

В.М. Єфимець
С.В. Зибін
С.Р. Коженевський

ПРИКЛАДНА ТЕОРІЯ ЦИФРОВИХ АВТОМАТІВ

**Методичні вказівки
до лабораторних робіт**

Київ – 2007

**Міністерство освіти і науки України
Державний університет інформаційно-комунікаційних технологій**

В.М. Єфимець

С.В. Зибін

С.Р. Коженевський

ПРИКЛАДНА ТЕОРІЯ ЦИФРОВИХ АВТОМАТІВ

Методичні вказівки

до лабораторних робіт

спеціальності 7.091501 «Комп'ютерні системи та мережі»,
7.160102 «Захист інформації з обмеженим доступом та
автоматизація її обробки»; 7.160103 «Системи захисту від
несанкціонованого доступу»; 7.160104 «Адміністративний
менеджмент у сфері захисту інформації з обмеженим
доступом»; 7.160105 «Захист інформації в комп'ютерних
системах та мережах».

Київ – 2007

УДК 004.33(076.5)
ББК 3973.3р

Є-60

Затверджено на засіданні вченої ради навчально-наукового інституту захисту інформації (протокол № 2 від 22 лютого 2007 р.)

Рецензент: кандидат технічних наук, доцент, Богуш В.М.

Прикладна теорія цифрових автоматів. Методичні вказівки до лабораторних робіт / Автори: Єфимець В.М., Зибін С.В., Коженевський С.Р. - К.: ДУІКТ, 2007. 28 с.

Методичні вказівки містять вимоги до змісту та визначають порядок виконання лабораторних робіт за дисципліною «Прикладна теорія цифрових автоматів».

Для студентів третього курсу навчання спеціальності 7.091501 «Комп'ютерні системи та мережі» та можуть бути використані студентами Інституту заочного та дистанційного навчання.

ЗМІСТ

1. Лабораторна робота №1. Мінімізація функцій, які перемикаються.....	4
2. Лабораторна робота №2.....	7

ЛАБОРАТОРНА РОБОТА №1

Мінімізація функцій, які перемикаються (ПФ)

Мета роботи: отримання практичних навичок мінімізації функцій, які перемикаються.

Підготовка до роботи

1. Вивчити теоретичну частину роботи.
2. В лабораторному зошиті представити результати виконання домашнього завдання.

Порядок виконання роботи

1. Вивчити методи мінімізації ПФ (метод Квайна-Мак-Класкі, діаграма Вейча (ДВ), карта Карно (КК)).
2. Представити результати виконання домашнього завдання в лабораторному звіті.
3. Завантажити в ЕОМ інтерпретатор булевих рівнянь [1].
4. Ввести в ЕОМ мінімізовані ПФ й набори даних у відповідності з виконаним домашнім завданням.
5. Отримати роздруківки рахунку й порівняти з значеннями ПФ на однойменних наборах.

Зміст звіту

В звіті необхідно представити:

1. Результати виконання домашнього завдання.
2. Роздруківки ПФ і результати їх обчислень.
3. Ціни схем, які реалізують мінімізовані ПФ.
4. Виводи по роботі (доцільність використання різноманітних форм представлення ПФ – диз'юнктивна нормальна форма (ДНФ), кон'юнктивна нормальна форма (КНФ), інверсна ПФ).

Домашнє завдання

1. Виконати мінімізацію ПФ у відповідності з варіантом домашнього завдання (табл. 1.1, 1.2, 1.3, 1.4, 1.5).
2. Підготувати тести мінімізованих ПФ і наборів даних для вводу в ЕОМ.

Таблиця 1.1

Варіанти завдання

Номер варіанта	ПФ	Метод мінімізації	Примітка
1	y_1^3, y_3^3, y_5^3	2	$y_3^3 - (4,5); y_5^3 - (6,7)$
	y_1^4, y_3^4, y_6^4	2,3	$y_6^4 - (6,7)$
	y_1^5, y_3^5, y_4^5	1,3	$y_3^5 - (6,7)$
	y_2^6, y_5^6	1	
2	y_2^3, y_8^3, y_{10}^3	2	$y_2^3 - (4,5); y_{10}^3 - (6,7)$
	y_2^4, y_7^4, y_{10}^4	2,3	$y_{10}^4 - (6,7)$
	y_2^5, y_5^5, y_9^5	1,3	$y_9^5 - (6,7)$
	y_1^6, y_4^6	1	
3	y_4^3, y_6^3, y_8^3	2	$y_4^3 - (4,5); y_8^3 - (6,7)$
	y_4^4, y_5^4, y_8^4	2,3	$y_5^4 - (6,7)$
	y_6^5, y_7^5, y_{10}^5	1,3	$y_{10}^5 - (6,7)$
	y_3^6, y_6^6	1	
4	y_5^3, y_7^3, y_9^3	2	$y_5^3 - (4,5); y_9^3 - (6,7)$
	y_9^4, y_{10}^4, y_1^4	2,3	$y_9^4 - (6,7)$
	y_8^5, y_9^5, y_3^5	1,3	$y_8^5 - (6,7)$
	y_4^6, y_7^6	1	
5	y_2^3, y_6^3, y_{10}^3	1,2	$y_6^3 - (4,5)$
	y_1^4, y_3^4, y_5^4	2,3	$y_1^4 - (6,7)$
	y_3^5, y_7^5, y_{10}^5	1,3	$y_7^5 - (6,7)$
	y_8^6, y_9^6	1	
6	y_3^3, y_4^3, y_8^3	1,2	$y_7^3 - (4,5)$
	y_3^4, y_4^4, y_8^4	2,3	$y_8^4 - (6,7)$
	y_6^5, y_9^5, y_{10}^5	1,3	$y_6^5 - (6,7)$
	y_2^6, y_{10}^6	1	

У таблиці цифрою 1 зазначено метод Квайна-Мак-Класки; 2 – ДВ; 3 – КК; 4,5 визначаються пряма мінімальна ДНФ (МДНФ) і мінімальна КНФ (МКФ) ПФ; 6,7 – пряма і інверсна МДНФ ПФ.

Таблиця 1.2

ПФ $y_i^3(x_1, x_2, x_3)$

y_i^3	Значення наборів					
y_1^3	0	2	5	7		
y_2^3	1	3	4	6		
y_3^3		2		4	6	
y_4^3	2	3	4	6	7	
y_5^3		1	3	5		
y_6^3	0	1		3	5	
y_7^3	0	1			5	7
y_8^3	1	4	5		7	
y_9^3	3	4	5	7		
y_{10}^3	0	1	2	4		
y_{11}^3	4	5	1	3		
y_{12}^3	2	3	6	7	0	
y_{13}^3	0	1	2	3		
y_{14}^3	4	5	6	7		
y_{15}^3	0	4	2	6	1	
y_{16}^3	0	1	2	3	5	7

Таблиця 1.3

ПФ $y_i^4(x_1, x_2, x_3, x_4)$

y_i^4	Значення наборів								
y_1^4	0	1	6	7	8	9	15		
y_2^4	4	5	6	7	10	11	13	15	
y_3^4	0	2	8	9	10	12	13		15
y_4^4	3	4	5	11	12	13	14	15	
y_5^4	0	4	8	10	12	14	15		
y_6^4	1	3	5	7	9	10	11	13	14
y_7^4	2	3	9	11	12	13	14		
y_8^4	0	5	7	8	10	13	15		
y_9^4	0	1	2	4	5	6	12	14	15
y_{10}^4	4	6	10	11	12	14	15		
y_{11}^4	5	7	13	15	0	4	2	6	
y_{12}^4	13	15	9	11	4	5	3	2	

Таблиця 1.4

ПФ $y_i^5(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$

y_i^5	Значення наборів												
y_1^5	0	1	2	3	4	5	10	18	19	26	29	30	31
y_2^5	7	10	11	14	15	21	22	23	26	27	30	31	3
y_3^5	1	3	4	12	13	17	19	20	25	28	29	30	31
y_4^5	0	2	8	9	10	13	16	18	24	25	28	29	30
y_5^5	3	7	12	14	15	16	17	19	23	24	30	31	26
y_6^5	3	4	6	10	11	14	15	18	19	22	23	27	29
y_7^5	0	1	3	5	14	16	17	21	27	30	31	8	12
y_8^5	0	2	7	8	11	16	18	21	23	25	27	29	31
y_9^5	1	4	9	10	11	12	17	25	26	27	28	30	31
y_{10}^5	4	5	7	8	10	13	14	15	20	21	29	30	31
y_{11}^5	1	4	12	9	20	17	13	29	0	8	24	2	6
y_{12}^5	19	27	31	2	6	14	23	10	5	21	0	16	29

Таблиця 1.5

ПФ $y_i^6(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)$

y_i^6	Значення наборів													
y_1^6	0	4	10	11	14	15	16	20	26	30	34	50	53	61
y_2^6	12	23	28	31	37	43	56	57	58	59	60	61	62	63
y_3^6	5	13	21	22	23	29	30	35	41	53	54	55	61	62
y_4^6	1	3	5	6	7	1	20	22	26	33	35	37	39	58
y_5^6	0	4	10	2	36	37	48	49	50	51	56	57	58	59
y_6^6	2	11	17	18	23	27	31	40	44	49	50	54	59	63
y_7^6	4	6	12	14	21	28	36	38	39	44	46	53	54	60
y_8^6	3	7	11	19	23	24	27	41	43	45	56	57	59	61
y_9^6	1	3	7	8	9	13	15	33	35	39	40	41	45	47
y_{10}^6	3	7	8	13	19	21	23	24	27	29	31	45	53	61
y_{11}^6	48	52	50	54	16	20	22	30	8	1	9	3	12	28
y_{12}^6	0	32	10	42	30	62	20	52	12	44	6	38	14	46

Стислі теоретичні відомості

Функція, яка переключється [2] у одному і тому ж базисі може бути представлено різноманітними формулами. Ці формули є математичними моделями, згідно з якими будуються схеми цифрових обчислювальних машин (ЦОМ). Таким чином виникає задача пошуку такого представлення заданої функції у вигляді суперпозиції функцій даної базисної системи, яке є оптимальним в сенсі мінімуму обладнання, яке використовується. Кількість обладнання, яке використовується в схемі, прийнято називати її ціною. Процес знаходження представлення ПФ з мінімальною ціною називають мінімізацією. Найбільш суттєві результати по рішенню задачі мінімізації отримані для нормальних дворівневих форм представлення ПФ-ДНФ (КНФ).

