1, а  $R_3$  и определим напряжение между узлами 1 и 2  $U_{XX}$  рис. 7.1, в.

Для этого определим ток  $I_1^*$ :

$$I_1^* = \frac{E_1 + E_2}{R_1 + R_2} = \frac{30}{30} = 1 \text{ А.}$$

Теперь  $U_1 = I_1^* \cdot R_1 = 1 \cdot 10 = 10 \text{ В}$ , и в соответствии со вторым законом Кирхгофа для контура  $I$ :

$$\begin{aligned} U_1 + U_{XX} - E_1 &= 0; \\ U_{XX} &= E_1 - U_1 = 20 - 10 = 10 \text{ В}; \\ U_{XX} &= E_\Gamma = 10 \text{ В.} \end{aligned}$$

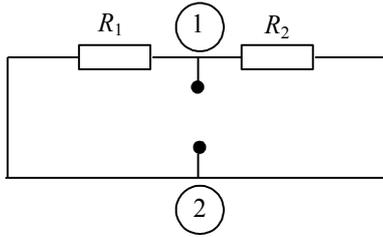


Рисунок 7.2

$$R_{\text{ВХ12}} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = \frac{10 \cdot 20}{10 + 20} = 6,666 \text{ Ом.}$$

Подставив найденные  $U_{\text{ХХ}} = 10 \text{ В}$  и  $R_{\Gamma} = R_{\text{ВХ12}} = 6,666$  в выражение (\*), получим

$$I_3 = \frac{10}{6,666 + 30} = 0,272 \text{ А.}$$

Найденный таким образом ток совпадает с током  $I_3$  в аналогичной задаче 3.

### Задача 8 Дуальные преобразования

На рис. 8.1 приведена исходная цепь. Построить схему, дуальную данной.

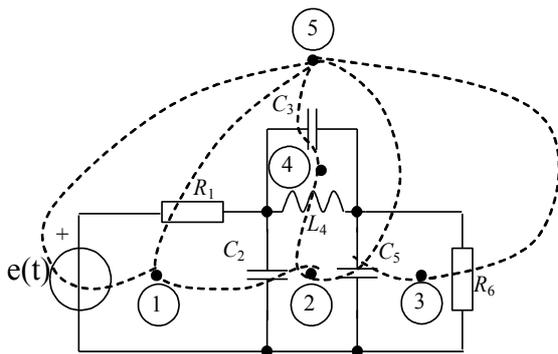


Рисунок 8.1

#### Решение

Для получения дуальной цепи необходимо выполнить замену терминов и элементов в соответствии с таблицей 8.1:

Таблица 8.1 – Дуальные величины

Узел	Контур	$u$	$i$	$R$	$L$	$C$
Контур	Узел	$i$	$u$	$G$	$C$	$L$

Построение дуальной цепи разобьем на следующие этапы:

- в контурах - ячейках выберем узлы и пронумеруем их;
- соединим узлы линиями, проходящими через каждый элемент исходной цепи (см. рис. 8.1), в результате чего получим граф дуальной цепи (штриховые линии);

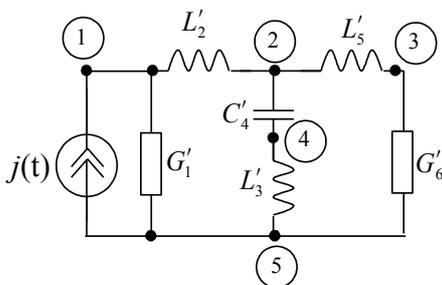


Рисунок 8.2

- заменим ветви графа дуальной цепи на дуальные элементы относительно элементов исходной цепи.

Получим искомую схему рис. 8.2.

## Задача 9 Метод комплексных амплитуд

Схема двухполюсника приведена на рис. 9.1. Записать сопротивление двухполюсника в комплексной форме  $Z(j\omega)$  и проводимость  $Y(j\omega)$ .

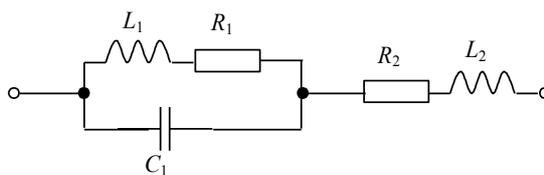


Рисунок 9.1

### Решение

Символическая схема замещения двухполюсника приведена на рис. 9.2. Сопротивления всех двухполюсников на этой схеме имеют размерность [Ом].

