

ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ТЕЛЕКОМУНІКАЦІЙ
Кафедра вищої математики



Шевченко С.М., Скубак О.М., Мусієнко А.П.

ОСНОВИ ЕЛЕМЕНТАРНОЇ МАТЕМАТИКИ

НАВЧАЛЬНО-МЕТОДИЧНИЙ ПОСІБНИК

Київ-2015

УДК 51.77

ББК 22.1

Ш 37

Шевченко С.М., Скубак О.М., Мусієнко А.П. Основи елементарної математики. Навчально-методичний посібник. – Київ: ДУТ, 2015. – 72 с.

Схвалено до друку вченою радою Державного університету телекомунікацій (протокол № __ від __ лютого 2015 року)

Рецензенти:

Лозовський Валерій Зіновійович, доктор фізико-математичних наук, професор, завідувач кафедри математики, теоретичної фізики та комп'ютерних технологій інституту високих технологій Київського національного університету імені Тараса Шевченка.

Олешко Тамара Іванівна, доктор технічних наук, професор, завідувач кафедри економічної кібернетики інституту економіки і менеджменту Національного авіаційного університету.

Навчальний посібник містить короткі теоретичні відомості, приклади розв'язання типових завдань та індивідуальні завдання для самостійного вирішення з основних розділів вищої математики.

Теоретичний матеріал надано у доступній формі, що дозволяє проілюструвати основні математичні ідеї і методи, які найбільш часто використовуються при викладанні курсу «Вища математика» у вищих навчальних закладах технічного спрямування.

Зразки вирішення завдань відображають найбільш раціональні методи та способи рішень та допомагають студентам набути практичних навичок для розв'язку багатьох практичних задач з курсу «Вища математика».

© С.М.Шевченко, О.М.Скубак, А.П.Мусієнко, 2015

© Державний університет телекомунікацій

ЗМІСТ

1.	Вступ.....	4
2.	Питання навчальної програми.....	5
3.	Заняття 1. Дроби.....	8
4.	Заняття 2. Відносні числа та дії над ними.....	18
5.	Заняття 3. Алгебраїчні перетворення.....	23
6.	Заняття 4. Степеневі та логарифмічні вирази.....	29
7.	Заняття 5. Розв'язування алгебраїчних рівнянь.....	37
8.	Заняття 6. Раціональні, ірраціональні, показникові та логарифмічні рівняння.....	45
9.	Заняття 7. Нерівності, їх властивості та розв'язування.....	52
10.	Заняття 8. Основні поняття тригонометрії. Тригонометричні перетворення та функції.....	57
11.	Заняття 9. Тригонометричні рівняння.....	67
12.	Література.....	71

ВСТУП

В наш час для досягнення поставлених цілей потрібно навчити вдосконалювати: свої здібності, комунікабельність, фізичний стан, навички уважної розумової творчої праці та використання сучасних інформаційних технологій. Усі ці риси доцільно розвивати якомога раніше.

Організація навчального та виховного процесу у вищих навчальних закладах України сприяє такому розвитку студентів, які бажають одержати ґрунтовні знання з обраної спеціальності, приймають активну участь в наукових дослідженнях, художній самодіяльності, спорті, в громадському житті навчального закладу, міста, держави.

Значну роль у набутті майже усіх вказаних рис грає процес вивчення математичних дисциплін.

Використовувати можливості сучасних інформаційних технологій у різноманітних сферах людської діяльності вдається лише тим фахівцям, які мають навички творчої розумової діяльності і використання можливостей комп'ютерної техніки, володіють математичними знаннями та навичками.

При цьому математика використовується не тільки як засіб побудови і дослідження математичних моделей реальних процесів, інструмент кількісних розрахунків, але і як метод чіткого визначення різних понять, логічного мислення, виявлення об'єктивних закономірностей.

Математика суттєво використовується для засвоєння та застосування багатьох навчальних дисциплін.

Посібник містить короткі теоретичні відомості приклади розв'язання типових завдань та індивідуальні завдання для самостійного вирішення з основних розділів Вищої математики.

Методика і форма викладання матеріалу в посібнику сприяють прикладній спрямованості і якісному засвоєнню навчальної програми дисципліни «Основи елементарної математики».

ПИТАННЯ НАВЧАЛЬНОЇ ПРОГРАМИ

Заняття 1. Дроби

- Правильні та неправильні дроби.
- Приведення неправильних дробів до мішаного числа.
- Приведення мішаного числа до неправильного дробу.
- Порівняння дробів.
- Зведення дробів до спільного знаменника.
- Додавання та віднімання дробів. Властивості цих операцій.
- Множення та ділення дробів. Властивості цих операцій.
- Піднесення дробів до степеня.
- Десяткові дроби та дії над ними: додавання, віднімання, множення та ділення.
- Множення та ділення десятих дробів на число, яке є одиницею з нулями.

Заняття 2. Відносні числа та дії над ними

- Числа зі знаками „+” та „-”.
- Модуль числа.
- Числова вісь. Зображення числа на числовій осі.
- Додавання та віднімання відносних чисел, їх властивості.
- Множення та ділення відносних чисел, їх властивості.
- Піднесення до цілого степеня.
- Порядок обчислення числових виразів та виразів, що містять дужки.
- Ознаки подільності цілих чисел на 2, 3, 4, 5, 9, 25.

Заняття 3. Алгебраїчні перетворення

- Формули скороченого множення.
- Розклад алгебраїчних виразів на множники.
- Алгебраїчні дроби та зведення їх до спільного знаменника.
- Дії на алгебраїчними дробами.
- Спрощення алгебраїчних дробів та обчислення їх значень.

Заняття 4. Степеневі та логарифмічні вирази

– Дії над степеневими виразами: добуток та частка степеневих виразів, піднесення до степеня та вилучення кореня. Вирази з нульовими, від'ємними та раціональними показниками.

– Ірраціональні вирази та їх перетворення.

– Степеневі функції: $y = ax$, $y = ax^2$, $y = ax^3$, $y = \frac{a}{x}$, їх властивості та графіки.

– Поняття логарифмів та їх властивості. Основні логарифмічні тотожності.

– Логарифми добутку, частки, степеня та кореня.

– Основні логарифмічні перетворення. Логарифмічні функції, їх властивості та графіки.

Заняття 5. Розв'язування алгебраїчних рівнянь

– Поняття тотожності та рівняння. Розв'язок рівняння.

– Лінійні рівняння та їх властивості.

– Квадратні рівняння та їх розв'язування.

– Розклад квадратного тричлена на множники. Теорема Вієтта.

– Виділення повного квадрата у квадратному тричлені.

– Рівняння, які зводяться до квадратних.

– Функція $y = ax^2 + bx + c$ та побудова її графіка.

Заняття 6. Раціональні, ірраціональні, показникові та логарифмічні рівняння

– Розв'язування раціональних рівнянь.

– Графік дробово-лінійної функції $y = \frac{ax+b}{cx+d}$.

– Розв'язування ірраціональних рівнянь.

– Розв'язування показникових та логарифмічних рівнянь.

Заняття 7. Нерівності, їх властивості та розв'язки

– Лінійні нерівності, їх властивості.

– Квадратні та раціональні нерівності.

– Нерівності, що містять модулі.

– Показникові та логарифмічні нерівності.

Заняття 8. Основні поняття тригонометрії. Тригонометричні перетворення та функції

- Означення тригонометричних величин: $\sin \alpha$, $\cos \alpha$, $\operatorname{tg} \alpha$, $\operatorname{ctg} \alpha$.
- Основні тригонометричні формули.
- Значення тригонометричних величин в кутах: 0° , 30° , 45° , 60° , 90° .
- Формули зведення.
- Графіки основних тригонометричних функцій, їх перетворення.
- Обернені тригонометричні функції та їх графіки.

Заняття 9. Тригонометричні рівняння

- Найпростіші тригонометричні рівняння та їх розв'язки: $\sin x = a$, $\cos x = a$, $\operatorname{tg} x = a$, $\operatorname{ctg} x = a$.
- Тригонометричні рівняння, що зводяться до розв'язування квадратних рівнянь.

Заняття 10. ЗАЛІК

До заліку повинні бути виконані:

- Домашня робота „Альбом елементарних функцій, їх властивості та графіки”.
- Робочий зошит, що містить аудиторні, домашні завдання та короткий конспект лекцій за програмою.

ЗАНЯТТЯ 1. ДРОБИ

1.1. Дії з простими дробами

Простим дробом називають частину одиниці або кілька рівних частин одиниці. Число, яке вказує на скільки частин поділена одиниця, називають **знаменником** дробу. Число, яке вказує кількість взятих частин поділу називають **чисельником** дробу.

Запис:

$$\frac{3}{7} \text{ або } 3/7,$$

3 – чисельник, 7 – знаменник.

Якщо чисельник менше знаменника, то дріб менше одиниці і зветься **правильним**.

Якщо чисельник дорівнює знаменнику або більше знаменника, то дріб називається **неправильним**.

Наприклад, $\frac{8}{8}$, $\frac{17}{3}$ - неправильні дробу.

Щоб виділити найбільше ціле число, яке містить неправильний дріб, треба:

поділити чисельник на знаменник. Якщо це ділення виконується із залишком, частка дає шукане ціле число, а залишок стає чисельником дробу, знаменник якої залишається без зміни.

Наприклад, якщо чисельник дробу $\frac{53}{5}$ поділити на знаменник, то одержимо частку 10 та залишок 3. Отже,

$$\frac{53}{5} = 10\frac{3}{5}.$$

Число, яке містить цілу та дробову частину, наприклад $10\frac{3}{5}$, зветься **мішаним**.

Іноді треба (наприклад, при множенні дробів) мішане число представити у вигляді неправильного дробу. Для цього треба:

цілу частину мішаного числа помножити на знаменник дробової частини і до цього добутку додати чисельник. Одержане число записати у чисельнику шуканого дробу, а знаменник залишити той самий.

Наприклад,

$$9\frac{3}{5} = \frac{45+3}{5} = \frac{48}{5}.$$

Часто використовують таку властивість дробу

величина дробу не зміниться, якщо його чисельник та знаменник помножити або поділити на однакове число, що не дорівнює нулю.