При реалізації ПФ кожному елементарному добутку і кожній елементарній диз'юнкції відповідає деякий простий електричний ланцюг, який називається елементом. Тому ціну будь-якої схеми визначають як сумарне число входів C всіх елементів, які використовуються для її побудови. Це число називають ціною схеми по Квайну. Якщо ПФ реалізують по її нормальній формі, то число входів елементів першого рівня дорівнюється числу букв в функції, яку наведено. Число входів елементів другого рівня дорівнюється числу елементарних кон'юнкцій (диз'юнкцій) в функції, яку наведено.

Метод Квайна-Мак-Класки

Мінімізація ПФ виконується в наступній послідовності:

- знаходять скорочену ДНФ (КНФ) єдину для кожної ПФ;
- будують тупикові ДНФ (КНФ) із скороченої форми;
- вибирають мінімальні ДНФ (КНФ) серед тупикових форм.

Одним із алгоритмів отримання скороченої ДНФ є метод Квайна, який ґрунтується на перетворенні СДНФ за допомогою операції неповного склеювання $XY \vee XY = XY \vee XY \vee X$ і операції поглинання для диз'юнкції.

Виконати всі операції склеювання можна так. Кожна конституента 1 порівнюється з іншими. Якщо конституанта A відрізняється від конституенти B тільки наявністю заперечення в одній із перемінних, то до них застосовується операція склеювання, тобто виписується їх загальна частина. В результаті утворюються кон'юнкції, які містять $(n-1)$ перемінних. Конституенти 1 в подальшому не будуть склеюватися з жодним знову отриманим членом, бо склеюватися можуть тільки кон'юнкції з однаковим числом перемінних. Тому можна відразу провести операції поглинання, а потім виконати всі можливі склеювання членів з числом перемінних $(n-2)$ і т.д. Кон'юнкції в скороченій ДНФ називаються простими імплікатами. Розглянемо на прикладах.

Приклад 1.1. Найдти скорочену ДНФ функції, яка перемикається.

$$\begin{aligned}(X_1, X_2, X_3, X_4) = & \underbrace{\bar{X}_1 \bar{X}_2 X_3 \bar{X}_4}_1 \vee \underbrace{\bar{X}_1 \bar{X}_2 X_3 X_4}_2 \vee \underbrace{\bar{X}_1 X_2 \bar{X}_3 \bar{X}_4}_3 \vee \underbrace{X_1 \bar{X}_2 \bar{X}_3 X_4}_4 \vee \underbrace{X_1 \bar{X}_2 X_3 X_4}_5 \\ & \vee \underbrace{X_1 X_2 \bar{X}_3 X_4}_6 \vee \underbrace{X_1 X_2 X_3 X_4}_7\end{aligned}$$

Проведемо операції неповного склеювання в такому порядку: виконаємо всі можливі склеювання першого члена з рештою, другого члена з рештою, крім першого, потім третього члена з рештою, крім першого і другого і т.д.

Результат запишемо в порядку: $1-2 = \bar{X}_1 \bar{X}_2 X_3$; $2-5 = \bar{X}_2 X_3 X_4$; $4-5 = X_1 \bar{X}_2 X_4$; $4-6 = X_1 \bar{X}_3 X_4$; $5-7 = X_1 X_2 X_3$; $6-7 = X_1 X_2 X_4$.

Оскільки в прикладі, який розглядається, поглинаються всі члени СДНФ, крім третього, отримуємо

$$Y(X_1, X_2, X_3, X_4) = \underbrace{\bar{X}_1 \bar{X}_2 X_3}_1 \vee \underbrace{\bar{X}_2 X_3 X_4}_2 \vee \underbrace{\bar{X}_1 \bar{X}_2 \bar{X}_4}_3 \vee \underbrace{X_1 \bar{X}_3 X_4}_4 \vee \underbrace{X_1 X_3 X_4}_5 \vee \underbrace{\bar{X}_1 X_2 \bar{X}_4}_6 \vee \underbrace{\bar{X}_1 X_2 \bar{X}_3 X_4}_7$$

В отриманому виразі ПФ знову виконаємо операції склеювання: $3-6 = X_1 X_4$; $4-5 = X_1 X_4$.

З урахуванням закону ідемпотентності для диз'юнкції $X_1 X_4 \cup X_1 X_4 = X_1 X_4$ третій, четвертий, п'ятий і шостий члени поглинаються членом $X_1 X_4$, а перший, другий і сьомий залишаються. В результаті отримуємо $Y(X_1, X_2, X_3, X_4) = X_1 X_4 \cup \bar{X}_1 \bar{X}_2 X_3 \cup \bar{X}_2 X_3 X_4 \cup \bar{X}_1 X_2 \bar{X}_3 \bar{X}_4$.

До цього виразу операції склеювання і поглинання використати неможливо й, як слід, воно є скороченою ДНФ заданої ПФ.

Проста імпліканта називається зайвою, якщо її можна виключити з скороченої ДНФ. Подальше спрощення ПФ зводиться до виключення зайвих імплікант. Диз'юнкція простих імплікант ПФ, жодна з яких не є зайвою, називається тупиковою ДНФ цієї функції. ДНФ, яка містить не більше букв, ніж друга ДНФ деякої ПФ, називається мінімальною ДНФ (МДНФ) цієї функції.

Знаходження МДНФ функції зводиться до виділення деякого числа простих імплікант даної функції із всієї їх множини. Один з методів рішення цієї задачі полягає на використанні імплікантної матриці, в якій стовпці відзначаються конституюєнтами **I**, а строки – простими імплікантами. Якщо просту імпліканту можна отримати з конституюєнти шляхом виокреслення деяких букв, то говорять, що імпліканта накриває конституюєнту. В табл. 1.6 стовпці і строки відмічені **K** і імпліканти **I** функції $Y(X_1, X_2, X_3, X_4)$. Проста імпліканта $\bar{X}_1 \bar{X}_2 X_3$ накриває конституюєнту $\bar{X}_1 \bar{X}_2 X_3 \bar{X}_4$, бо $\bar{X}_1 \bar{X}_2 X_3$ можна отримати із $\bar{X}_1 \bar{X}_2 X_3 \bar{X}_4$ шляхом виокреслення букви $\bar{X}_4$. Ця ж імпліканта накриває конституюєнту $\bar{X}_1 \bar{X}_2 X_3 X_4$. Проста імпліканта може співпадати з конституюєнтою, яка накривається ею **I**. Так, імпліканта $\bar{X}_1 X_2 \bar{X}_3 \bar{X}_4$ накриває конституюєнту $\bar{X}_1 X_2 \bar{X}_3 \bar{X}_4$.

Таблиця 1.6

Реалізація прикладу 1.1

I	K						
	$\bar{X}_1\bar{X}_2X_3\bar{X}_4$	$\bar{X}_1\bar{X}_2X_3X_4$	$\bar{X}_1X_2\bar{X}_3\bar{X}_4$	$X_1X_2\bar{X}_3X_4$	$X_1\bar{X}_2\bar{X}_3X_4$	$X_1\bar{X}_2X_3X_4$	$X_1X_2X_3X_4$
X_1X_4				*	*	*	*
$\bar{X}_1\bar{X}_2X_3$	*	*					
$X_2X_3X_4$		*				*	
$\bar{X}_1X_2\bar{X}_3\bar{X}_4$			*				

Якщо проста імпліканта накриває деяку конституенту I, то відповідна її клітка матриці відмічається “*”.

Для отримання тупикової ДНФ достатньо знайти підмножину простих імплікант, які спільно накривають всі конституанти I. З табл. 1.6 видно, що вказаній умові задовольняє підмножина імплікант: $X_1X_4, \bar{X}_1\bar{X}_2X_3, \bar{X}_1X_2\bar{X}_3\bar{X}_4$.