На этом рисунке  $Z_{L1}$  и  $R_1$ , а также  $Z_{L2}$  и  $R_2$  соединены последовательно. Поэтому

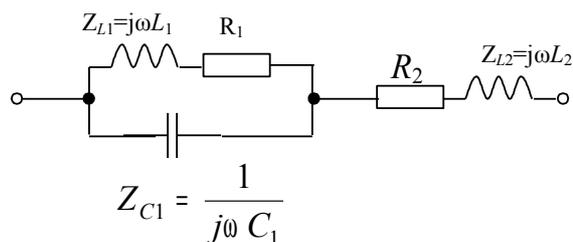


Рисунок 9.2

$$Z_{\mathcal{E}1} = Z_{L1} + R_1 = j\omega L_1 + R_1,$$

$$Z_{\mathcal{E}2} = Z_{L2} + R_2 = j\omega L_2 + R_2.$$

В цепи рис. 9.3  $Z_{\mathcal{E}1}$  и  $Z_{C1}$  соединены параллельно, а оба эти элемента соединены последовательно с  $Z_{\mathcal{E}2}$ . Тогда сопротивление двухполюсника можно записать так:

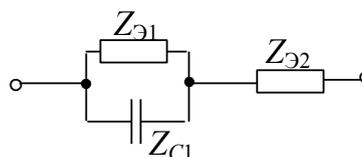


Рисунок 9.3

$$\begin{aligned} Z(j\omega) &= \frac{Z_{\mathcal{E}1} \cdot Z_{C1}}{Z_{\mathcal{E}1} + Z_{C1}} + Z_{\mathcal{E}2} = \frac{(j\omega L_1 + R_1) \cdot \frac{1}{j\omega C_1}}{j\omega L_1 + R_1 + \frac{1}{j\omega C_1}} + j\omega L_2 + R_2 = \\ &= \frac{j\omega L_1 + R_1 + (j\omega L_2 + R_2)[(j\omega L_1 + R_1)j\omega C_1 + 1]}{(j\omega L_1 + R_1)j\omega C_1 + 1}. \end{aligned}$$

Проводимость

$$Y(j\omega) = \frac{1}{Z(j\omega)} = \frac{(j\omega L_1 + R_1)j\omega C_1 + 1}{j\omega L_1 + R_1 + (j\omega L_2 + R_2)[(j\omega L_1 + R_1)j\omega C_1 + 1]}$$

Дальнейшие действия с полученным выражением для приведения их к виду  $\dot{A} = \frac{a + jb}{c + jd}$  рекомендуем проделать самостоятельно.

## Задача 10 Метод комплексных амплитуд

На рис. 10.1 изображена схема двухполюсника, величины элементов которой равны:  $R = 50 \text{ Ом}$ ,  $C = 20 \text{ мкФ}$ ,  $L = 0,1 \text{ Гн}$ . Определить сопротивление двухполюсника постоянному току ( $\omega = 0$ ) при  $\omega \rightarrow \infty$  и на частоте  $\omega = 10^3 \text{ рад/с}$ .

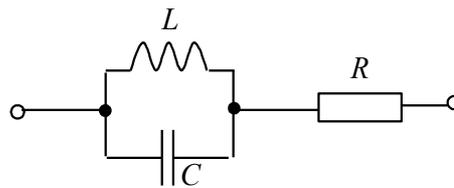


Рисунок 10.1

### Решение

Символическая схема замещения имеет вид рис. 10.2:

Тогда соответственно:

$$Z(j\omega) = \frac{Z_C \cdot Z_L}{Z_C + Z_L} + R =$$

$$= \frac{\frac{1}{j\omega C} \cdot j\omega L}{\frac{1}{j\omega C} + j\omega L} + R = \frac{j\omega L}{1 - \omega^2 LC} + R.$$