Наприклад,

$$\frac{4}{9} = \frac{4 \cdot 3}{9 \cdot 3} = \frac{12}{27}; \quad \frac{16}{36} = \frac{16:4}{36:4} = \frac{4}{9}.$$

Дріб можна скорочувати лише тоді, коли чисельник та знаменник мають однакові дільники. Скорочення можна проводити послідовно або відразу на найбільший спільний дільник.

Наприклад, якщо треба скоротити дріб $\frac{108}{144}$, то ознака подільності на 4 дозволяє зробити висновок, що 4 буде спільним дільником чисельника та знаменника. Тому, скорочуючи дріб на 4, одержимо

$$\frac{108}{144} = \frac{108:4}{144:4} = \frac{27}{36}.$$

Числа 27 та 36 мають спільний дільник 9, тому скорочуючи дріб на 9, одержимо

$$\frac{27}{36} = \frac{27:9}{36:9} = \frac{3}{4}.$$

Якщо врахувати, що 36 є найбільшим спільним дільником чисел 108 та 144, то одержимо

$$\frac{108}{144} = \frac{108:36}{144:36} = \frac{3}{4}.$$

Додавання та віднімання дробів

Якщо знаменники дробів однакові, то для їх додавання треба знайти суму їх чисельників, а для віднімання – різницю чисельників.

Одержана сума або різниця буде чисельником, а знаменник залишається тим самим.

Якщо знаменники дробів різні, то спочатку треба привести дробі до спільного знаменника.

Спільним кратним кількох чисел називають число, яке поділяється на кожне з цих чисел.

Наприклад, числа 15, 6, 10 мають спільне кратне 180; Числа 150, 90, 60 також будуть спільними кратними цих чисел.

Серед усіх спільних кратних завжди є найменше.

У розглянутому прикладі найменшим спільним кратним буде число 30.

Для невеликих чисел найменше спільне кратне знаходять шляхом підбору.

У випадку великих чисел треба:

розкласти задані числа на прості множники, потім виписати усі прості множники, які входять хоч би в одне задане число; кожний взятий множник піднести до найбільшого із тих степенів, з якими він входить до заданих чисел, а потім провести множення цих множників.

Приклад.

Для знаходження найменшого спільного кратного чисел 252, 441, 1080 спочатку розкладемо ці числа на множники

$$252 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 7; \quad 441 = 3^2 \cdot 7^2; \quad 1080 = 2^3 \cdot 3^3 \cdot 5.$$

Множники 2 та 3 мають найбільший показник степеня 3, множник 7 має найбільший показник степеня 2, а множник 5 має лише показник степеня 1.

Тому найменшим спільним кратним буде число

$$2^3 \cdot 3^3 \cdot 7^2 \cdot 5 = 8 \cdot 27 \cdot 49 \cdot 5 = 52920.$$

Приклади.

$$1. \quad \frac{3}{8} + \frac{4}{8} = \frac{3+4}{8} = \frac{7}{8};$$

$$2. \quad \frac{5}{7} + \frac{6}{7} = \frac{5+6}{7} = \frac{11}{7} = 1\frac{4}{7};$$

$$3. \quad \frac{3}{8} + \frac{5}{6} - \frac{2}{5} = \frac{45}{120} + \frac{100}{120} - \frac{48}{120} = \frac{97}{120}.$$

Якщо додаються мішані числа, то окремо знаходять суму цілих та дробових частин. Наприклад

$$6\frac{3}{4} + 4\frac{5}{6} = 6 + 4 + \left(\frac{3}{4} + \frac{5}{6}\right) = 10 + \frac{9+10}{12} = 10\frac{19}{12} = 11\frac{7}{12}.$$

При відніманні мішаних чисел дробова частина від'ємника може бути більше дробової частини зменшуваного. Тоді одну цілу одиницю зменшуваного беруть для утворення неправильного дробу.

Приклади.

$$1. \quad 8\frac{1}{4} - 3\frac{1}{3} = 8\frac{3}{12} - 3\frac{4}{12} = 7\frac{15}{12} - 3\frac{4}{12} = 4\frac{11}{12};$$

$$2. \quad 12 - 10\frac{5}{9} = 11\frac{9}{9} - 10\frac{5}{9} = 1\frac{4}{9}.$$

Множення дробів

Щоб помножити дріб на дріб, треба знайти добуток їх чисельників і записати його у чисельник, знайти добуток знаменників і записати його у знаменник. Якщо серед співмножників є мішані числа, то їх спочатку треба перетворити у неправильний дріб.

Якщо чисельник та знаменник дробу мають спільний множник, то дріб доцільно скоротити на цей множник до виконання операції множення.

Приклади.

$$1. \quad \frac{3}{7} \cdot \frac{2}{5} = \frac{3 \cdot 2}{7 \cdot 5} = \frac{6}{35};$$

$$2. \quad \frac{5}{8} \cdot 7 = \frac{5 \cdot 7}{8 \cdot 1} = \frac{35}{8} = 4\frac{3}{8};$$

$$3. \quad 2\frac{1}{12} \cdot 3\frac{7}{20} = \frac{25}{12} \cdot \frac{67}{20} = \frac{5}{4} \cdot \frac{67}{12} = \frac{335}{48} = 6\frac{47}{48};$$

(скоротили 25 та 20 на 5);

$$4. \quad 4\frac{1}{2} \cdot \frac{4}{27} \cdot 4\frac{2}{3} = \frac{9}{2} \cdot \frac{4}{7} \cdot \frac{14}{3} = 3 \cdot 2 \cdot 2 = 12;$$

(скоротили 9 та 3 на 3; 4 та 2 на 2; 14 та 7 на 7).

Ділення дробів

Щоб поділити будь-яке число на дріб, треба помножити це число на дріб, який обернений до дільника.

Приклади.

$$1. \quad \frac{2}{3} : \frac{7}{15} = \frac{2}{3} \cdot \frac{15}{7} = \frac{30}{21} = \frac{10}{7} = 1\frac{3}{7}.$$

Відмітимо, що обернений дріб до дільника $\frac{7}{15}$ є дріб $\frac{15}{7}$.

$$2. \quad 3\frac{1}{5} : 1\frac{2}{5} = \frac{16}{5} : \frac{7}{5} = \frac{16}{6} \cdot \frac{5}{7} = \frac{16}{7} = 2\frac{2}{7}.$$

1.2. Дії з десятковими дробами

У багатьох випадках дії з простими дробами стають громіздкими в силу необхідності приведення їх до спільного знаменника. Якщо дроби десяткові, то їх не треба зводити до спільного знаменника і тому з ними легше оперувати.

При записі числа з використанням десяткових дробів спочатку записують цілу частину числа, справа від неї ставлять кому; перша цифра після коми означає число десятих, друга цифра – число сотих, третя цифра – число тисячних і т. д. Наприклад, 6, 207 – шість цілих, дві десятих та сім тисячних, тобто

$$6,207 = 6 + \frac{2}{10} + \frac{7}{1000}.$$

Властивості десяткових дробів

1. Десятковий дріб не зміниться, якщо до нього додати або відкинути декілька нулів справа.

Наприклад,

$$15,6 = 15,60 = 15,600 = 15,6000\dots,$$

$$0,00720 = 0,0072; \quad 0,3700 = 0,37;$$

2. Десятковий дріб зростає в 10, 100, 1000 і т.д. раз, якщо кому перенести на одну, дві, три і т.д. цифри вправо.

Наприклад, число 12,067 зростає в 100 раз, якщо запишемо 1206,7.

3. Десятковий дріб зменшується в 10, 100, 1000 і т.д. раз, якщо кому перенести вліво на один, два, три і т.д. знаки.

Наприклад, число 185,23 зменшується у 10 раз, якщо записати 18,523.

Властивості 2 та 3 дозволяють швидко виконувати операції множення та ділення на числа 10, 100, 1000 і т.д.

Приклади.

$$18,06 \cdot 100 = 1806; \quad 18,06 \cdot 1000 = 180600;$$

$$24,06 : 10 = 2,406; \quad 24,06 : 1000 = 0,02406.$$

Додавання та віднімання десяткових дробів виконується так само, як додавання та віднімання цілих чисел; треба лише записувати кожен розряд під розрядом з однаковою назвою.

Наприклад,

$$\begin{array}{r} 3,7 \\ + 0,04 \\ \hline 13,821 \\ \hline 17,561 \end{array}$$

Множення десяткових дробів здійснюють як множення цілих чисел, не звертаючи увагу на коми. Потім ставимо кому у результаті множення, керуючись правилом.

У добутку кількість знаків після коми дорівнює сумі кількості знаків після коми в усіх співмножниках.

Приклади.

1. Знайти добуток $20,64 \cdot 0,5$.

Помножимо цілі числа $2064 \cdot 5 = 10320$. У першому співмножнику було два знаки після коми, у другому після коми був один знак. Отже, у добутку після коми повинно бути $2+1=3$ знаки. Відділимо ці три знаки справа і одержимо 10,320. Нуль у кінці дробу можна відкинути. Таким чином, $20,64 \cdot 0,5 = 10,32$.

2. Знайти добуток $1,125 \cdot 0,08$.

Помножимо цілі числа $1125 \cdot 8 = 9000$. Число знаків після коми повинно бути $3+2=5$. Допишемо до 9000 нулі зліва, тоді одержимо 009000. Тепер відділимо комою справа п'ять знаків і одержимо $0,09000 = 0,09$. Таким чином, $1,125 \cdot 0,08 = 0,09$.

Ділення десяткового дробу на ціле число

Розглянемо два випадки.

Випадок 1.

Якщо ділене менше дільника, тоді у цілій частині частки пишемо нуль і після нього ставимо кому.

Потім, не звертаючи уваги на кому, приєднуємо до цілої частини діленого першу цифру його дробової частини. Якщо одержуємо число менше дільника, то після коми у частці пишемо нуль і приєднуємо ще одну цифру діленого. Якщо і після цього одержимо число менше дільника, то до частки додаємо ще один нуль і т.д., до тих пір, поки не одержимо числа більшого дільника. Далі ділення виконується так саме, як ділення з цілими числами.

Відмітимо, що ділене можна скільки завгодно розширювати вправо від коми, дописуючи в кінці нулі. Іноді процес ділення зупиняють на деякому знаку і одержують наближений результат.