ПФ, яка розглядається, має одну тупикову, а відповідно, і єдину МДНФ $Y(X_1, X_2, X_3, X_4) = X_1X_4 \cup \bar{X}_1\bar{X}_2X_3 \cup \bar{X}_1X_2\bar{X}_3\bar{X}_4$.

Аналогічна методика отримання МКФ. Спочатку, використав ПФ, зробленої КНФ операції неповного склеювання поглинання, отримаємо скорочену КНФ. Диз’юнкції перемінних, які входять в її склад, називаються простими імплікантами. Операція неповного склеювання для кон’юнктивної форми визначається співвідношенням $(X \cup Y)(X \cup \bar{Y}) = X(X \cup Y)(X \cup \bar{Y})$.

Потім за допомогою імпліцентної матриці знайдемо тупикові і мінімальні КНФ. При невеликій кількості (не більше 6) перемінних для знаходження МДНФ (МКФ) використовують діаграми Вейча і карти Карно.

Діаграма Вейча

Діаграма Вейча – це спеціального вигляду таблиця, яка використовується для завдання досконалих ПФ і дозволяє спростити процес пошуку мінімальних форм. Для ПФ від n перемінних ДВ представляє собою прямокутник на 2^n кліток. Кожній клітці ДВ ставиться у відповідність двійковий n –мірний набір. На рис. 1.1 наведено ДВ трьох, чотирьох, п’яти і шістьох перемінних. Конституентам, які склеюються відповідають сусідні клітки.

Отримання МДНФ функції зводиться до об’єднання в групи одиничних кліток ДВ, які задають функцію. При об’єднанні кліток в групи повинні виконуватись наступні вимоги:

- кількість кліток в групі дорівнюється 2^k ($k=0,1,2,\dots$);
- кожна клітка повинна мати "k" сусідніх кліток в групі;
- в кожную групу повинно входити максимальна кількість кліток;
- кількість груп повинно бути мінімальним.

Кожній групі в МДНФ відповідає проста імпліканта, яка визначається як кон’юнкція перемінних, значення яких постійне для всіх наборів груп. Групі із двох кліток відповідає кон’юнкція із $(n-k)$ букв.

		X_2	$\bar{X}_2$			X_2	$\bar{X}_2$	
X_1	$\bar{X}_1$	24	28	20	16	25	29	
		26	30	22	18	27	31	
		10	14	6	2	11	15	
		8	12	4	0	9	13	
		$\bar{X}_3$		X_3	$\bar{X}_3$	$\bar{X}_3$		
		$\bar{X}_5$		X_5	$\bar{X}_5$	$\bar{X}_5$		

		X_2	$\bar{X}_2$			X_2	$\bar{X}_2$	
X_1	$\bar{X}_1$	49	57	41	33	51	59	
		53	61	45	37	55	63	
		21	29	13	5	23	31	
		17	25	9	1	19	27	
		$\bar{X}_3$		X_3	$\bar{X}_3$	$\bar{X}_3$		
		$\bar{X}_5$		X_5	$\bar{X}_5$	$\bar{X}_5$		

		X_2	$\bar{X}_2$			X_2	$\bar{X}_2$	
X_1	$\bar{X}_1$	48	56	40	32	50	58	
		52	60	44	36	54	62	
		20	28	12	4	22	30	
		16	24	8	0	18	26	
		$\bar{X}_3$		X_3	$\bar{X}_3$	$\bar{X}_3$		
		$\bar{X}_5$		X_5	$\bar{X}_5$	$\bar{X}_5$		

Рис. 1.1

$Y(X_1, X_2, X_3)$

		X_2	$\bar{X}_2$
X_1		6	7
$\bar{X}_1$		2	3
		$\bar{X}_3$	X_3
		$\bar{X}_5$	X_5

$Y(X_1, X_2, X_3, X_4)$

		X_2	$\bar{X}_2$
X_1		12	14
$\bar{X}_1$		13	15
		$\bar{X}_3$	X_3
		$\bar{X}_5$	X_5

		X_2	$\bar{X}_2$
X_1			
$\bar{X}_1$			
		$\bar{X}_3$	X_3
		$\bar{X}_5$	X_5

Приклад 1.2. Знайти МДНФ функції $Y = (X_1, X_2, X_3, X_4) = 2 \cup 3 \cup 4 \cup 9 \cup 11 \cup 13 \cup 15$. На рис. 1.2 створено ДВ цієї функції і наведено варіант об'єднання в групи одиничних кліток, які приводять до мінімальної форми:

$Y(X_1, X_2, X_3, X_4) = X_1 X_4 \cup \bar{X}_1 \bar{X}_2 X_3 \cup \bar{X}_1 X_2 \bar{X}_3 \bar{X}_4$. Для отримання МКНФ в групі об'єднують нульові клітки і кожній групі із двох кліток відповідає диз'юнкція із (n-k) букв. При цьому перемінні повинні записуватись не так, як вони наведені в розмітці ДВ, а з інверсією. В практичній роботі це незручно. Доцільніше змінити відмітку сторін ДВ на інверсне значення ($\bar{X}_i$) (рис.1.3).

Приклад 1.3. Знайти МКНФ функції $Y = (X_1, X_2, X_3, X_4) = (X_1 \cup X_2 \cup X_3 \cup X_4)(X_1 \cup X_2 \cup X_3 \cup \bar{X}_4)(X_1 \cup \bar{X}_2 \cup X_3 \cup \bar{X}_4)(X_1 \cup \bar{X}_2 \cup \bar{X}_3 \cup X_4)(\bar{X}_1 \cup X_2 \cup X_3 \cup X_4)(\bar{X}_1 \cup \bar{X}_2 \cup X_3 \cup X_4)(\bar{X}_1 \cup \bar{X}_2 \cup \bar{X}_3 \cup X_4)(\bar{X}_1 \cup X_2 \cup \bar{X}_3 \cup X_4)$

ДВ цієї функції і варіант об'єднання нульових кліток наведено на рис. 1.3.



Рис.1.3

Символами $(\bar{X}_i)$ відмічено сторони ДВ при завданні функції в СКНФ.
 $Y(X_1, X_2, X_3, X_4) = (X_1 \cup X_4)(X_1 \cup X_2 \cup \bar{X}_4)(X_1 \cup X_2 \cup X_3)$.

Карта Карно

Карта Карно представляє собою таблицю на 2^n кліток. Сусідні рядки і стовбці кодуються сусідніми кодами. На рис. 1.4 наведено КК трьох, чотирьох, п'яти й шістьох перемінних. Як і в випадку ДВ кожній клітці КК ставиться у відповідність двійковий n -мірний набір, на якому ПФ має одиничне (нульове значення).

Конституентам, які склеюються, відповідають сусідні клітки.

Приклад 1.4. Знайти МДНФ функції, яка задана в прикладі 1.2.

$$\frac{Y(X_1, X_2, X_3, X_4)}{X_3 X_4}$$

		$X_3 X_4$			
		00	01	11	10
$X_1 X_2$	00	0	1	3	2
	01	4	5	7	6
	11	12	13	15	14
	10	8	9	11	10

$$\frac{Y(X_1, X_2, X_3, X_4, X_5)}{X_3 X_4}$$

		$X_3 X_4$				$X_3 X_4$			
		00	01	11	10	00	01	11	10
$X_1 X_2$	00	0	2	6	4	1	3	7	5
	01	8	10	14	12	9	11	15	13
	11	24	26	30	28	25	27	31	29
	10	16	18	22	20	17	19	23	21

$\begin{matrix} 0 & & & 1 \\ & & X_5 & \end{matrix}$

		$Y(X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6)$															
		$X_3 X_4$															
		00	01	11	10	00	01	11	10	00	01	11	10	00	01	11	10
$X_1 X_2$	00	0	4	12	8	1	5	13	9	3	7	15	11	2	6	14	10
	01	16	20	28	24	17	21	29	25	19	23	31	27	18	22	30	26
	11	48	52	60	56	49	53	61	57	51	55	63	59	50	54	62	58
	10	32	36	44	40	33	37	45	41	35	39	47	43	34	38	46	42
		00				01				11				10			

Рис. 1.4

На рис. 1.5 наведено КК цієї функції і об'єднання
одиничних кліток в групи

$$Y(X_1, X_2, X_3, X_4) = X_1 X_4 \cup \bar{X}_1 \bar{X}_2 X_3 \cup \bar{X}_1 X_2 \bar{X}_3 \bar{X}_4.$$

Безпосередньо СКНФ на КК не представляється.

		$X_3 X_4$			
		00	01	11	10
$X_1 X_2$	00			$\{ \bar{3} \}$	$\{ \bar{2} \}$
	01	$\{ \bar{4} \}$			
	11		$\{ 13 \}$	$\{ 15 \}$	
	10		$\{ 9 \}$	$\{ 11 \}$	

Рис. 1.5

Мінімальна форма інверсної функції

В ряді випадків доцільніше шукати мінімальну форму не самої ПФ, а її заперечення. При створенні ПФ з СНМФ її при використанні ДВ (КК) в групі об'єднують нульові клітки.

Приклад 1.5.