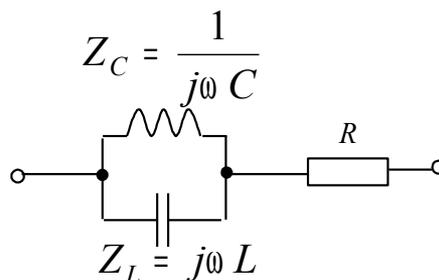


Рисунок 10.2

Отсюда

$$Z(0) = R = 50 \text{ Ом}; \quad Z(\infty) = R = 50 \text{ Ом}.$$

$$Z(1000) = \frac{j \cdot 1000 \cdot 0,1}{1 - 10^6 \cdot 0,1 \cdot 20 \cdot 10^{-6}} - 50 = \frac{j \cdot 100}{1 - 2} + 50 = -j \cdot 100 + 50,$$

$$|Z| = \sqrt{50^2 + 100^2} = 111,8 \text{ Ом} \quad \theta_Z = \arctg \frac{-100}{50} = -63,43^\circ,$$

$$Z(j\omega) = 111,8 e^{-j63,43^\circ}.$$

## Задача 11 Метод комплексных амплитуд

К зажимам двухполюсника рис. 11.1 приложено напряжение

$$u_1(t) = 80 \cdot \sin(1000t + 40^\circ), \text{ В}$$

и по нему протекает ток

$$i_1(t) = 10 \cdot \sin(1000t + 85^\circ), \text{ мА}.$$

Определить возможную схему замещения двухполюсника.

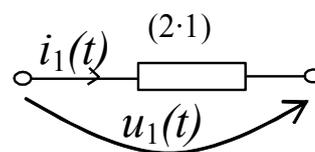


Рисунок 11.1

### Решение

Символическая схема замещения этого двухполюсника приведена на рис. 11.2, где

$$\dot{U}_{m1} = 80 \cdot e^{j40^\circ}, \quad \dot{I}_{m1} = 0,01 \cdot e^{j85^\circ}.$$

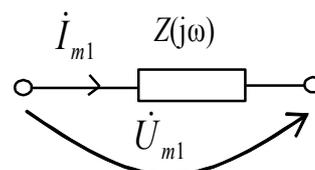


Рисунок 11.2

Комплексное сопротивление этого двухполюсника

$$Z(j\omega) = \frac{\dot{U}_{m1}}{\dot{I}_{m1}} = \frac{80e^{j40^\circ}}{0,01e^{+j85^\circ}} = 8000e^{-j45^\circ} = 8000 \cdot \cos(-45^\circ) - j \cdot 8000 \cdot \sin(+45^\circ) =$$

$$= 5656 - j5656.$$

$$Z = R - jX. \text{ Следовательно } R = 5656 \text{ Ом}; X = 5656 \text{ Ом}; X = \frac{1}{\omega C};$$

$$C = \frac{1}{\omega X} = 0,17568 \cdot 10^{-6} \text{ Ф} = 0,1768 \text{ мкФ}.$$

Возможная схема замещения двухполюсника на частоте  $\omega = 1000 \text{ с}^{-1}$  приведена на рис. 11.3.

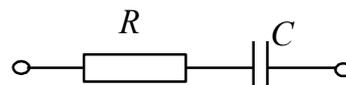


Рисунок 11.3

### Задача 12 Метод комплексных амплитуд

Рассчитать токи и напряжения в цепи, схема которой изображена на рис. 12.1, если  $e(t) = 6 \cdot \cos(10^6 \cdot t + \frac{\pi}{4})$ ;  $R_1 = 1000 \text{ Ом}$ ,  $R_2 = 2000 \text{ Ом}$ ,  $L_2 = 2 \text{ мГн}$ . Ответ представить в виде функций времени. Построить векторную диаграмму токов и напряжений.

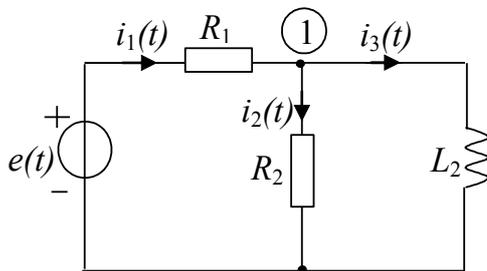


Рисунок 12.1

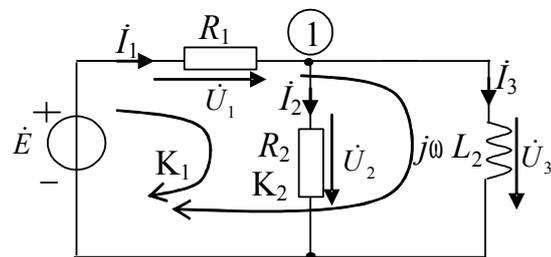


Рисунок 12.2

### Решение

Символическая схема замещения цепи рис. 12.1 приведена на рис. 12.2. Действующее значение задающего напряжения источника в комплексной форме