Приклади.

1. $10,28 : 64$

Запис:

$$\begin{array}{r|l} 10,28 & 64 \\ \hline 64 & 0,160625 \\ \hline 388 & \\ \hline 384 & \\ \hline 400 & \\ \hline 384 & \\ \hline 160 & \\ \hline 128 & \\ \hline 320 & \\ \hline 320 & \end{array}$$

У даному випадку число 102, яке більше дільника 64, одержали після приєднання першої цифри 2 дробової частини діленого. Тому у частці замість цілої частини записано 0 і кома стоїть одразу після нього.

Таким чином,

$$10,28 : 64 = 0,160625.$$

2. $0,48 : 75$

Запис:

$$\begin{array}{r|l} 0,480 & 75 \\ \hline 450 & 0,0064 \\ \hline 300 & \\ \hline 300 & \end{array}$$

У даному випадку після приєднання до цілої частини першої цифри 4 дробової частини одержимо число 4, яке менше дільника 75. Тому у частці після коми пишемо 0. Після приєднання другої цифри одержимо

число 48, яке знову менше дільника 75, тому у частці після коми треба записати другий нуль. Отже, $0,48 : 75 = 0,0064$.

Випадок 2.

Якщо ділене більше дільника, то спочатку поділяють цілу частину діленого. Результат ділення записують у частку і ставлять кому. Після цього ділення продовжують як і в першому випадку.

Приклад.

$$542,8 : 16$$

Запис:

$$\begin{array}{r|l} 542,8 & 16 \\ \hline 48 & 33,925 \\ \hline 62 & \\ \hline 48 & \\ \hline 148 & \\ \hline 144 & \\ \hline 40 & \\ \hline 32 & \\ \hline 80 & \\ \hline 80 & \end{array}$$

Ділення цілої частини діленого дає частку 33 та залишок 14. Після числа 33 ставимо кому, а потім до залишку приєднуємо наступну цифру 8. Одержане число 148 ділимо на 16; одержуємо 9 – першу цифру після коми і т.д. Отже, $542,8 : 16 = 33,925$.

Ділення десяткового дробу на десятковий дріб

Щоб поділити десятковий дріб або ціле число на десятковий дріб треба відкинути кому у дільнику, а в діленому перенести кому право на стільки знаків, скільки їх було у дробовій частині дільника (при необхідності до діленого справа дописують нулі). Після цього виконують ділення так, як ділення десяткового дробу на ціле число.

Приклад.

$$0,04567 : 0,0012$$

Запис:

$$\begin{array}{r|l} 456,7 & 12 \\ \hline 36 & 38,0583 \\ \hline 96 & \\ \hline 96 & \\ \hline 70 & \\ \hline 60 & \\ \hline 100 & \\ \hline 96 & \\ \hline 40 & \\ \hline 36 & \\ \hline 4 & \end{array}$$

У дробовій частині дільника 4 знаки, тому в діленому переносимо кому вправо на 4 знаки і одержуємо 456,7. Ділимо на 12. Отже, з точністю до 5 знака одержимо $0,04567 : 0,0012 \approx 38,0583$.

Вправи до заняття 1.

1. Знайти найменше спільне кратне заданих чисел

а) 882, 126, 360; б) 36, 63, 216;

в) 2646, 216, 360; г) 242, 108, 27.

Відповіді: а) 17640; б) 1512; в) 52920; г) 13068.

2. Обчислити усно

$$\frac{1}{9} + \frac{4}{9}; \quad \frac{3}{8} - \frac{4}{8}; \quad 6 + \frac{3}{4}; \quad \frac{1}{7} + \frac{1}{2} - \frac{4}{7}; \quad 2 + 3\frac{1}{12} - \frac{1}{12} + 1\frac{5}{12}.$$

Відповіді: $\frac{5}{9}$; $-\frac{1}{8}$; $6\frac{3}{4}$; $-\frac{1}{7}$; $6\frac{5}{12}$.

3. Наступні дроби привести до найменшого спільного знаменника

а) $\frac{2}{3}, \frac{1}{4}$ та $\frac{7}{12}$; б) $\frac{1}{8}, \frac{3}{20}$ та $\frac{7}{40}$; в) $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{5}{8}$ та $\frac{9}{16}$; г) $\frac{2}{5}, \frac{1}{3}$ та $\frac{3}{8}$.

Відповіді:

а) $\frac{8}{12}, \frac{3}{12}, \frac{7}{12}$; б) $\frac{5}{40}, \frac{6}{40}, \frac{7}{40}$; в) $\frac{8}{16}, \frac{12}{16}, \frac{10}{16}, \frac{9}{16}$; г) $\frac{48}{120}, \frac{40}{120}, \frac{45}{120}$.

4. Обчислити

а) $\frac{1}{4} - \frac{1}{7}$; б) $\frac{3}{4} - \frac{1}{2}$; в) $\frac{13}{15} - \frac{3}{5}$; г) $\frac{25}{42} - \frac{33}{56}$.

Відповіді: а) $\frac{3}{28}$; б) $\frac{1}{4}$; в) $\frac{4}{15}$; г) $\frac{1}{168}$.

5. Обчислити

а) $10\frac{5}{6} + 5\frac{1}{3} - 2\frac{1}{6}$; б) $4\frac{5}{12} + 13\frac{4}{5} - 5\frac{5}{6}$;

в) $12\frac{3}{4} - 6\frac{7}{8} + 4\frac{1}{2} - 1\frac{2}{3}$; г) $\frac{13}{84} - \frac{4}{35} + \frac{11}{70} - \frac{7}{60}$.

Відповіді: а) 14; б) $12\frac{23}{60}$; в) $8\frac{17}{24}$; г) $\frac{17}{210}$.

6. Обчислити

а) $\left(\frac{4}{5} + \frac{1}{6}\right) \cdot \left(23\frac{2}{3} - 15\frac{5}{9}\right) \cdot \frac{45}{58}$; б) $\left(5\frac{7}{12} - 3\frac{17}{36}\right) \cdot 2\frac{1}{2} + 4\frac{1}{3} \cdot \frac{3}{26} + \frac{1}{2}$.

Відповіді: а) $6\frac{1}{12}$; б) $6\frac{5}{18}$.

7. Виконати вказані дії

а) $0,091 \cdot 100 + 6 \cdot 15 - 0,12 \cdot 8 \cdot 5$;

б) $0,6 + 0,25 - 0,125 \cdot 3,2 + 4,5 : 100$;

в) $12,5 : 100 + 7,5 \cdot 0,06 + 3,24 - 4 : 10$;

г) $12 \cdot 0,15 + 12 : 100 \cdot 1,25 - 0,24$.

Відповіді: а) 94; б) 2,365; в) 24,475; г) 0.

8. Обчислити

а) $\frac{20,15 - 6,05 + 6,3}{0,2 + 11,8 \cdot 0,5}$; б) $\frac{11,69 + 9,3 - 12,79 \cdot 0,9}{36}$;

в) $\frac{2,35 + 4,65 \cdot 5,3}{40 - 2,9}$; г) $\frac{7,63 - 5,13 \cdot 0,4}{3,17 + 6,83}$.

Відповіді: а) 3,4; б) 0,205; в) 1; г) 0,1.

ЗАНЯТТЯ 2. ВІДНОСНІ ЧИСЛА ТА ДІЇ НАД НИМИ

2.1. Від'ємні цілі числа. Модуль числа

Поняття від'ємного числа з'являється при відніманні цілих невід'ємних чисел.

Приклад.

1. Від числа 7 відрахуємо вліво 4 числа і одержимо 3:

$$\begin{array}{ccccccccccc} 0, & 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6, & 7, & 8, & 9, & \dots \\ & & & & \uparrow & \text{-----} & \downarrow & & & & \\ & & & & & 7-4=3. & & & & & \end{array}$$

2. Від числа 7 відрахуємо вліво 7 чисел і одержимо 0:

$$\begin{array}{ccccccccccc} 0, & 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6, & 7, & 8, & 9, & \dots \\ & & & & \uparrow & \text{-----} & \downarrow & & & & \\ & & & & & 7-7=0. & & & & & \end{array}$$

3. Відрахувати в ряду невід'ємних чисел від числа 7 вліво 9 чисел неможливо. Щоб дія $7-9$ виконалась необхідно розширити ряд невід'ємних чисел. Для цього запишемо вліво від нуля по порядку числа 1,2,3, ... добавивши до кожного з них знак мінус (-), який означає, що число стоїть зліва від нуля.

Ці числа читаються так: „мінус один”, „мінус два”, „мінус три” і т.д.:

$$\dots, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots$$

Справа від числа 0 розташовані натуральні числа, які називають цілими додатними числами.

Зліва від знака 0 розташовані цілі від'ємні числа.

Модуль (абсолютне значення) числа **a** позначають **|a|** і визначають так:

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{якщо } a \geq 0; \\ -a, & \text{якщо } a < 0. \end{cases}$$

Словами:

модуль невід'ємного числа дорівнює самому числу;

модуль від'ємного числа є це число з протилежним знаком.

Наприклад, $|0|=0$, $|7|=7$, $|-8|=-(-8)=8$.

Властивості модуля:

$$|-a| = |a|; \quad |a|^2 = a^2; \quad |a \cdot b| = |a| \cdot |b|; \quad \left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|};$$

$$|a + b| = |a| + |b|; \quad |a - b| \geq |a| - |b|.$$

Наприклад,

$$|8 \cdot (-7)| = |8| \cdot |-7| = 8 \cdot 7 = 56;$$

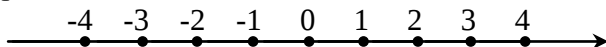
$$|-5 + 8| \leq |-5| + |8| = 5 + 8 = 13;$$

$$|8 - 5| \geq |8| - |5| = 8 - 5 = 3;$$

$$|-5 - 8| \geq |-5| - |8| = 5 - 8 = -3.$$

2.2. Числова вісь. Зображення числа на числовій осі

Задамо пряму, на якій визначимо (стрілочкою) напрям, який називається додатнім, точку 0, яка називається початковою. Задамо одиничний відрізок.



Тим самим ми задамо числову вісь.

Числова вісь ділиться точкою 0 на два промені: додатній, який направлений вправо від точки 0, другий від'ємний, направлений вліво від точки 0.