Знайти МДНФ функції

$$Y(X_1, X_2, X_3, X_4) = 2 \cup 6 \cup 7 \cup 8 \cup 12 \cup 13.$$

МДНФ функції шукається по КК (рис. 1.6)

$$Y(X_1, X_2, X_3, X_4) = X_1 X_2 \bar{X}_3 \cup X_1 \bar{X}_3 \bar{X}_4 \cup \bar{X}_1 X_2 X_3 \cup \bar{X}_1 X_3 \bar{X}_4.$$

МДНФ інверсної функції знаходять також по КК (рис. 1.7).

В цьому випадку нульові клітки інверсної функції

$$Y(\bar{X}_1 \bar{X}_2 \bar{X}_3 \bar{X}_4) \text{ відмічено "*"}$$

$$Y(\bar{X}_1 \bar{X}_2 \bar{X}_3 \bar{X}_4) = X_1 X_3 \cup \bar{X}_1 \bar{X}_3 \cup \bar{X}_2 X_4.$$

Порівняємо отримані мінімальні форми, спостерігається, що МДНФ інверсної функції містить менш букв, ніж МДНФ прямої функції.

		$X_3 X_4$			
		00	01	11	10
$X_1 X_2$	00				$\{ \bar{2} \}$
	01			$\{ \bar{7} \}$	$\{ \bar{6} \}$
	11	$\{ \bar{15} \}$	$\{ \bar{13} \}$		
	10	$\{ \bar{9} \}$			

Рис. 1.6

		$X_3 X_4$			
		00	01	11	10
$X_1 X_2$	00	$\{ * \}$	$\{ * \}$	$\{ * \}$	$\{ \bar{2} \}$
	01	$\{ * \}$	$\{ * \}$	7	$\{ \bar{6} \}$
	11	15	13	$\{ * \}$	$\{ * \}$
	10	9	$\{ * \}$	$\{ * \}$	$\{ * \}$

Рис. 1.7

ПРИКЛАД ВИКОНАННЯ ДОМАШНЬОГО ЗАВДАННЯ

Задана ПФ

$$Y(X_1, X_2, X_3, X_4) = 0 \cup 1 \cup 3 \cup 4 \cup 5 \cup 10 \cup 11 \cup 13 \cup 14 \cup 15 \cup 19 \cup 28 \cup 29 \cup 30$$

метод мінімізації: 1,3.

Метод Квайна-Мак Класкі

Використовуємо операції неповного склеювання й поглинання, визначаємо скорочену ДНФ функції:

$$Y(X_1, X_2, X_3, X_4) = \bar{X}_1 \bar{X}_2 \bar{X}_4 \cup \bar{X}_1 X_2 X_4 \cup \bar{X}_1 \bar{X}_2 \bar{X}_3 X_5 \cup \bar{X}_1 \bar{X}_3 X_4 X_5 \cup \bar{X}_2 \bar{X}_3 X_4 X_5 \cup \\ \cup \bar{X}_1 X_3 \bar{X}_4 X_5 \cup \bar{X}_1 X_2 X_3 X_5 \cup X_2 X_3 \bar{X}_4 X_5 \cup X_2 X_3 X_4 \bar{X}_5 \cup X_1 X_2 X_3 \bar{X}_4 \cup X_1 X_2 X_3 \bar{X}_5 \cup \\ \cup \bar{X}_1 X_2 X_3 X_4 X_5 \cup X_1 \bar{X}_2 \bar{X}_3 X_4 X_5$$

Створюємо імплікантну матрицю (табл. 1.7). Заштриховані клітки матриці визначають імпліканти, сукупність яких накриває всі конституенти ПФ, МДНФ має вигляд:

$$Y(X_1, X_2, X_3, X_4) = \bar{X}_1 \bar{X}_2 \bar{X}_4 \cup \bar{X}_1 X_2 X_4 \cup \bar{X}_2 \bar{X}_3 X_4 X_5 \cup X_2 X_3 \bar{X}_4 X_5 \cup X_1 X_2 X_3 \bar{X}_5$$

й співпадає с МДНФ, яку отримано за допомогою карти Карно.

За допомогою КК (рис. 1.8) отримуємо МДНФ ПФ:

$$Y(X_1, X_2, X_3, X_4) = \bar{X}_1 \bar{X}_2 \bar{X}_4 \cup \bar{X}_1 X_2 X_4 \cup \bar{X}_2 \bar{X}_3 X_4 X_5 \cup X_2 X_3 \bar{X}_4 X_5 \cup X_1 X_2 X_3 \bar{X}_5$$

		X ₃ X ₄							
		00	01	11	10	00	01	11	10
X ₁ X ₂	00	0			4	1	3		5
	01		10	14			11	15	13
	11			30	28				29
	10						19		
		X ₅							

Рис. 1.8

Правильність отриманої МДНФ функції визначаємо за допомогою інтерпретатору булевих рівнянь. Перевіряємо число символів в МДНФ ПФ. В нашому прикладі число символів $43 < 32$ і ПФ, яка контролюється представляємо у вигляді системи рівнянь:

$$Y_1 = \neg X_1 * \neg X_2 * \neg X_4 + \neg X_1 * \neg X_2 * X_4 + \neg X_2 * \neg X_3 * X_4 * X_5,$$

$$Y_2 = X_2 * X_3 * \neg X_4 * X_5 + X_1 * X_2 * X_3 * \neg X_5,$$

$$Y_3 = Y_1 + Y_2.$$

Значення наборів повинно бути попередньо переведено в вісімкову систему числення:

$$X(1,2,3,4,5) = 0,1,3,4,5,12,13,15,16,17,23,34,35,36.$$

Правильність мінімізації ПФ визначається по значенню третьої компоненти вектору $Y(Y_1, Y_2, Y_3)$. Ціна схеми, яка реалізує МДНФ ПФ, по Квайну $18+5=23$.

Таблиця 1.7

Імпліканти матриця

K														
$X_1 X_2 X_3 X_4 X_5$														
I	12345	12345	12345	12345	12345	12345	12345	12345	12345	12345	12345	12345	12345	12345
$\bar{X}_1 \bar{X}_2 \bar{X}_4$	*	*		*	*									
$\bar{X}_1 \bar{X}_2 \bar{X}_3 X_5$		*												
$\bar{X}_1 \bar{X}_3 X_4 X_5$			*				*							
$\bar{X}_2 \bar{X}_3 X_4 X_5$			*								*			
$\bar{X}_1 X_3 \bar{X}_4 X_5$					*			*						
$\bar{X}_1 X_2 X_4$						*	*		*	*				
$\bar{X}_1 X_2 X_3 X_5$								*		*				
$X_2 X_3 \bar{X}_4 X_5$								*					*	
$X_2 X_3 X_4 \bar{X}_5$									*					*
$X_1 X_2 X_3 \bar{X}_4$												*	*	
$X_1 X_2 X_3 \bar{X}_5$												*		*
$X_1 \bar{X}_2 \bar{X}_3 X_4 X_5$											*			
$\bar{X}_1 X_2 X_3 X_4 X_5$										*				

K – конституанта, I - імпліканта

Листінг прикладу

S

ПРИЙМАННЯ

E

$Y1 = \neg X1 * \neg X2 * \neg X4 + \neg X1 * \neg X2 * X4 + \neg X2 * \neg X3 * X4 * X5$

$Y2 = X2 * X3 * \neg X4 * X5 + X1 * X2 * X3 * \neg X5$

$Y3 = Y1 + Y2$

O

D

$X(1,2,3,4,5) = 0,1,3,4,5,12,13,15,16,17,23,34,35,36$

O

R

X(00000)

Y(101)

X(00001)

Y(101)

X(00011)

Y(101)

X(00100)

Y(101)

X(00101)

Y(101)

X(01010)

Y(101)

X(010011)

Y(101)

X(01101)

Y(011)

X(01110)

Y(101)

X(11100)

Y(011)

X(01111)

Y(101)

X(11101)

Y(011)

X(10011)

Y(101)

X(11110)

Y(011)

ЛАБОРАТОРНА РОБОТА №2

Синтез комбінаційних схем

Мета роботи: отримання практичних навичок синтезу комбінаційних схем (КС).

Підготовка до роботи

1. Вивчити теоретичну частину роботи.
2. В лабораторному зошиті представити результати виконання домашнього завдання.

Порядок виконання роботи

1. Представити результати виконання домашнього завдання в лабораторному звіті.
2. Завантажити в ЕОМ інтерпретатор булевих рівнянь [1].
3. Ввести в ЕОМ мінімізовані булеві рівняння (математична модель КС, яка синтезується) й набори даних (вхідні сигнали КС).

Зміст звіту

В звіті необхідно представити:

1. Результати виконання домашнього завдання.
2. Листінг результатів моделювання КС.
3. Принципові схеми КС.
4. Виводи по роботі.

Домашнє завдання

1. У відповідності з варіантом домашнього завдання (табл. 2.1, 2.2) необхідно синтезувати КС. Мінімізовані булеві рівняння перевірити на відповідність закону функціонування за допомогою інтерпретатора мулевих рівнянь.

2. Підготувати тести мулевих рівнянь й наборів даних для вводу в ЕОМ.