ме  $\dot{E} = \frac{6}{\sqrt{2}} \cdot e^{j \cdot 45^\circ} = 3 + 3j$ . Зададимся положительными направлениями токов и напряжений, как показано на рисунке 12.2. Схема содержит один источник, а элементы образуют параллельно-последовательное соединение. Для расчетов применим метод анализа цепи с одним источником. Сопротивление двух-

полюсника относительно зажимов источника  $Z = R_1 + \frac{j\omega L_2 R_2}{j\omega L_2 + R_2}$ . По закону

Ома  $I_1 = \frac{\dot{E}}{Z}$ ,  $\dot{U}_1 = I_1 R_1$ ; по формуле „чужого” сопротивления,

$$I_2 = I_1 \cdot \frac{j\omega L_2}{j\omega L_2 + R_2}; I_3 = I_1 \cdot \frac{R_2}{R_2 + j\omega L_2}.$$

По закону Ома,  $\dot{U}_2 = I_2 R_2$ ;  $\dot{U}_3 = I_3 j \cdot \omega L_2$ .

Подставим значения и выполним расчеты:  $\omega \cdot L_2 = 10^6 \cdot 2 \cdot 10^{-3} = 2000 \text{ Ом}$ ;

$$Z = 1000 + \frac{j \cdot 2000 \cdot 2000}{j \cdot 2000 + 2000} = 1000 + \frac{j \cdot 2000}{1 + j} =$$

$$= 1000 + \frac{2000}{\sqrt{2}} \cdot e^{j \cdot 45^\circ} = 2000 + j \cdot 1000 = 1000 \cdot \sqrt{5} \cdot e^{j \cdot 26,57^\circ}, \text{ Ом}$$

$$\dot{I}_1 = \frac{\frac{6}{\sqrt{2}} \cdot e^{j \cdot 45^\circ}}{1000 \cdot \sqrt{5} \cdot e^{j \cdot 26,57^\circ}} = 1,9 \cdot 10^{-3} \cdot e^{j \cdot 18,43^\circ} = (1,8 + j0,6) \cdot 10^{-3}, \text{ А};$$

$$\dot{U}_1 = 1,9 \cdot 10^{-3} \cdot e^{j \cdot 18,43^\circ} \cdot 1000 = 1,9 \cdot e^{j \cdot 18,43^\circ} = 1,8 + j0,6, \text{ В};$$

$$\dot{I}_2 = 1,9 \cdot 10^{-3} \cdot e^{j \cdot 18,43^\circ} \cdot \frac{j \cdot 2000}{j \cdot 2000 + 2000} = 1,34 \cdot 10^{-3} \cdot e^{j \cdot 63,63^\circ} = (0,6 + j1,2) \cdot 10^{-3}, \text{ А};$$

$$\dot{U}_2 = 1,34 \cdot 10^{-3} \cdot e^{j \cdot 63,63^\circ} \cdot 2000 = 2,68 \cdot e^{j \cdot 63,63^\circ} = 1,2 + j2,4, \text{ В};$$

$$\dot{I}_3 = 1,9 \cdot 10^{-3} \cdot e^{j \cdot 18,43^\circ} \cdot \frac{2000}{j \cdot 2000 + 2000} = 1,34 \cdot 10^{-3} \cdot e^{-j \cdot 26,57^\circ} =$$

$$= (1,2 - j0,6) \cdot 10^{-3}, \text{ А};$$

$$\dot{U}_3 = 1,34 \cdot 10^{-3} \cdot e^{-j \cdot 26,57^\circ} \cdot j \cdot 2000 = 2,68 \cdot e^{j \cdot 63,43^\circ} = 1,2 + j2,4, \text{ В}.$$