Довільне число зображається точкою на числовій осі, відстань від якої до точки 0 дорівнює модулю цього числа.

2.3. Дії над відносними числами

При додаванні чисел *однакових знаків*, необхідно знайти суму їх модулів і поставити перед сумою знак доданків.

Наприклад,

$$7 + 9 = +(7 + 9) = +16 = 16,$$

$$(-6) + (-8) = -(6 + 8) = -14.$$

При додаванні двох чисел *різних знаків*, необхідно із більшого модуля відняти менший модуль і перед різницею поставити знак доданка, що має більший модуль.

Наприклад,

$$(7 + (-20)) = -(20 - 17) = -3, \text{ оскільки } |-20| > |17|;$$

$$-2 + 1 = -(2 - 1) = -1, \text{ оскільки } |-2| > |1|.$$

Різницею чисел a і b називається таке число $a-b$, сума якого з числом b дорівнює a :

$$(a-b) + b = a.$$

Таким чином, щоб з одного числа відняти інше, потрібно до зменшуваного додати число, протилежне від'ємнику:

$$a - b = a + (-b).$$

Наприклад,

$$(-3) - (-5) = (-3) + 5 = +(5-3) = 2;$$

$$2-7 = 2 + (-7) = - (7-2) = -5;$$

$$(-7) - 2 = (-7) + (-2) = - (7+2) = -9.$$

Добутком двох чисел називається добуток їх модулів, взятий зі знаком плюс (+), якщо ці числа одного знаку, і зі знаком мінус (-), якщо числа різних знаків.

Наприклад,

$$7 \cdot (-3) = - (7 \cdot 3) = -21;$$

$$-5 \cdot (-10) = 5 \cdot 10 = 50;$$

$$8 \cdot 6 = 48.$$

Добуток числа на нуль дорівнює нулю: $a \cdot 0 = 0 \cdot a = a$.

При діленні двох чисел необхідно поділити їх модулі і перед результатом поставити знак плюс (+), якщо числа одного знаку, та знак мінус (-), якщо числа різних знаків.

Наприклад,

$$40:8 = 5;$$

$$(-20):(-5) = +(20:5) = 4;$$

$$8:(-2) = -(8:2) = -4;$$

$$(-12):3 = -(12:3) = -4.$$

2.4. Піднесення до цілого степеня

Степенем числа a з натуральним показником n називається число a^n , яке визначається наступним чином:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ разів}}$$

При цьому, якщо $n=1$, то права частина цієї рівності дорівнює a :

$$a^1 = a.$$

Наприклад, $3^4 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 81$, $2^6 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 64$.

2.5. Порядок обчислення числових виразів, що містять дужки.

При обчисленні числових виразів, що містять дужки, спочатку виконуються дії в дужках, після цього виконують множення та ділення, а потім додавання та віднімання чисел.

Наприклад, $(2 + 3 \cdot 7) + 3 \cdot 8 - 24 = (2 + 21) + 3 \cdot 8 - 24 = 23 + 3 \cdot 8 - 24 = 23 + 24 - 24 = 23$.

2.6. Ознаки подільності на 2, 4, 8, 3, 9, 6, 5, 25

Ознака подільності на 2.

Число поділяється на 2, якщо його остання цифра парна або нуль.

Наприклад, 54638, 2350.

Ознака подільності на 4.

Число поділяється на 4, якщо дві останні цифри є нулі або утворюють число, що поділяється на 4.

Наприклад, 21700, 13508.

Ознака подільності на 8.

Число поділяється на 8, якщо три останні цифри нулі або утворюють число, що поділяється на 8.

Наприклад, 130000, 112120.

Ознака подільності на 3 та 9.

На 3 (на 9) поділяється лише такі числа, в яких сума цифр поділяється на 3 (на 9).

Наприклад, 17835 поділяється на 3; 52632 поділяється на 9 та на 3.

Ознака подільності на 6.

Число поділяється на 6, якщо воно одночасно поділяється на 2 та на 3.

Наприклад, 126, 2724.

Ознака подільності на 5.

На 5 поділяються числа, остання цифра яких 0 або 5.

Наприклад, 375, 7010.

Ознака подільності на 25.

На 25 поділяються числа, дві останні цифри яких два нулі, 25, 50 або 75.

Наприклад, 3700, 3125, 750, 3875.

Вправи до заняття 2.

Обчислити:

1. $\frac{4 - 6,35 : 6,5 + 9,9}{\left(1,2 : 36 + 1,2 : 0,25 - 1\frac{5}{16}\right) : \frac{169}{24}};$
2. $\left(\left(\frac{7}{9} - \frac{47}{72}\right) : 1,25 + \frac{7}{40}\right) : 0,358 - 0,108 : 1,6 - \frac{19}{25};$
3. $\frac{\left(0,5 : 1,25 + \frac{7}{5} : 1\frac{4}{7} - \frac{3}{11}\right) \cdot 3}{\left(1,5 + \frac{1}{4}\right) : 18\frac{1}{3}};$
4. $\left(\frac{2,7 - 0,8 : 2\frac{1}{3}}{5,2 - 1,4 : 370} + 0,125\right) : 2\frac{1}{2} + 0,43;$
5. $3\frac{1}{5} : \left(\left(1\frac{1}{4} + 2,5\right) \cdot 3,2\right) + \left(4,25 : \left(4\frac{1}{4} \left(5,25 - 1\frac{1}{2}\right)\right)\right) \cdot 2;$
6. $\frac{0,1624 : 4,8 - 4,505^2 + 125 \cdot 0,75}{\left(0,44^2 : 0,88 + 3,53^2 - 2,75^2\right) : 0,52}.$

ЗАНЯТТЯ 3. АЛГЕБРАЇЧНІ ПЕРЕТВОРЕННЯ

3.1. Формули скороченого множення

Тотожні перетворення з базою алгебри. В них використовують дії із степенями та слідуючи формули скороченого множення.

$$a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2;$$

$$a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2;$$

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b);$$

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3;$$

$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3;$$

$$a^2 + b^2 = (a + b)^2 - ab + b^2;$$

$$a^2 - b^2 = (a - b)^2 + ab + b^2.$$

Наприклад, виконати дії

$$\begin{aligned} & \left(\frac{a^2}{a+b} - \frac{a^3}{a^2+2ab+b^2} \right) : \left(\frac{a}{a+b} - \frac{a^2}{a^2-b^2} \right) = \\ & = \left(\frac{a^2}{a+b} - \frac{a^3}{(a+b)^2} \right) : \left(\frac{a}{a+b} - \frac{a^2}{(a-b)(a+b)} \right) = \\ & = \frac{a^2(a+b) - a^3}{(a+b)^2} : \frac{a(a-b) - a^2}{(a-b)(a+b)} = \frac{a^3 + a^2b - a^3}{(a+b)^2} : \frac{a^2 - ab - a^2}{(a-b)(a+b)} = \\ & = \frac{a^2b}{(a+b)^2} \cdot \frac{(a-b)(a+b)}{-ab} = - \frac{a(a-b)}{a+b} = \frac{a(b-a)}{a+b}. \end{aligned}$$

3.2. Розклад алгебраїчних виразів на множники

Сукупність чисел, позначених буквами або цифрами і об'єднаних знаками дій, називають алгебраїчним виразом.

$$\text{Наприклад, } \frac{a+3}{b+4}; 3m^2n; 9p^2+q^2; a; 13+18 \cdot 7.$$

Розкласти алгебраїчний вираз на множники – це значить представити у вигляді добутку алгебраїчних виразів, тотожному даному виразу.

Основні методи розкладу алгебраїчних виразів на множники:

1. Винесення за дужки спільного множника.

Для того, щоб розкласти алгебраїчний вираз на множники винесенням за дужки спільний множник, необхідно:

1. Визначити цей множник;
2. Розкласти на нього усі доданки;
3. Записати добуток спільного множника на отриману частку, взявши частку в дужки.

Наприклад, $2ax^3 - 4a^2x^2 = 2ax^2 (x - 2a)$.

2. Спосіб групування.

Як здійснюється даний спосіб проілюструємо на прикладі.

Приклад. Розкласти на множники $3a - 3b + ax + bx$. Спільного множника усі члени виразу не мають, але якщо згрупувати усі члени даного виразу по два в порядку запису, то одержимо

$$(3a - 3b) + (ax + bx).$$

У перших дужках винесемо множник 3, а в другій – x.

Одержимо:

$$3(a - b) + x(a + b).$$

У даному виразі спільним множником буде $(a - b)$. Тобто маємо:

$$3a - 3b + ax + bx = (a - b)(3 + x).$$

3.4. Розклад на множники за формулами скороченого множення

Даний спосіб заключається в застосуванні формул скороченого множення, які слід читати не тільки зліва направо, а й справа наліво.

Наприклад,

$$(x + y)^2 - (x - y)^2 = (x + y + x - y)(x + y - x + y) = 2x \cdot 2y = 4xy;$$

$$-6a - a^2 - 9 = -(a^2 + 6a + 9) = -(a + 3)^2;$$

$$m^2 + n^2 - 2mn = (m - n)^2;$$

$$125m^3 - 75m^2n + 15mn^2 - n^3 = (5m - n)^3;$$

$$x^3 + 8y^3 = (x + 2y)(x^2 - 2xy + 4y^2);$$

$$125a^2 - \frac{1}{64}b^6 = \left(5a - \frac{1}{4}b^2\right)\left(25a^2 + 1\frac{1}{4}ab^2 + \frac{1}{16}b^4\right).$$

3.5. Застосування різних способів розкладу на множники

При розкладі алгебраїчних виразів на множники часто використовують декілька прийомів.

У кожному окремому випадку необхідно попередньо вивчити склад даного виразу, а потім визначити прийом розкладу його на множники.

3.6. Алгебраїчні дроби та зведення їх до спільного знаменника

Алгебраїчний вираз називається дробовим, якщо серед вказаних у ньому дій міститься ділення на буквенний вираз.

Наприклад,

$$\frac{3ax}{a+x}; \quad 2a - \frac{1}{a^2}; \quad \frac{a - \frac{1}{b}}{b - \frac{1}{a}}.$$

Зведення алгебраїчних дробів до спільного знаменника виконується таким же чином, як і в арифметиці.