Таблиця 2.1

Завдання

Номер завдання	Зміст
1	Синтезувати КС на два виходи і оцінити число ЛЕ.
2	Знайти МКНФ для ПФ Y_2 і реалізувати КС.
3	Знайти МКНФ частково визначеної ПФ Y_3 і реалізувати КС.
4	Синтезувати КС на 3-вхідних ЛЕ "АБО-НІ", які реалізують ПФ Y_4 .
5	Синтезувати КС, яка реалізує ПФ Y_5 .

Таблиця 2.2

Варіанти завдань

Номер варіанта	Номер завдання	ПФ	ЛЕ	Невизначені набори
1	1	$Y_2^3 = \sum 0,2,3,5,7$ $Y_1^3 = \sum 3,4,6,7$	I-НІ	
	2	$Y_2^4 = \sum 0,1,2,3,4,9,10,13,14$	АБО-НІ	
	3	$Y_3^4 = \sum 1,4,8,11,15$	I-НІ	3,5,6,10,12
	4	$Y_4^4 = (X1 \cup X2)(X3 \cup X4)(X2 \cup X3)$ $(X1 \cup X4)(X1 \cup X3)$	АБО-НІ	
	5	$Y_5^4 = \sum 1,3,4,6,7,9,12,14$	I-НІ	
2	1	$Y_2^3 = \sum 2,3,4,5$ $Y_1^3 = \sum 3,5,6,7$	I-НІ	
	2	$Y_2^4 = \sum_{29,31} 0,1,2,3,4,6,10,11,12,13,14,15,16,$	АБО-НІ	
	3	$Y_3^4 = \sum 0,2,3,7,10,12$	I-НІ	4,8,9,14
	4	$Y_4^4 = (X1 \cup X3 \cup X2 \cup X4)(X1 \cup X3)$ $(X1 \cup X2)$	АБО-НІ	
	5	$Y_5^4 = \sum 0,4,6,7,8,9,12,14$	I-НІ	
3	1	$Y_2^3 = \sum 1,3,4,6$ $Y_1^3 = \sum 1,2,5,6$	I-НІ	
	2	$Y_2^3 = \sum 3,4,5,6,10,11,12,13,14$	АБО-НІ	
	3	$Y_3^4 = \sum 3,4,9,13,15$	I-НІ	4,7,8,11,13
	4	$Y_4^4 = (X1 \cup X2 \cup X3 \cup X4)(X1 \cup X2)$ $(X3 \cup X4)(X1 \cup X2)$	АБО-НІ	
	5	$Y_5^4 = \sum 1,3,6,7,9,10,11,13$	I-НІ	
4	1	$Y_2^3 = \sum 0,1,4,6$ $Y_1^3 = \sum 1,2,5,4,6$	I-НІ	
	2	$Y_2^4 = \sum 1,3,4,5,7,11,12,14,15$	АБО-НІ	
	3	$Y_3^4 = \sum 7,8,12,15$	I-НІ	2,6,8,11
	4	$Y_4^4 = X1 X2 X3 X2 X3 X4 X1 X3 X4$	АБО-НІ	
	5	$Y_5^4 = \sum 1,2,7,9,13,14$	I-НІ	
5	1	$Y_2^3 = \sum 0,2,4,5$ $Y_1^3 = \sum 3,5,6,7$	I-НІ	

	2	$Y_2^4 = \sum 1,3,6,7,9,10,11,13$	АБО-НІ	
	3	$Y_3^4 = \sum 1,4,8,11,15$	І-НІ	0,3,4,6,14
	4	$Y_4^4 = (X_2 \cup X_4) \cup (X_3 \cup X_2)(X_1 \cup X_4)$ $(X_2 \cup X_3)$	АБО-НІ	
	5	$Y_5^4 = \sum 0,2,7,8,10,12,14,15$	І-НІ	
6	1	$Y_2^3 = \sum 0,2,4,5$ $Y_1^3 = \sum 3,5,6,7$	І-НІ	
	2	$Y_2^4 = \sum 1,3,6,7,9,10,11,13$	АБО-НІ	
	3	$Y_3^4 = \sum 1,4,8,11,15$	І-НІ	3,5,6,10,12
	4	$Y_4^4 = (\overline{X_2} \cup X_4)(X_3 \cup \overline{X_2} \cup X_1 \cup \overline{X_4})$ $(X_2 \cup \overline{X_3})(\overline{X_1} \cup X_2)$	АБО-НІ	
	5	$Y_5^4 = \sum 0,2,7,8,10,12,14,15$	І-НІ	

Стислі теоретичні відомості

Комбінаційною схемою називається сукупність логічних елементів (ЛЕ), яка реалізує задану систему ПФ. Функціонування ЛЕ списується одною ПФ, яку називають елементним логічним оператором. На практиці частіше за все використовують ЛЕ, які реалізують функції АБО, І, НІ, І-НІ, АБО-НІ, І-АБО-НІ. Умовно-графічне позначення деяких ЛЕ наведено на рис. 2.1.

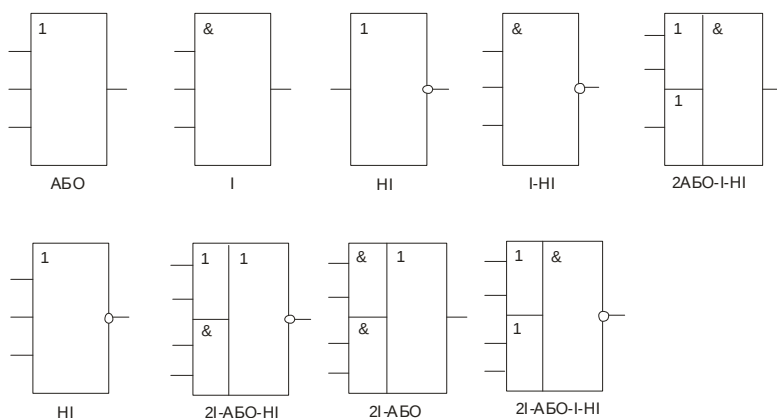


Рис. 2.1

Синтез КС полягає в побудові із заданого набору ЛЕ схеми, яка реалізує систему ПФ [2].

Синтез КС з "n" входами та одним виходом.

Задача синтезу подібних КС вирішується наступним чином. ПФ, яка підлягає реалізації або її заперечення представляється в СДНФ (СКНФ). Потім

знаходиться її мінімальна форма. За операторним представленням ПФ складають КС, яка шукається.

Приклад 2.1. Побудувати КС, яка реалізує ПФ (табл. 2.3) на ЛЕ І, АБО, НІ. СДНФ і МДНФ функції має вигляд: $Y(X_1, X_2, X_3) = 1 \cup 4 \cup 6$; $Y(X_1, X_2, X_3) = X_1 \bar{X}_3 \cup \bar{X}_1 \bar{X}_2 X_3$.

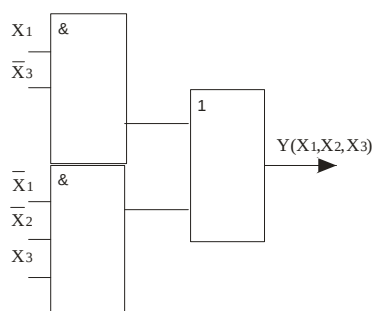


Рис. 2.2

Таблиця 2.3
ПФ з трьох перемінних

X_1	X_2	X_3	X_4
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	0

Синтез КС, які описуються частково визначеними ПФ

В ЕОМ часто зустрічаються КС, на входи яких деякі комбінації сигналів ніколи на поступають. Такі комбінації називають забороненими. Функціонування КС з забороненими комбінаціями вхідних сигналів описуються неповністю (частково) визначеними ПФ.

Повністю визначена ПФ, значення якої співпадає зі значенням частково визначеної ПФ $Y(X_1, \dots, X_k)$ на тих наборах, на яких вона визначена, називається функцією еквівалентної $Y(X_1, \dots, X_k)$. Якщо ПФ не визначена на "Р" наборах, то існує 2^P різних еквівалентних їй функцій. Задача синтезу зводиться до визначення еквівалентних МДНФ (МКНФ) частково визначеної ПФ і вибору з цієї множини форми, яка містить найменшу кількість букв.

Приклад 2.2. Визначити МДНФ частково визначеної ПФ $Y(X_1, X_2)$ (табл. 2.4).

Символом d позначено невизначений стан. Тут $P=1$ і еквівалентними будуть ПФ $Y_1 = \bar{X}_1 X_2 \cup X_1 \bar{X}_2$ $Y_2 = \bar{X}_1 \bar{X}_2 \cup \bar{X}_1 X_2 \cup X_1 \bar{X}_2$.

Мінімізуємо Y_1 і Y_2 , отримаємо:

$$Y_1 = \bar{X}_1 X_2 \cup X_1 \bar{X}_2, Y_2 = \bar{X}_1 \cup \bar{X}_2$$

Таким чином, МДНФ частково визначеної ПФ має вигляд:

$$Y(X_1, X_2) = \bar{X}_1 \cup \bar{X}_2$$

Оскільки число еквівалентних форм різко зростає з збільшенням P , то задача синтезу вирішується шляхом вгадування підходящої МДНФ (МКНФ). Знайти частково визначену ПФ можна безпосередньо на ДВ (КК).