Выполним проверку расчетов, составив уравнения по законам Кирхгофа. Для первого узла на основании первого закона Кирхгофа, можно записать:

$$-\dot{I}_1 + \dot{I}_2 + \dot{I}_3 = 0, \text{ или } \dot{I}_2 + \dot{I}_3 = \dot{I}_1.$$

Подставим значения:

$$-1,9 \cdot 10^{-3} \cdot e^{j \cdot 18,43^\circ} + 1,34 \cdot 10^{-3} \cdot e^{j \cdot 63,43^\circ} + 1,34 \cdot 10^{-3} \cdot e^{-j \cdot 26,57^\circ} =$$

$$= [(-1,8 - j \cdot 0,6) + (0,6 + j \cdot 1,2) + (1,2 - j \cdot 0,6)] \cdot 10^{-3} = 0.$$

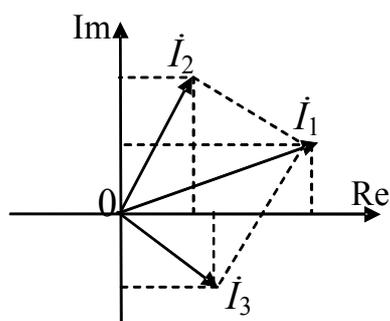


Рисунок 12.3

Векторная диаграмма токов приведена на рис. 12.3.

Для первого контура  $K_1$ , на основании второго закона Кирхгофа, можно записать:

$$-\dot{E} + \dot{U}_1 + \dot{U}_2 = 0, \text{ или } \dot{U}_1 + \dot{U}_2 = \dot{E}.$$

Подставим значения:

$$-\frac{6}{\sqrt{2}} e^{j \cdot 45^\circ} + 1,9 \cdot e^{j \cdot 18,43^\circ} + 2,68 \cdot e^{j \cdot 63,63^\circ} = (-3 - j \cdot 3) + (1,8 + j \cdot 0,6) + (1,2 + j \cdot 2,4) = 0.$$

Проверка подтвердила правильность расчетов.

Перейдем от комплексных значений напряжений и токов к функциям времени:

$$i_1(t) = 1,9 \cdot \sqrt{2} \cdot 10^{-3} \cdot \cos(10^6 \cdot t + 18,43^\circ), \text{ A};$$

$$i_2(t) = 1,34 \cdot \sqrt{2} \cdot 10^{-3} \cdot \cos(10^6 \cdot t + 63,63^\circ), \text{ A};$$

$$i_3(t) = 1,34 \cdot \sqrt{2} \cdot 10^{-3} \cdot \cos(10^6 \cdot t - 25,55^\circ), \text{ A};$$

$$u_1(t) = 1,9 \cdot \sqrt{2} \cdot \cos(10^6 \cdot t + 18,43^\circ), \text{ B};$$

$$u_2(t) = u_3(t) = 2,68 \cdot \sqrt{2} \cdot \cos(10^6 \cdot t + 63,63^\circ), \text{ B}.$$

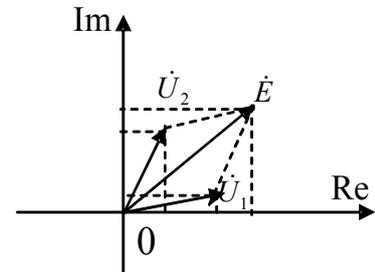


Рисунок 12.4

Векторная диаграмма напряжений приведена на рис.12.4.

Для проверки расчетов составим баланс мощностей.

$$\tilde{S}_{\text{ист}} = \tilde{S}_{\text{н}};$$

$$\tilde{S}_{\text{ист}} = P_{\text{ист}} + jQ_{\text{ист}} = S_{\text{ист}} \cdot e^{j\varphi};$$

$$\tilde{S}_{\text{н}} = P_{\text{н}} + jQ_{\text{н}} = S_{\text{н}} \cdot e^{j\varphi};$$

$$\tilde{S}_{\text{ист}} = \dot{E} \cdot I_1^* = \frac{6}{\sqrt{2}} e^{j45^\circ} \cdot 1,9 \cdot 10^{-3} \cdot e^{-j18,43^\circ} = 7,2 \cdot 10^{-3} + j \cdot 3,6 \cdot 10^{-3};$$