Найпростішим спільним знаменником дробів з одночленними знаменниками являється найменше спільне кратне (НСК) коефіцієнтів знаменників (якщо вони – натуральні числа) помножене на усі різні букви, що входять у знаменники, причому кожную букву беруть із найбільшим показником, з яким вона входить у знаменники.

Наприклад,

НСК дробів:

$$\frac{5x}{ab}; \quad \frac{2y}{3a^2b}; \quad -\frac{1}{2a^2b^2}$$

дорівнює $6a^2b^2$.

Додаткові множники наступні:

$$6a^2b^2 : ab = 6ab;$$

$$6a^2b^2 : 3a^2b = 2b;$$

$$6a^2b^2 : 2a^2b^2 = 3.$$

Тоді маємо:

$$\begin{aligned} \frac{5x}{ab} &= \frac{5x \cdot 6ab}{ab \cdot 6ab} = \frac{30xab}{6a^2b^2}; & \frac{2y}{3a^2b} &= \frac{2y \cdot 2b}{3a^2b \cdot 2b} = \frac{4yb}{6a^2b^2}; \\ -\frac{1}{2a^2b^2} &= -\frac{1 \cdot 3}{2a^2b^2 \cdot 3} = -\frac{3}{6a^2b^2}. \end{aligned}$$

Для обчислення найменшого спільного знаменника дробів із многочленними знаменниками спочатку необхідно розкласти їх на множники.

Наприклад.

Привести до спільного знаменника алгебраїчні дробу.

$$\frac{m+n}{2m-2n} \text{ та } \frac{m^2+n^2}{m^2-n^2}.$$

$$2m-2n = 2(m-n), \quad m^2-n^2 = (m-n)(m+n).$$

Тоді,

$$\begin{aligned} \frac{m+n}{2m-2n} &= \frac{m+n}{2(m-n)} = \frac{(m+n)(m+n)}{2(m-n)(m+n)} = \frac{m^2+2mn+n^2}{2m^2-2n^2}; \\ \frac{m^2+n^2}{m^2-n^2} &= \frac{(m^2+n^2) \cdot 2}{(m^2-n^2) \cdot 2} = \frac{2m^2+2n^2}{2m^2-2n^2}. \end{aligned}$$

3.7. Дії над алгебраїчними дробами

1. Додавання та віднімання.

При додаванні (відніманні) алгебраїчних дробів з однаковим знаменником необхідно додати (відняти) їх чисельники, а результат розділити на спільний знаменник.

Наприклад.

$$\text{Скласти } \frac{a}{2x^2}; \quad \frac{1}{2x^2} \text{ та } \frac{a-5}{2x^2}.$$

$$\frac{a}{2x^2} + \frac{1}{2x^2} + \frac{a-5}{2x^2} = \frac{a+1+a-5}{2x^2} = \frac{2a-4}{2x^2} = \frac{a-2}{x^2}.$$

При додаванні (відніманні) дробів з різними знаменниками необхідно привести їх до спільного знаменника, скласти (відняти) чисельники і результат розділити на їх спільний знаменник..

Наприклад.

Спростити:

$$\frac{a-1}{a^2+2a+1} - \frac{a+1}{a^2-2a+1} - \frac{1}{a^2-1}.$$

Розкладемо знаменники на множники

$$a^2+2a+1 = (a+1)^2, \quad a^2-2a+1 = (a-1)^2, \quad a^2-1 = (a-1)(a+1).$$

Спільний знаменник дорівнює $(a+1)^2(a-1)^2$. Тоді

$$\begin{aligned}
 & \frac{a-1}{a^2+2a+1} - \frac{a+1}{a^2-2a+1} - \frac{1}{a^2-1} = \frac{a-1}{(a+1)^2} - \frac{a+1}{(a-1)^2} - \frac{1}{(a+1)^2(a-1)^2} \\
 & = \frac{(a-1)(a-1)^2 - (a+1)(a+1)^2 - (a+1)^2(a-1)^2}{(a+1)^2(a-1)^2} \\
 & = \frac{a^3 - 3a^2 + 3a - 1 - a^3 - 3a^2 - 3a + 1 - a^2 - 1}{(a^2-1)^2} \\
 & = \frac{a^3 - 3a^2 + 3a - 1 - a^3 - 3a^2 - 3a + 1 - a^2 - 1}{(a^2-1)^2} = \frac{-7a^2 - 1}{(a^2-1)^2}.
 \end{aligned}$$

2. Множення, ділення дробів.

При множенні дробів необхідно перемножити їх чисельники та знаменники.

При діленні дробу на дріб необхідно ділене помножити на дріб обернений дільнику.

Наприклад,

$$\begin{aligned}
 \frac{3p^2mq}{2a^2b^2} \cdot \frac{3abc}{8pq} &= \frac{3p^2mq \cdot 3abc}{2a^2b^2 \cdot 8pq} = \frac{9pmc}{16ab}, \\
 \frac{8b^2cd}{9a^5} : \frac{7cd}{12a^3} &= \frac{8b^2cd}{9a^5} \cdot \frac{12a^3}{7cd} = \frac{8b^2cd \cdot 12a^3}{9a^5 \cdot 7cd} = \frac{32b^2}{21a^2}.
 \end{aligned}$$

Вправи до заняття 3

Виконати дії.

1. $\left(\frac{a}{a+1} + 1\right) : \left(1 - \frac{3a^2}{1-a^2}\right).$
2. $\left(\frac{3a}{1-3a} + \frac{2a}{3a-1}\right) : \frac{2a+6a^2}{1-6a+9a^2}.$
3. $\left(\frac{5a}{a+x} + \frac{5x}{a-x} + \frac{10ax}{a^2-x^2}\right) \cdot \left(\frac{a}{a+x} + \frac{x}{a-x} - \frac{2ax}{a^2-x^2}\right).$
4. $\left(\frac{b}{a+b} - \frac{2}{a+b} + \frac{a}{b+a}\right) : \left(\frac{b}{a} - 2 + \frac{a}{b}\right).$

5. $\left(\frac{x^2}{y^2} + \frac{y}{x}\right) : \left(\frac{x}{y^2} - \frac{1}{y} + \frac{1}{x}\right).$
6. $\left(1 + \frac{a}{x} + \frac{a^2}{x^2}\right) \cdot \left(1 - \frac{a}{x}\right) \cdot \frac{x^3}{a^3 - x^3}.$
7. $\left(\frac{x}{x-a} - \frac{a}{x+a}\right) : \left(\frac{x+a}{a} - \frac{x-a}{x}\right).$
8. $\left(\frac{a^2 + b^2}{a} + b\right) : \left(\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right) \frac{a^3 - b^3}{a^2 + b^2}\right).$
9. $\left(\frac{a-1}{3a+1} - \frac{1-3a+a^2}{a^3-1} - \frac{1}{a-1}\right) : \frac{a^2+1}{1-a}.$
10. $\left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{2}{x+y} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)\right) : \frac{x^3+y^3}{x^2y^2}.$

Відповіді до вправ заняття 3

1. $\frac{1-a}{1-2a}.$
2. $\frac{1-3a}{2+3a}.$
3. 5.
4. $\frac{1}{a+b}.$
5. $x+y.$
6. -1.
7. $\frac{ax}{x^2-a^2}.$
8. $\frac{ab^2}{a-b}.$
9. $\frac{1}{a^2+a+1}$
10. $\frac{x+y}{x^2-xy+y^2}.$

ЗАНЯТТЯ 4. СТЕПЕНЕВІ ТА ЛОГАРИФМІЧНІ ВИРАЗИ

4.1. Дії над степеневими виразами

Властивості степенів:

1. Будь-яке число в нульовому степені дорівнює 1:

$$a^0 = 1.$$

Наприклад, $3^0 = 1$, $\left(\frac{1}{2}\right)^0 = 1$, $5^0 = 1$.

2. При множенні чисел з однаковою основою показники степенів додаються

$$a^x \cdot a^y = a^{x+y}.$$

Наприклад, $2^3 \cdot 2^4 = 2^{3+4} = 2^7$; $4^6 \cdot 4^9 = 4^{15}$.

3. При діленні чисел з однаковою основою показники степенів віднімаються:

$$a^x : a^y = a^{x-y}.$$

Наприклад, $4^5 : 4^3 = 4^{5-3} = 4^2$; $5^4 : 5^3 = 5^{4-3} = 5$.

4. При піднесенні до степеня показники степенів перемножуються:

$$(a^x)^y = a^{xy}.$$

Наприклад, $(5^2)^3 = 5^6$; $\left(\left(-\frac{1}{3}\right)^2\right)^4 = \left(-\frac{1}{3}\right)^8$.

5. При добуванні кореня показники степенів діляться:

$$\sqrt[x]{a^y} = a^{\frac{y}{x}}.$$

Наприклад, $\sqrt[3]{2^3} = 2^{\frac{3}{3}} = 2$; $\sqrt[4]{2^5} = 2^{\frac{5}{4}}$.

6. Степінь добутку двох множників дорівнює добутку степенів кожного множника:

$$(a \cdot b)^x = a^x \cdot b^x.$$

Наприклад, $(3 \cdot 4)^5 = 3^5 \cdot 4^5$; $\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2$.

7. Степінь частки дорівнює частці від ділення степеня чисельника на степінь знаменника:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}.$$

Наприклад, $\left(\frac{3}{2}\right)^4 = \frac{3^4}{2^4}$; $\left(-\frac{3}{5}\right)^3 = \frac{-3^3}{5^3}$.

8. Степінь числа $a \neq 0$ з від'ємним показником степеня a^{-x} визначається так:

$$a^{-x} = \frac{1}{a^x}.$$

Наприклад, $3^{-4} = \frac{1}{3^4}$; $\left(\frac{3}{2}\right)^{-3} = \left(\frac{2}{3}\right)^3$.

4.2. Ірраціональні вирази та їх перетворення

Ірраціональні вирази – це алгебраїчні вирази, які крім додавання, віднімання, множення ділення та піднесення до степеня містять дію добування кореня n-того порядку.

Наприклад,

$$\sqrt{2,5a}, \quad c^2 d^5 \sqrt{m-n}, \quad \frac{a}{\sqrt[3]{c}} + \sqrt{3}.$$

Ірраціональні вирази у вигляді кореня деякого порядку називають також радикалами.