Таблиця 2.4
ПФ $Y(X_1, X_2)$

X_1	X_2	Y	Y_1	Y_2
0	0	1	0	1
0	1	1	1	1
1	0	1	1	1
1	1	0	0	0

Приклад 2.3. Знайти МДНФ частково визначеної ПФ $Y(X_1, X_2, X_3, X_4)$, яка задана КК (рис. 2.3 а).

		X ₃ X ₄			
		00	01	11	10
X ₁ X ₂	00	1	0	1	d
	01	d	0	1	0
	11	d	1	0	d
	10	d	0	1	d

		X ₃ X ₄			
		00	01	11	10
X ₁ X ₂	00	1̄	0	1̄	1̄
	01	1̄	0	1̄	0
	11	1̄	1̄	0	0
	10	1̄	0	1̄	1̄

Рис. 2.3

Довизначимо ПФ на неіснуючих наборах "1" і "0" таким чином, щоби число груп було мінімальним (рис. 2.3 б). В результаті отримаємо МДНФ вигляду:

$$Y(X_1, X_2, X_3, X_4) = \overline{X}_3 \overline{X}_4 \cup \overline{X}_2 X_3 \cup \overline{X}_1 X_3 X_4 \cup X_1 X_2 \overline{X}_3$$

Синтез КС з багатьма виходами

Синтез подібних КС може бути зведено до синтезу КС з одним виходом. Для цього достатньо кожен із ПФ системи реалізувати окремо. При цьому отримаємо схему з "m" виходами, яка складається із "m" незалежних КС. В таких КС має місце дублювання ЛЕ.

Мінімізація таких КС полягає в пошуку виражень для сукупності ПФ, в яких найбільш повно використовуються члени, загальні для декількох функцій, а також за рахунок представлення одних ПФ через інші.

Приклад 2.4. Побудувати КС з трьома виходами Y_1, Y_2, Y_3 , яка задана табл. 2.5 на ЛЕ І, АБО, НІ. При незалежній реалізації кожної із трьох ПФ відомими способами (ДВ, КК) визначаємо їх МДНФ:

$$Y_1 = \overline{X}_1 \overline{X}_2 X_3 \cup \overline{X}_1 X_2 \overline{X}_3 \cup X_1 \overline{X}_2 \overline{X}_3 \cup X_1 X_2 X_3;$$

$$Y_2 = X_3 \cup X_1 X_2 \cup \overline{X}_1 \overline{X}_2;$$

$$Y_3 = X_1 X_2 \cup \overline{X}_1 \overline{X}_2.$$

Для реалізації заданої системи ПФ потрібно вісім кон'юнкторів і три диз'юнктора. Ціна схеми за Квайном $S=29$.

Таблиця 2.5

КС з виходами Y_1, Y_2, Y_3

X ₁	X ₂	X ₃	Y ₁	Y ₂	Y ₃
0	0	0	0	1	1
0	0	1	1	1	1
0	1	0	1	0	0
0	1	1	0	1	0
1	0	0	1	0	0
1	0	1	0	1	0
1	1	0	0	1	1
1	1	1	1	1	1

Схема може бути мінімізована, якщо Y_2 виразити через Y_3 , тобто $Y_2 = X_3 \cup Y_3$, і Y_1 представити у вигляді залежності $Y_1 = f(X_1, X_2, X_3, Y_2, Y_3)$.

Для цього будуємо табл. 2.6, в котрій для кожного із 32 наборів по табл. 2.5 визначаємо значення Y_1 . На заборонених наборах значення Y_1 не відмічено. Мінімальна форма Y_1 знаходиться за допомогою карти Карно (рис. 2.4), де "1" відмічено довизначення ПФ на неіснуючих наборах: $Y_1 = \overline{Y}_2 \cup X_3 Y_3$.

Табл. 2.6

Розширення табл. 2.5

Номер набору	X_1	X_2	X_3	Y_2	Y_3	Y_1
0	0	0	0	0	0	
1	0	0	0	0	1	
2	0	0	0	1	0	
3	0	0	0	1	1	0
4	0	0	1	0	0	
5	0	0	1	0	1	
6	0	0	1	1	0	
7	0	0	1	1	1	1
8	0	1	0	0	0	1
9	0	1	0	0	1	
10	0	1	0	1	0	
11	0	1	0	1	1	
12	0	1	1	0	0	
13	0	1	1	0	1	
14	0	1	1	1	0	0
15	0	1	1	1	1	
16	1	0	0	0	0	1
17	1	0	0	0	1	
18	1	0	0	1	0	
19	1	0	0	1	1	
20	1	0	1	0	0	
21	1	0	1	0	1	
22	1	0	1	1	0	0
23	1	0	1	1	1	
24	1	1	0	0	0	
25	1	1	0	0	1	
26	1	1	0	1	0	
27	1	1	0	1	1	0
28	1	1	1	0	0	
29	1	1	1	0	1	
30	1	1	1	1	0	
31	1	1	1	1	1	1

		X ₃ Y ₂							
		00	01	11	10	00	01	11	10
X ₁ X ₂	00	1			1	1	0	7	1
	01	8		0	1	1		1	1
	11	1			1	1	0	31	1
	10	16		0	1	1		1	1

Рис. 2.4

Реалізація системи ПФ: $Y_1 = Y_2 \cup X_3 Y_3$ $Y_2 = X_3 \cup Y_3$ $Y_3 = X_1 X_2 \cup \bar{X}_1 \bar{X}_2$ потребує три кон'юнктора, три диз'юнктора і один інвертор (рис. 2.5). Ціна схеми по Квайну $C=13$.

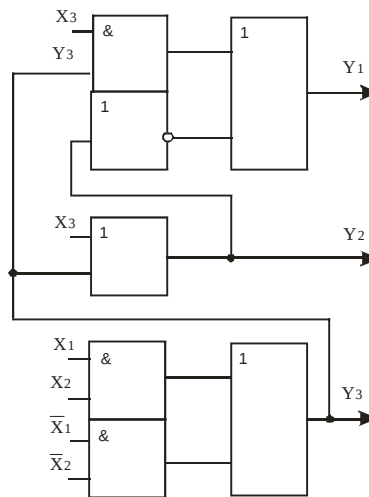


Рис. 2.5

Синтез КС із універсальних ЛЕ

Універсальними ЛЕ називаються елементи, які реалізують ПФ: $f_9(X_1, \dots, X_k) = \overline{X_1 X_2 \dots X_k} = X_1 \downarrow X_2 \downarrow \dots \downarrow X_k$ (І-НІ)

$f_{10}(X_1, \dots, X_k) = \overline{X_1 \cup X_2 \cup \dots \cup X_k} = X_1 \downarrow X_2 \downarrow \dots \downarrow X_k$ (АБО-НІ).

ЛЕ, який реалізує ПФ $f_9(X_1, \dots, X_k)$, називається елементом І-НІ (елемент Шеффера) (рис. 2.6,а), а елемент який реалізує ПФ $f_{10}(X_1, \dots, X_k)$, називається елементом АБО-НІ (елемент Пірса) (рис. 2.6, б).

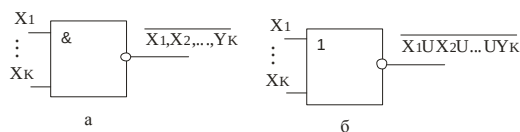


Рис. 2.6

Кожна із ПФ f_9 і f_{10} складає функціонально повну систему ПФ. Функції основної функціонально повної системи (І, АБО, НІ) можна виразити у вигляді суперпозиції функцій f_9 , f_{10} (табл. 2.7).

Таблиця 2.7

Суперпозиція функцій

ПФ "І-НІ"	ПФ "АБО-НІ"
$Y = \bar{X} = \overline{X X}$	$Y = \bar{X} = \overline{X \cup X}$
$Y = X_1 X_2 \dots X_k = \overline{\overline{X_1 X_2 \dots X_k}}$	$Y = X_1 X_2 \dots X_k = \overline{\overline{X_1} \cup \overline{X_2} \cup \dots \cup \overline{X_k}}$
$Y = X_1 \cup X_2 \cup \dots \cup X_k = \overline{\overline{X_1} \overline{X_2} \dots \overline{X_k}}$	$Y = X_1 \cup X_2 \cup \dots \cup X_k = \overline{\overline{X_1} \cup \overline{X_2} \cup \dots \cup \overline{X_k}}$

Приклад 2.5. Синтезувати КС із ЛЕ І-НІ, яка реалізує ПФ: $Y(X_1, X_2, X_3, X_4) = 2 \cup 3 \cup 4 \cup 9 \cup 11 \cup 13 \cup 15$. Знайдемо МДНФ заданої ПФ $Y(X_1, X_2, X_3, X_4) = X_1 X_4 \cup \bar{X}_1 \bar{X}_2 X_3 \cup \bar{X}_1 X_2 \bar{X}_3 \bar{X}_4$.