$$S_{\text{ист}} = E \cdot I_1 = \sqrt{P_{\text{ист}}^2 + Q_{\text{ист}}^2} = 8,06 \cdot 10^{-3} \text{ [ВА]};$$

$$P_{\text{н}} = I_1^2 \cdot R_1 + I_2^2 \cdot R_2 = (1,9 \cdot 10^{-3})^2 \cdot 1000 + (1,34 \cdot 10^{-3})^2 \cdot 2000 = 7,2 \cdot 10^{-3} \text{ [Вт]};$$

$$Q_{\text{н}} = I_3^2 \cdot X_L = (1,34 \cdot 10^{-3})^2 \cdot 2000 = 3,6 \cdot 10^{-3} \text{ [Вар]};$$

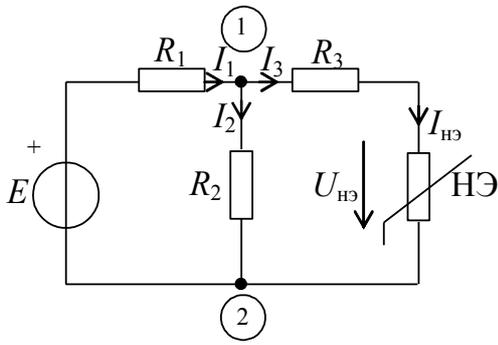
$$S_{\text{н}} = \sqrt{P_{\text{н}}^2 + Q_{\text{н}}^2} = 8,05 \cdot 10^{-3} \text{ [ВА]}.$$

При сравнении полученных результатов видно, что  $P_{\text{и}} = P_{\text{н}} = 7,2 \cdot 10^{-3} \text{ [Вт]}$  и  $Q_{\text{и}} = Q_{\text{н}} = 3,6 \cdot 10^{-3} \text{ [Вар]}$ ,  $S_{\text{ист}} = S_{\text{н}} = 8,05 \cdot 10^{-3} \text{ [ВА]}$ . Следовательно, расчеты выполнены верно.

### Задача 13 Анализ нелинейных цепей

Определить токи ветвей цепи, схема которой изображена на рисунке 13.1. Параметры элементов следующие:  $E = 10 \text{ В}$ ,  $R_1 = R_2 = 10 \text{ Ом}$ ,  $R_3 = 5 \text{ Ом}$ , вольт-амперная характеристика нелинейного элемента аппроксимируется выражением  $i = 0,1u^2, \text{ А}$ .

Рисунок 13.1



**Решение**

1 Воспользуемся методом эквивалентного генератора. Заменяем участок цепи, содержащий источник напряжения и сопротивления  $R_1, R_2, R_3$ , эквивалентным источником напряжения (рис. 13.2).

Параметры  $E_\Gamma$  и  $R_\Gamma$  определим следующим образом. Задающее напряжения идеального источника напряжения  $E_\Gamma$  определяется как напряжение холостого хода  $U_{xx}$  при отключении НЭ (рис. 13.3).

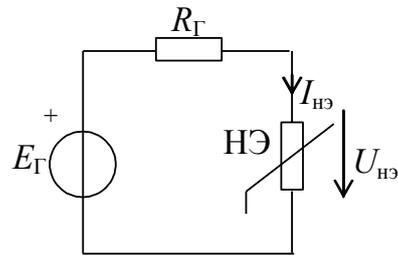


Рисунок 13.2

Сопротивления  $R_1$  и  $R_2$  образуют делитель напряжения, поэтому

$$U_{xx} = U_{R_2} = E \frac{R_2}{R_1 + R_2} = 10 \frac{10}{10 + 10} = 5 \text{ В.}$$

$$E_\Gamma = U_{xx} = 5 \text{ В.}$$

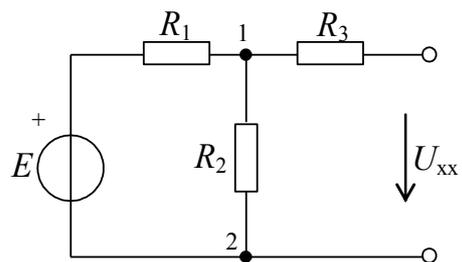


Рисунок 13.3

Сопротивление  $R_\Gamma$  определяется как входное сопротивление цепи относительно зажимов нелинейного элемента при условии, что источник напряжения заменён перемычкой (рис. 13.4):