Основна властивість радикала

Значення радикала не зміниться, якщо показник кореня і показник підкореневого виразу помножити на одне і теж саме число, тобто

$$\sqrt[m]{a^n} = \sqrt[m \cdot p]{a^{n \cdot p}}.$$

Дії з радикалами

1. Додавання та віднімання.

Для того, щоб додати (відняти) радикали, їх об'єднують знаками плюс (мінус) і приводять подібні члени, якщо вони виявляться.

Наприклад. Виконати дії.

$$1. \quad \sqrt{20} - \sqrt{45} + 3\sqrt{18} + \sqrt{72} - \sqrt{80}.$$

Розв'язання.

$$\sqrt[4]{20} - \sqrt{45} + 3\sqrt{18} + \sqrt[4]{72} - \sqrt{80} = 2\sqrt{20} - \sqrt{45} + 3\sqrt{18} + \sqrt{72} - \sqrt{80} = \\ = 4\sqrt{5} - 3\sqrt{5} + 9\sqrt{2} + 6\sqrt{2} - 4\sqrt{5} = 15\sqrt{2} - 3\sqrt{5}.$$

$$2. \sqrt[4]{9x} - \sqrt[3]{8y} - \sqrt[4]{27y} - \sqrt{16x}.$$

Розв'язання.

$$\sqrt[4]{9x} - \sqrt[3]{8y} - \sqrt[4]{27y} - \sqrt{16x} = \sqrt{9x} - \sqrt[3]{8y} - \sqrt[3]{27y} + \sqrt{16x} = \\ = 3\sqrt{x} - 2\sqrt[3]{y} - 3\sqrt[3]{y} + 4\sqrt{x} = 7\sqrt{x} - 5\sqrt[3]{y}.$$

2. Множення.

При множенні декількох радикалів однакової степені необхідно перемножити підкореневі вирази і з добутку добути корінь тієї ж степені.

При множенні радикалів з різними показниками їх необхідно попередньо привести до одного показника. Якщо перед радикалами маємо коефіцієнти, то їх перемножуємо.

Наприклад. Виконати дії.

Приклад 1.

$$A. 5\sqrt[4]{2a} \cdot 2\sqrt[4]{8a^3}.$$

$$\text{Розв'язання. } 5\sqrt[4]{2a} \cdot 2\sqrt[4]{8a^3} = 10\sqrt[4]{16a^4} = 10 \cdot 2a = 20a.$$

$$B. 4x\sqrt[3]{x^2} - 5y\sqrt[3]{xy} + xy\sqrt[3]{y^2} \cdot 2xy\sqrt[3]{xy}.$$

$$\text{Розв'язання. } 4x\sqrt[3]{x^2} - 5y\sqrt[3]{xy} + xy\sqrt[3]{y^2} \cdot 2xy\sqrt[3]{xy} = 8x^2y\sqrt[3]{x^3y} - \\ - 10xy^2\sqrt[3]{x^2y^2} + 2x^2y^2\sqrt[3]{xy^3}.$$

$$B. \sqrt[4]{5} - 4 \cdot \sqrt[4]{5} - 1.$$

$$\text{Розв'язання. } \sqrt[4]{5} - 4 \cdot \sqrt[4]{5} - 1 = 14\sqrt{25} - 8\sqrt{5} - 7\sqrt{5} + 4 = \\ = 70 + 4 - 15\sqrt{5} = 74 - 15\sqrt{5}.$$

Приклад 2.

$$A. \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[6]{2}.$$

$$\text{Розв'язання. } \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[6]{2} = \sqrt[6]{4} \cdot \sqrt[6]{2} = \sqrt[6]{8} = \sqrt{2}.$$

$$B. 4\sqrt{a} + \sqrt[6]{a} \cdot \left(\sqrt[3]{a^2} - a\sqrt[4]{a^3} \right).$$

Розв'язання. $\sqrt[4]{a} + \sqrt[6]{a} \cdot \left(\sqrt[3]{a^2} - a\sqrt[4]{a^3} \right) = \left(a^{12}\sqrt[6]{a^6} + \sqrt[12]{a^2} \right) \times$
 $\times \left(\sqrt[12]{a^8} - a^{12}\sqrt[9]{a^9} \right) = a^{12}\sqrt[4]{a^{14}} - a^{212}\sqrt[15]{a^{15}} + \sqrt[12]{a^{10}} - a^{12}\sqrt[11]{a^{11}} = a^{212}\sqrt[2]{a^2} -$
 $- a^{312}\sqrt[3]{a^3} + \sqrt[12]{a^{10}} - a^{12}\sqrt[11]{a^{11}} = a^{26}\sqrt[6]{a} - a^{34}\sqrt[4]{a} + \sqrt[6]{a^5} - a^{12}\sqrt[11]{a^{11}}.$

3. Ділення.

При діленні радикалів з однаковими показниками необхідно розділити їх підкореневі вирази і з частки добути корінь тієї ж степені.

При діленні радикалів з різними показниками необхідно попередньо привести до одного показника. Якщо маємо коефіцієнти, то їх ділимо.

Наприклад. Виконати ділення:

$$A. \sqrt[3]{6a^4} : \sqrt[3]{2a}.$$

Розв'язання. $\sqrt[3]{6a^4} : \sqrt[3]{2a} = \sqrt[3]{\frac{6a^4}{2a}} = \sqrt[3]{3a^3} = a\sqrt[3]{3}.$

$$B. \left(\frac{3x}{2} \sqrt{\frac{x}{y}} - 0,4 \sqrt{\frac{3}{xy}} + \frac{1}{3} \sqrt{\frac{xy}{2}} \right) : \frac{4}{15} \sqrt{\frac{3y}{2x}}.$$

Розв'язання. $\left(\frac{3x}{2} \sqrt{\frac{x}{y}} - 0,4 \sqrt{\frac{3}{xy}} + \frac{1}{3} \sqrt{\frac{xy}{2}} \right) : \frac{4}{15} \sqrt{\frac{3y}{2x}} =$
 $= \frac{45x}{8} \sqrt{\frac{2x^2}{3y^2}} - \frac{3}{2} \sqrt{\frac{2}{y^2}} + \frac{5}{4} \sqrt{\frac{x^2}{3}} = \frac{15x^2}{8y} \sqrt{6} - \frac{3}{2y} \sqrt{2} + \frac{5x}{12} \sqrt{3}.$

$$B. \left(\sqrt{8x^2y} - 2y\sqrt{x} - x\sqrt{x} \right) : \sqrt{2y} - \sqrt{x}.$$

Розв'язання. $\left(\sqrt{8x^2y} - 2y\sqrt{x} - x\sqrt{x} \right) : \sqrt{2y} - \sqrt{x} =$
 $= \frac{\sqrt{8x^2y} - 2y\sqrt{x} - x\sqrt{x}}{\sqrt{2y} - \sqrt{x}} =$
 $= \frac{\sqrt{2y} - x\sqrt{x}}{\sqrt{2y} - \sqrt{x}} + \frac{\sqrt{2y} - 2y\sqrt{x}}{\sqrt{2y} - \sqrt{x}} =$
 $= \frac{x(\sqrt{2y} - \sqrt{x}) - \sqrt{2xy}(\sqrt{2y} - \sqrt{x})}{\sqrt{2y} - \sqrt{x}} =$
 $= \frac{\sqrt{2y} - \sqrt{x} - \sqrt{2xy}}{\sqrt{2y} - \sqrt{x}} = x - \sqrt{2xy}.$

4. Піднесення до степені.

При піднесенні радикала до степені необхідно піднести до цієї степені підкореновий вираз, залишивши той же показник степені:

$$\sqrt[n]{a^k} = \sqrt[n]{a^k}.$$

Наприклад.

$$\left(\sqrt[3]{2ax^2}\right)^2 = \sqrt[3]{4a^2x^4} = x\sqrt[3]{4a^2x};$$

$$\left(\sqrt[3]{x+y^2}\right)^5 = \sqrt[3]{x^5+y^{10}} = x + y\sqrt[3]{x+y};$$

$$\left(\sqrt[n]{x^2+y^2}\right)^{np} = \sqrt[n]{x^{2p}+y^{2p}} = x^2 + y^2.$$

Алгебраїчну суму радикалів підносимо до степені користуючись формулами скороченого множення.

Наприклад.

$$\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^2 = 3-2\sqrt{6}+2 = 5-2\sqrt{6};$$

$$\begin{aligned} \left(\sqrt{3}-2\sqrt[3]{2}\right)^3 &= \sqrt{3^3}-3\cdot 3\cdot 2\sqrt[3]{2}+3\sqrt{3}\cdot 4\sqrt[3]{4}-8\sqrt[3]{2^3}= \\ &= 3\sqrt{3}-18\sqrt[3]{2}+12\sqrt{3}\cdot \sqrt[3]{4}-16=3\sqrt{3}-18\sqrt[3]{2}+12\sqrt[3]{432}-16. \end{aligned}$$

5. Добування кореня.

При добуванні кореня з кореня необхідно перемножити показники коренів:

$$\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a}.$$

Наприклад.

$$\sqrt{\sqrt[3]{a^2}} = \sqrt[6]{a^2} = \sqrt[3]{a}; \quad \sqrt[4]{a^2\sqrt[3]{a^4}} = \sqrt[4]{\sqrt[3]{a^{10}}} = \sqrt[12]{a^{10}} = \sqrt[6]{a^5}.$$

4.4. Логарифми, їх властивості, логарифмічні перетворення

Означення. Логарифмом числа b $b > 0$ за даною основою a $a > 0, a \neq 1$ називається показник степеня x , до якого треба піднести основу a , щоб отримати число b .

Позначення

$$\log_a b = x.$$

Таким чином, за означенням, якщо

$$x = \log_a b, \text{ то } a^x = b \Rightarrow a^x > 0.$$

Наприклад,

$$\log_2 8 = 3, \text{ оскільки } 2^3 = 8$$

$$\log_2 \frac{1}{4} = -2, \text{ оскільки } 2^{-2} = \frac{1}{4}.$$

Зауваження.