Застосуємо правило подвійного заперечення де Моргана (табл. 2.7), представимо ПФ в базисі "І-НІ".

$$Y(X_1, X_2, X_3, X_4) = \overline{\overline{X_1 X_4} \cup \overline{\bar{X}_1 \bar{X}_2 X_3} \cup \overline{\bar{X}_1 X_2 \bar{X}_3 \bar{X}_4}} = \overline{\overline{X_1 X_4} \overline{\bar{X}_1 \bar{X}_2 X_3} \overline{\bar{X}_1 X_2 \bar{X}_3 \bar{X}_4}} = (X_1 / X_4) / (\bar{X}_1 / \bar{X}_2 / \bar{X}_3) / (\bar{X}_1 / X_2 / \bar{X}_3 / \bar{X}_4).$$

Відповідна КС наведена на рис. 2.7.

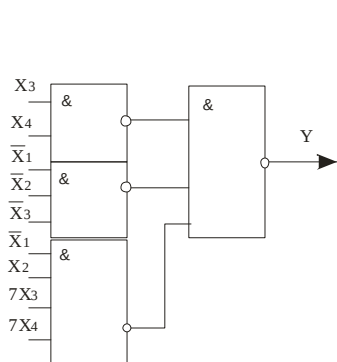


Рис. 2.7

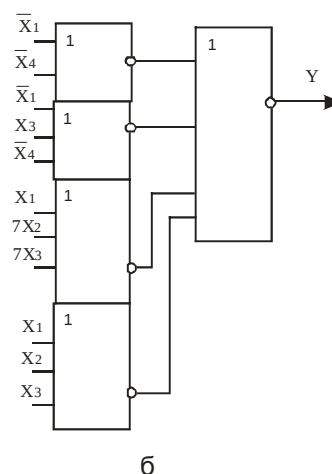
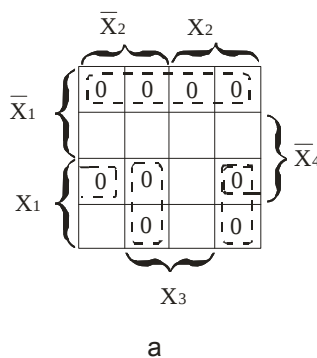


Рис. 2.8

Реалізація ПФ в КНФ на ЛЕ "АБО-НІ"

Приклад 2.6. Синтезувати КС із ЛЕ "АБО-НІ", яка реалізує ПФ в СКІФ (рис. 2.8, а). МКФ функції має вигляд:

$$Y(X_1, X_2, X_3, X_4) = (\bar{X}_1 \cup X_4)(X_1 \cup X_3 \cup \bar{X}_4)(X_1 \cup \bar{X}_2 \cup \bar{X}_3)(X_1 \cup X_2 \cup X_3).$$

Використовуємо правила подвійного заперечення і де Моргана, представимо ПФ в базисі "АБО-НІ":

$$Y(X_1, X_2, X_3, X_4) = \overline{\overline{(X_1 \cup X_4)} (X_1 \cup X_3 \cup \overline{X_4}) (X_1 \cup \overline{X_3} \cup \overline{X_3}) (X_1 \cup X_2 \cup X_3)} =$$

$$\overline{(X_1 \cup X_4) \cup (X_1 \cup X_3 \cup \overline{X_4}) \cup (X_1 \cup \overline{X_3} \cup \overline{X_3}) \cup (X_1 \cup X_2 \cup X_3)} =$$

$$(X_1 \downarrow X_4) \downarrow (X_1 \downarrow X_3 \downarrow \overline{X_4}) \downarrow (X_1 \downarrow \overline{X_3} \downarrow \overline{X_3}) \downarrow (X_1 \downarrow X_2 \downarrow X_3).$$
 КС наведено на рис. 2.8, б.

Реалізація ПФ в ДНФ на ЛЕ “АБО-НІ”

Для реалізації ПФ, яку виражено в ДНФ, на ЛЕ “АБО-НІ”, спочатку знаходять МДНФ інверсної функції, а потім за нею – МКНФ.

Приклад 2.7. Реалізувати ПФ

$$Y(X_1, X_2, X_3, X_4) = 0 \cup 1 \cup 3 \cup 4 \cup 5 \cup 8 \cup 12 \cup 13 \cup 15.$$

Першим кроком буде побудова карти Карно функції (рис. 2.9, а).

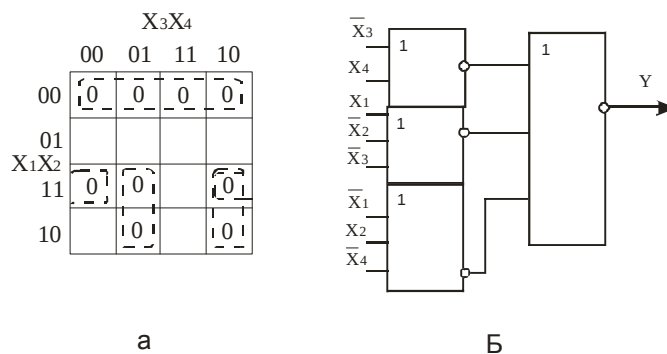


Рис. 2.9

Заперечення функції отримують, шляхом заповнення вільних кліток карти Карно "0". МДНФ інверсної функції:

$$\overline{Y(X_1, X_2, X_3, X_4)} = \overline{X_3} \overline{X_4} \cup \overline{X_1} X_2 X_3 \cup X_1 \overline{X_2} X_4.$$

В базисі "АБО-НІ" ПФ запишеться наступним чином:

$$Y(X_1, X_2, X_3, X_4) = \overline{\overline{(X_3 \cup X_4)} (X_1 \cup \overline{X_2} \cup \overline{X_3}) (\overline{X_1} \cup X_2 \cup \overline{X_4})} =$$

$$(X_3 \downarrow X_4) \downarrow (X_1 \downarrow \overline{X_2} \downarrow \overline{X_3}) \downarrow (\overline{X_1} \downarrow X_2 \downarrow \overline{X_4}).$$

Відповідну даної ПФ КС наведено на рис. 2.9, б.

Синтез КС із ЛЕ з обмеженим числом входів

Реальні ЛЕ мають обмежену кількість входів. Це обмеження характеризується коефіцієнтом об'єднання I , який визначає максимальну кількість входів, які використовуються ЛЕ. Існує ряд методів рішення задачі синтезу КС на ЛЕ з обмеженою кількістю входів. Розглянемо варіант використання властивості асоціативності диз'юнкції і кон'юнкції.

Нехай необхідно реалізувати диз'юнкцію $Y = X_1 \cup X_2 \cup \dots \cup X_n$ на диз'юнкторах з $I=2$. Використовуємо властивість асоціативності, вихідне вираження перетворюємо до вигляду $Y = (((X_1 \cup X_2) \cup X_3) \cup X_4) \cup X_5$.

Реалізацію ПФ наведено на рис. 2.10,а.

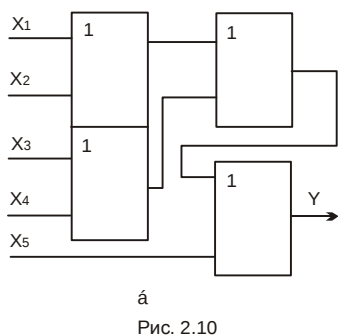
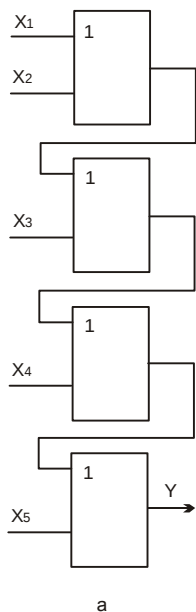


Рис. 2.10

Перетворення, яке потребується можна виконати інакше:
 $Y = ((X_1 \cup X_2) \cup (X_3 \cup X_4)) \cup X_5$.

Реалізація КС (рис. 2.10, б) має меншу глибину, тобто має меншу затримку.

Для реалізації диз'юнкції (кон'юнкції) n перемінних на диз'юнкторах (кон'юнкторах) з коефіцієнтом об'єднання I потребується визначена кількість елементів: $k = \left\lceil \frac{n-1}{I-1} \right\rceil$.

Глибина схеми визначається як $k = \lceil \log_I n \rceil$.

Приклад 2.8. Знайти характеристики K та H схеми, яка реалізує ПФ $Y(X_1, X_2, X_3, X_4) = X_1 X_2 \bar{X}_3 \bar{X}_4 \cup \bar{X}_1 \bar{X}_2 \bar{X}_3 \bar{X}_4 \cup X_1 \bar{X}_2 X_4 \cup X_1 \bar{X}_2 X_3 \cup X_2 X_3 X_4 \cup \bar{X}_1 X_2 X_3 \cup \bar{X}_1 X_2 X_4$.

Використовуються ЛЕ "І" і "АБО" з $I=2$.

Визначимо число кон'юнкторів для реалізації кон'юнкцій $K'=3+3+2+2+2+2+2=16$.

Глибина частини схеми, наприклад, яка реалізує $X_1 X_2 \bar{X}_3 \bar{X}_4$, дорівнюється $H' = \lceil \log_2 4 \rceil = 2$.