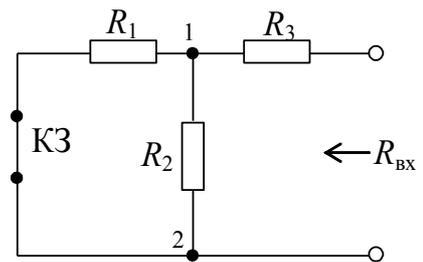


Рисунок 13.4

$$R_{\Gamma} = R_{\text{вх}} = R_3 + \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} = 5 + \frac{10 \cdot 10}{10 + 10} = 10 \text{ Ом.}$$

2 Ток и напряжение на нелинейном элементе ( $I_{\text{нэ}}$  и  $U_{\text{нэ}}$ ) определим графическим методом.

Построим вольт-амперную характеристику нелинейного элемента, предварительно рассчитав ее по аппроксимирующему выражению  $i = 0,1u^2$ , А.

$U, \text{В}$	0	1	2	3	4	5
$I, \text{А}$	0	0,1	0,4	0,9	1,6	2,5

По оси напряжений (рис. 13.5) откладываем напряжение эквивалентного генератора  $E_{\Gamma} = 5 \text{ В}$ , а по оси токов – максимально возможный ток в цепи  $I_{\text{кз}} = \frac{E_{\Gamma}}{R_{\Gamma}} = \frac{5}{10} = 0,5 \text{ А}$ . Со-

единив между собой эти точки, получим нагрузочную прямую, пересечение которой с вольт-амперной характеристикой дает рабочую точку (РТ) нелинейного элемента. Координаты рабочей точки являются значениями тока и напряжения на нелинейном элементе ( $I_{\text{нэ}}$  и  $U_{\text{нэ}}$  соответственно). Таким образом, с помощью графического метода определили  $I_{\text{нэ}} \approx 0,3 \text{ А}$ ,  $U_{\text{нэ}} \approx 1,7 \text{ В}$ .

Рисунок 13.5

3 Возвращаемся к первоначальной схеме рис. 13.1.

Очевидно, что  $I_{\text{нэ}} = I_3 = 0,3 \text{ А}$ .

Используя закон Ома и ЗНК для контура, содержащего элементы  $R_2$ ,  $R_3$ , НЭ, определим ток  $I_2$ :

$$I_3 R_3 + U_{\text{нэ}} - I_2 R_2 = 0,$$

$$I_2 = \frac{I_3 R_3 + U_{\text{нэ}}}{R_2} = \frac{0,3 \cdot 5 + 1,7}{10} = 0,32 \text{ А.}$$

Из ЗТК для узла 1 определим ток  $I_1$ :

$$I_1 - I_2 - I_3 = 0;$$

$$I_1 = I_2 + I_3 = 0,32 + 0,3 = 0,62 \text{ А.}$$

Точность расчётов таким методом в основном зависит от точности выполнения графической части решения.

Для проверки расчётов составим баланс мощностей:

$$\begin{aligned}
& - E \cdot I_1 + I_1^2 \cdot R_1^2 + I_2^2 \cdot R_2^2 + I_3^2 \cdot R_3^2 + I_{\text{HЭ}} \cdot U_{\text{HЭ}} = 0; \\
& - 10 \cdot 0,62 + (0,62)^2 \cdot 10 + (0,32)^2 \cdot 10 + (0,3)^2 \cdot 5 + 0,3 \cdot 1,7 = 0; \\
& - 6,2 + 3,844 + 0,1024 \cdot 10 + 0,09 \cdot 5 + 0,51 = 0; \\
& - 6,2 + 3,844 + 1,024 + 0,45 + 0,51 = 0; \\
& 6,2 = 3,844 + 1,024 + 0,45 + 0,51; \\
& 6,2 \approx 5,83.
\end{aligned}$$

Погрешность составляет  $\frac{6,2 - 5,82}{6,2} \cdot 100 \% = 6 \%$ , что вполне приемлемо при графо-аналитическом методе расчета.



Редактор И.В. Рашупкина  
Компьютерное макетирование Ж.А. Гардыман