З означення логарифма випливають прості, але важливі рівності

$$\log_a a = 1, \quad \log_a 1 = 0,$$

оскільки $a^1 = a$, $a^0 = 1$ для будь-якого $a > 0$.

Розглянемо властивості логарифмів.

1. Логарифм добутку двох додатних чисел дорівнює сумі логарифмів співмножників

$$\log_a x \cdot y = \log_a x + \log_a y.$$

2. Логарифм частки (дроби) двох додатних чисел дорівнює різниці логарифмів діленого і дільника

$$\log_a \left(\frac{x}{y} \right) = \log_a x - \log_a y.$$

3. Логарифм степеня додатного числа дорівнює добутку показника степеня на логарифм цього числа

$$\log_a x^n = n \cdot \log_a x.$$

4. Логарифм кореня з додатного числа дорівнює частці від ділення логарифма підкореневого виразу на показник кореня

$$\log_a \sqrt[n]{x} = \frac{1}{n} \log_a x.$$

Використовуючи ці властивості, можна логарифмувати та потенціювати вирази або рівності.

Логарифмування – це дія, при якій знаходять логарифм виразу або логарифм лівої і правої частини рівності.

Потенціюванням називається дія, за допомогою якої по даному логарифму числа (виразу) знаходять це число (вираз).

Потенціювання – це дія, обернена до логарифмування.

При потенціюванні треба користуватися правилами, оберненими до правил логарифмування: суму логарифмів замінити логарифмом добутку, різницю логарифмів – логарифмом частки. Якщо перед знаком логарифма стоїть якийсь множник, то при потенціюванні його треба перенести в показник степеня під знак логарифма.

Приклади

1) Про логарифмувати рівність за основою **a**

$$x = \frac{a^2 \sqrt{b}}{2m^3}.$$

Розв'язання.

$$\begin{aligned} \log_a x &= \log_a \frac{a^2 \sqrt{b}}{2m^3} = \log_a a^2 + \log_a \sqrt{b} - \log_a 2 - \log_a m^3 = \\ &= 2\log_a a + \frac{1}{2}\log_a b - \log_a 2 - 3\log_a m. \end{aligned}$$

Оскільки $\log_a a = 1$, то нарешті отримаємо:

$$2\log_a a + \frac{1}{2}\log_a b - \log_a 2 - 3\log_a m.$$

2) Про потенціювати рівність

$$\log_a x = 3\log_a b - \frac{1}{2}\log_a c.$$

Розв'язання.

$$\log_a x = \log_a b^3 - \log_a \sqrt{c} = \log_a \frac{b^3}{\sqrt{c}} \Rightarrow x = \frac{b^3}{\sqrt{c}}.$$

Часто в логарифмічних перетвореннях використовують формули

$$\log_{a^k} b = \frac{1}{k} \log_a b, \quad 1$$

$$\log_{a^k} b^n = \frac{n}{k} \log_a b, \quad 2$$

$$\log_{a^n} b^n = \log_a b. \quad 3$$

Переходити від логарифмів за основою **a** до логарифмів за іншою основою **c** можна, користуючись такою формулою

$$\log_a x = \frac{\log_c x}{\log_c a}.$$

За допомогою цієї формули можна поміняти місцями число і основу

$$\log_a b = \frac{\log_b b}{\log_b a} = \frac{1}{\log_b a}.$$

Наведемо ще одну важливу рівність, яку називають **основною логарифмічною тотожністю**

$$a^{\log_a x} = x,$$

де $x > 0$, $a > 0$, $a \neq 1$.

Її легко перевірити, якщо прологарифмувати ліву і праву частини за основою a .

Зауважимо, що найчастіше використовують логарифми з основами 10 та e (e – це десятковий неперіодичний дріб, $e \approx 2,72$), які називають відповідно **десятковими** та **натуральними** логарифмами. Для них ведені спеціальні позначення

$$\log_{10} x = \lg x, \quad \log_e x = \ln x.$$

Відмітимо, що існують таблиці десятикових і натуральних логарифмів.

Наприклад, обчислити

$$1) 2\log_5 25 + 3\log_2 64; \quad 2) \log_2 \log_2 \sqrt[4]{2}.$$

Розв'язання.

$$\begin{aligned} 1) 2\log_5 25 + 3\log_2 64 &= 2\log_5 5^2 + 3\log_2 2^6 = \\ &= 2 \cdot 2 \cdot \log_5 5 + 3 \cdot 6 \cdot \log_2 2 = 4 + 18 = 22. \end{aligned}$$

При розв'язанні використали третю властивість логарифмів та рівність $\log_a a = 1$.

ЗАНЯТТЯ 5. РОЗВ'ЯЗУВАННЯ АЛГЕБРАЇЧНИХ РІВНЯНЬ

5.1. Поняття тотожності та рівняння. Розв'язок рівняння

В алгебрі розглядають два види рівностей – тотожності та рівняння.

Тотожність – це рівність, яка виконується при всіх допустимих значеннях букв, які в неї входять.

Рівняння – це рівність, яка виконується лише при деяких значеннях букв, які в неї входять.

Нехай задане рівняння вигляду:

$$F_1(x) = F_2(x).$$

Всі значення x , при яких функції F_1 і F_2 мають однакові значення, називаються *коренями* або *розв'язками* цього рівняння.

Приклад 1. $x = 3$ і $x = -2$ – корені рівняння $x^2 + 1 = x + 7$.

Множина всіх значень x , при яких існують (визначені) обидві функції $F_1(x), F_2(x)$, називається *областю значень* (ОДЗ) рівняння.

Приклад 2. ОДЗ рівняння $x^{\frac{1}{2}} + 3 = x^2$ – це область $[0, \infty)$.

Розв'язати рівняння – це значить знайти всі корені цього рівняння, тобто множину його розв'язків. Для розв'язування рівняння потрібно знати числову область, в якій знаходяться його корені.

Приклад 3. Рівняння $2x^4 + 5x^3 - 2x^2 - 10x - 4 = 0$ на множині дійсних чисел має корені $\left(-2, \sqrt{2}, -\frac{1}{2}, -\sqrt{2}\right)$, на множині

раціональних чисел – корені $\left(-2, -\frac{1}{2}\right)$, а на множині цілих чисел –

єдиний корінь (-2) . На множині натуральних чисел – розв'язків немає.

Два рівняння називаються *еквівалентними*, якщо множина коренів одного рівняння співпадає з множиною коренів іншого рівняння.

Властивості еквівалентних перетворень

1. Рівняння $F_1(x) = F_2(x)$ еквівалентне рівнянню $F_1(x) + \Phi(x) = F_2(x) + \Phi(x)$, якщо функція $\Phi(x)$ визначена при всіх допустимих значеннях x .
2. Рівняння $F_1(x) = F_2(x)$ еквівалентне рівнянню $F_1(x)\Phi(x) = F_2(x)\Phi(x)$, якщо функція $\Phi(x)$ визначена при всіх допустимих значеннях x , і $\Phi(x)$ не перетворюється на нуль.

3. Рівняння $F_1(x)=F_2(x)$ еквівалентне рівнянню $F_1(x)/\Phi(x)=F_2(x)/\Phi(x)$, якщо функція $\Phi(x)$ визначена при всіх допустимих значеннях x , і $\Phi(x)$ не перетворюється на нуль.
4. Рівняння $F(x)/\Phi(x)=0$ еквівалентне рівнянню $F(x)=0$ на множині допустимих значень початкового рівняння.
5. Рівняння $F(x)\Phi(x)=0$ еквівалентне двом рівнянням: $F(x)=0$, $\Phi(x)=0$.
6. Рівняння $F(x)^n=0$ еквівалентне рівнянню: $F(x)=0$.
7. Рівняння $F_1(x)^n=F_2(x)^n$ еквівалентне рівнянню $F_1(x)=|F_2(x)|$, якщо n – парне, і рівнянню $F_1(x)=F_2(x)$, якщо n – непарне.

5.2. Лінійні та квадратні рівняння

Лінійним називається рівняння вигляду $ax + b = 0$, $a \neq 0$. Лінійне рівняння завжди має єдиний корінь $x = -\frac{b}{a}$.

Приклад 4. Лінійне рівняння $2x - 7 = 0$ має корінь $x = \frac{7}{2}$.

Квадратним називається рівняння вигляду $ax^2 + bx + c = 0$, де a, b, c – дійсні числа, $a \neq 0$.

- Якщо $b = c = 0$, рівняння має вигляд $ax^2 = 0$, і корінь $x = 0$.
- Якщо $c = 0$, рівняння має вигляд $ax^2 + bx = 0$, і корені $x_1 = 0$,

$$x_2 = -\frac{b}{a}.$$

• Якщо $b \neq 0$, рівняння має вигляд $ax^2 + c = 0$, і корені $|x_{1,2}| = \sqrt{\left(-\frac{c}{a}\right)}$, якщо вираз $\left(-\frac{c}{a}\right)$ додатний, рівняння не має коренів, якщо $\left(-\frac{c}{a}\right) < 0$ – від'ємне.

• Якщо a, b, c – ненульові, тоді $x_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}$, $x_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}$, якщо вираз $D = b^2 - 4ac$, який називають дискримінант, більше нуля. Якщо $D < 0$, рівняння дійсних коренів не має.

Приклад 5. Коренями рівняння $2x^2 - 3x - 5 = 0$, будуть числа $x_1 = \frac{5}{2}$, $x_2 = -1$.

Приклад 6. Показати, що рівняння $vx^2 - (a - v)x - (a + v) = 0$ має 2 дійсних корені при a, v не рівних нулю.

Дискримінант квадратного рівняння $D = (a - v)^2 + 4v(a + v) = a^2 - 2av + v^2 + 4av + 4v^2 = a^2 + 2av + 3v^2 = (a + v)^2 + v^2$ — завжди більше нуля, тому рівняння має два дійсних різних кореня.