Для відтворення сімволової диз'юнкції необхідно $K'' = \left\lceil \frac{7-1}{2-1} \right\rceil = 6$ диз'юнкторів. Глибина цієї

частини схеми $H'' = \lceil \log_2 7 \rceil = 3$. Параметри КС, яка реалізує задану ПФ, відповідно дорівнюються $K=K'+K''=16+6=22$, $H=H'+H''=2+3=5$.

Метод каскадів ґрунтується на використанні формул розкладання ПФ $Y(X_1, X_2, \dots, X_n) = \bar{X}_i f(X_1, X_2, \dots, X_{i-1}, 0, X_{i+1}, \dots, X_n) \cup X_i f(X_1, X_2, \dots, X_{i-1}, 1, X_{i+1}, \dots, X_n)$ - ДНФ.

$Y(X_1, X_2, \dots, X_n) = [\bar{X}_i \cup f(X_1, X_2, \dots, X_{i-1}, 1, X_{i+1}, \dots, X_n)] \cdot$

$[X_i \cup f(X_1, X_2, \dots, X_{i-1}, 0, X_{i+1}, \dots, X_n)]$ - КНФ.

Приклад 2.9. Побудувати КС із ЛЕ "І", "АБО", "НІ" з $I=2$, яка реалізує ПФ із приклада 2.8, шляхом використання методу каскадів.

Виконаємо розкладання функції по перемінним X_1 і X_2 . Замість кон'юнкції $X_2 X_3 X_4$ запишемо $\bar{X}_1 X_2 X_3 X_4 \cup X_1 X_2 X_3 X_4$.

$Y(X_1, X_2, \dots, X_n) = X_1 [X_2 (\bar{X}_3 \bar{X}_4 \cup X_3 X_4) \cup \bar{X}_2 (X_3 \cup X_4)] \cup \bar{X}_1 [X_2 (X_3 X_4 \cup (X_3 \cup X_4)) \cup \bar{X}_2 (\bar{X}_3 \bar{X}_4)] = X_1 [X_2 (Y_1 \cup Y_3) \cup \bar{X}_2 Y_2] \cup \bar{X}_1 [X_2 (Y_3 \cup Y_2) \cup \bar{X}_2 Y_1]$.

Реалізацію КС наведено на рис. 2.11.

Операції Шеффера і Пірса не є асоціативними, і групування членів виконується на основі відношень:

$$X_1 | X_2 | X_3 | X_4 | X_5 = (\bar{X}_1 | \bar{X}_2) | (\bar{X}_3 | \bar{X}_4) | X_5 = (\bar{X}_1 | \bar{X}_2 | \bar{X}_3) | (\bar{X}_4 | X_5) \quad (2.1)$$

$$X_1 \downarrow X_2 \downarrow X_3 \downarrow X_4 \downarrow X_5 = (\overline{X_1 \downarrow X_2}) \downarrow (\overline{X_3 \downarrow X_4}) \downarrow X_5 = (\overline{X_1 \downarrow X_2 \downarrow X_3}) \downarrow (\overline{X_4 \downarrow X_5})$$

При використанні методу каскадів застосовують формули розкладання:

$$Y(X_1, X_2, \dots, X_n) = \overline{X_i} \mid f(X_1, X_2, \dots, X_{i-1}, 0, X_{i+1}, \dots, X_n) \mid [X_i \mid f(X_1, X_2, \dots, X_{i-1}, 1, X_{i+1}, \dots, X_n)]$$

$$Y(X_1, X_2, \dots, X_n) = [\overline{X_i} \downarrow f(X_1, X_2, \dots, X_{i-1}, 1, X_{i+1}, \dots, X_n)] \downarrow [X_i \downarrow f(X_1, X_2, \dots, X_{i-1}, 0, X_{i+1}, \dots, X_n)].$$

Приклад 2.10. Побудувати КС із ЛЕ "І-НІ" з $I=2$, яка реалізує ПФ:

$$Y(X_1, X_2, X_3) = X_1 X_2 \cup X_1 \overline{X_3} \cup X_1 X_2 X_3. \quad (2.2.)$$

Застосуємо вираз (2.1), знайдемо

$$Y(X_1, X_2, X_3) = (X_1 \mid X_2) \mid (X_1 \mid X_3) \mid (\overline{X_1} \mid \overline{X_2} \mid X_3) = (\overline{X_1 \mid X_2}) \mid (\overline{X_1 \mid X_3}) \mid (\overline{\overline{X_1} \mid \overline{X_2}}) \mid X_3$$

Відповідну КС наведено на рис. 2.12, а.

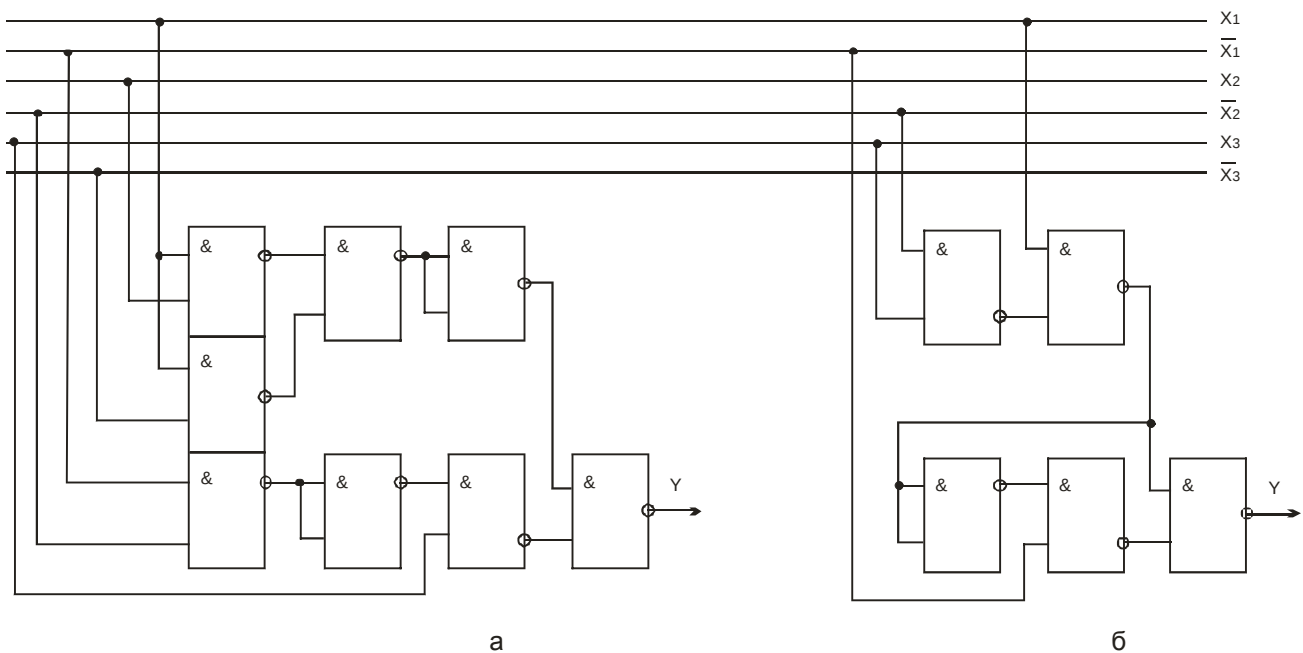


Рис. 2.12

Використовуємо метод каскадів, розкладемо ПФ (2.2) по перемінній X_1 :

$$Y(X_1, X_2, X_3) = [X_1 \mid (X_2 \cup \overline{X_3})] \mid [\overline{X_1} \mid (\overline{X_2} \mid X_3)] = [X_1 \mid (\overline{X_2} \mid X_3)] \mid [\overline{X_1} \mid (\overline{\overline{X_2} \mid X_3})].$$

КС, яка відповідає розкладенню, наведено на рис. 2.12, б.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Справочник по ЦВТ (процессоры и память) / Под ред. Б.Н. Малиновского. – К. Техніка, 1979. – 80 с.

Навчально-методичне видання

Єфимець Валентин Микитович

Зибін Сергій Вікторович

Коженевський Сергій Романович

ПРИКЛАДНА ТЕОРІЯ ЦИФРОВИХ АВТОМАТІВ

Методичні вказівки

до лабораторних робіт

спеціальності 7.091501 «Комп'ютерні системи та мережі»,
7.160102 «Захист інформації з обмеженим доступом та
автоматизація її обробки»; 7.160103 «Системи захисту від
несанкціонованого доступу»; 7.160104 «Адміністративний
менеджмент у сфері захисту інформації з обмеженим
доступом»; 7.160105 «Захист інформації в комп'ютерних
системах та мережах».

Технічний редактор Чирков Д.В.

Коректор Капустян М.В.

Підписано до друку 07.12.2007 р. Формат 64x84/16, папір офсетний

Друк офсетний

Умовн. друк. арк. 1,5. Обл. вид. арк. 1,2

Наклад 300 прим. Замовлення №28/7

Видавництво ДУІКТ

03110, Київ, вул. Солом'янська, 7.

Надруковано видавництвом ДУІКТ.

03110, Київ, вул. Солом'янська, 7.

Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи до Державного реєстру

Серія ДК №2539 від 26.06.2006 р.