5.3. Розклад квадратного тричлена на множники. Теорема Вієта

Корені квадратного рівняння $ax^2 + vx + c = 0$ зв'язані з коефіцієнтами цього рівняння *теоремою Вієта*: якщо x_1, x_2 — корені рівняння, то $x_1 + x_2 = -\frac{v}{a}$, $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$. За допомогою теореми Вієта легко отримати формулу розкладу квадратного тричлена на множники:

$$ax^2 + vx + c = a(x - x_1)(x - x_2), \text{ де } x_1, x_2 - \text{корені рівняння.}$$

Приклад 7. При яких значеннях параметра a сума квадратів коренів рівняння

$$x^2 - ax + 4a = 0 \quad \text{дорівнює } 9?$$

За теоремою Вієта:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = a, \\ x_1 x_2 = 4a. \end{cases}$$

Де x_1, x_2 — корені рівняння

$$(x_1 + x_2)^2 = a^2,$$

$$x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 = a^2,$$

$$x_1^2 + x_2^2 = a^2 - 2x_1x_2 = a^2 - 2 \times 4a = a^2 - 8a = 9,$$

$$a^2 - 8a - 9 = 0,$$

$$a_1 = 9,$$

$$a_2 = -1.$$

При перевірці виявляється, що $a_1 = 9$ — не підходить, тому єдине значення параметра $a_2 = -1$.

5.4. Виділення повного квадрата в квадратному тричлені

Якщо в квадратному тричлені коефіцієнт $a \neq 0$, то його можна перетворити наступним чином:

$$\begin{aligned}
 ax^2 + bx + c &= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c = a\left[x^2 + 2x \times \frac{b}{2a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right] + c = \\
 &= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right] + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4a}
 \end{aligned}$$

Ця операція називається виділенням повного квадрата у квадратному тричлені.

Приклад 8. При якому значенні параметра K квадратний тричлен $x^2 + 2x - 9x + k^2 + 3k + 4$ є повним квадратом?

Якщо вважати цей вираз повним квадратом:

$$x^2 + 2ax + a^2, \text{ тоді}$$

$$\begin{aligned}
 & \begin{cases} a = k - 9 \\ a^2 = k^2 + 3k + 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{aligned} & k^2 + 3k + 4 = (k - 9)^2 \\ & k^2 + 3k + 4 = k^2 - 18k + 81 \\ & k = \frac{11}{3} \end{aligned}
 \end{aligned}$$

5.5. Рівняння, що зводяться до квадратних

Тричленне рівняння вигляду $ax^{2m} + bx^m + c = 0$, де m - натуральне число більше одиниці, за допомогою підстановки $x^m = t$, зводиться до квадратного рівняння:

$$at^2 + bt + c = 0$$

Якщо t_1 і t_2 - корені цього рівняння, то корені заданого рівняння знаходяться з рівностей $x^m = t_1, x^m = t_2$

Частинним випадком при $m=2$ є бікватратне рівняння $ax^4 + bx^2 + c = 0$

Приклад 9. Розв'язати рівняння $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$.

Зробимо заміну $x^2 = t$. Для t отримаємо квадратне рівняння:

$$t^2 - 13t + 36 = 0,$$

$$t_1 = 9, t_2 = 4$$

$$\begin{aligned} \text{Звідки } x^2 = 9 &\Rightarrow x_{1,2} = \pm 3 \\ x^2 = 4 &\Rightarrow x_{3,4} = \pm 2 \end{aligned}$$

5.6. Функція $y = ax^2 + bx + c$ та побудова її графіка

Графік квадратичної функції $y = ax^2 + bx + c, (a \neq 0)$ є парабола з вісю симетрії, яка паралельна вісі ОУ.

- Вершина параболи має координати: $\left(\frac{-b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a} \right)$

- Графік функції перетинає вісь ОУ в точці $(0, c)$

- Якщо $\Delta = b^2 - 4ac > 0$ графік перетинає вісь ОХ в точках

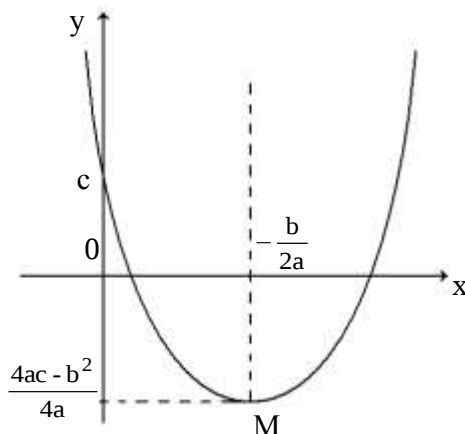
$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}; x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

- Якщо $\Delta = 0$ графік функції перетинає вісь ОХ в точці $x = \frac{-b}{2a}$

- Якщо $\Delta < 0$, графік функції не перетинає вісь ОХ

- Якщо $a > 0$, функція в точці $x = \frac{-b}{2a}$ має мінімум, гілки параболи направлені вгору.

- Якщо $a < 0$, функція в точці $x = \frac{-b}{2a}$ має максимум, гілки параболи направлені вниз.



Приклад 10. Побудувати графік функції $y = 2x^2 - 4x + 1$

1. $a=2>0$, тому гілки параболи напрямлені вгору
2. Координати вершини параболи:

$$x = -\frac{b}{2a} = 1; y = \frac{4ac - b^2}{4a} = -1$$

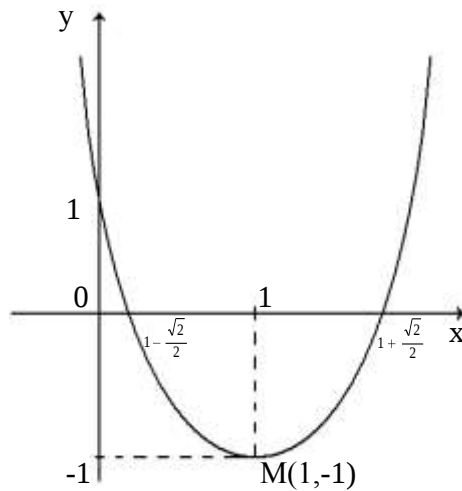
3. Нулі ϕ -ї :

$$2x^2 - 4x + 1 = 0$$

$$x_1 = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}; x_2 = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$$

4. Точки перетину графіка з віссю ОУ:

$$x=0; y=1$$



Вправи до заняття 5. (N- номер варіанта)

1. Розв'язати лінійні рівняння:

- а)** $N + x = 3 - x$;
- в)** $N(x - 3) = 8 - x$;
- с)** $Nz - 2 + 4(1 - z) = 5(1 - 2z) - 12$.

2. Розв'язати рівняння:

- а)** $(x - N)^2 = (x - 2)^2$;
- в)** $x^2 + N(x + 1)^2 = (2x - 1)(x - 3)$;
- с)** $x^4 - 5x^2 - N = 0$.

3. Знайдіть корені рівняння $x^2 - Nx + q = 0$ і число q , якщо один з них: а) удвічі більший від другого; в) становить $\frac{4}{5}$ другого.

4. При якому значенні параметра $K (K \neq 1)$ рівняння $(k - 1)x^2 + 2(k + 1)x + k - N = 0$ має лише один корінь?

5. Показати, що для будь-якого значення параметра $a (a \geq 1)$ вираз: $x^2 - 4x + 2(N + a)$ є невід'ємним.

6. Побудувати графіки функцій :

- а)** $y = Nx^2$
- в)** $y = x^2 + Nx$
- с)** $y = -2x^2 + 4x + N - 2$

Відповіді до вправ заняття 5.

1. а) $x = \frac{3-N}{2}$; в) $x = \frac{8+3N}{N+1}$; с) $z = -\frac{9}{N+6}$.

2. а) $x = \frac{N^2-4}{2N-4}$, $N \neq 2$,

x – довільне, $N = 2$.

в) $x = \frac{-2N-7 \pm \sqrt{44N+37}}{2N-2}$, $N \neq 1$,

$x = \frac{2}{9}$, $N = 1$.

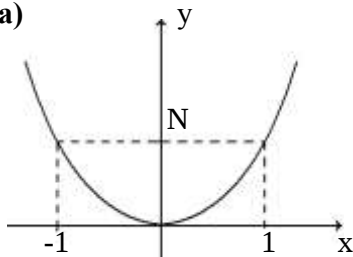
с) $x_{1,2,3,4} = \pm \sqrt{\frac{5 \pm \sqrt{25+4N}}{2}}$.

3. а) $x_1 = \frac{N}{3}$, $x_2 = \frac{2N}{3}$, $q = \frac{2N^2}{9}$;

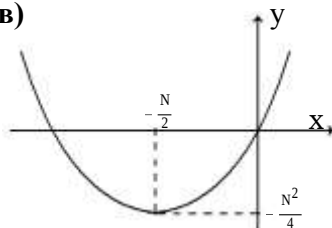
в) $x_1 = \frac{5N}{9}$, $x_2 = \frac{4N}{9}$, $q = \frac{20N^2}{81}$.

4. $k = \frac{N-1}{N+3}$.

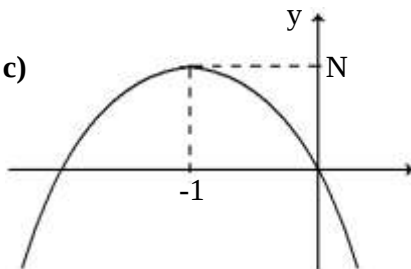
6. а)



в)



с)



ЗАНЯТТЯ 6. РАЦІОНАЛЬНІ, ІРАЦІОНАЛЬНІ, ПОКАЗНИКОВІ ТА ЛОГАРИФМІЧНІ РІВНЯННЯ

6.1. Розв'язування раціональних рівнянь

Рівняння називаються раціональними, якщо вони містять відношення багаточленів, залежних від невідомого.

Приклад 1. $\frac{x+1}{x-1} = 0$

Перед розв'язуванням раціональних рівнянь потрібно визначити область допустимих значень (ОДЗ) розв'язків, тобто тих значень невідомих, при яких знаменник дробу не дорівнює нулю.

При розв'язуванні таких рівнянь доцільно вільні члени рівняння перенести у праву частину рівняння, а усі члени, що містять невідоме, перевести у ліву частину рівняння і звести до спільного знаменника. Потім обидві частини рівняння помножити на знаменник, перенести праву частину рівняння у ліву частину і розв'язати рівняння.

Приклад 2. Розв'язати рівняння

$$\frac{2}{x-2} - \frac{x+2}{x+3} = \frac{10}{(x+3)(x-2)}$$
$$\text{ОДЗ } (-\infty, -3) \cup (-3, 2) \cup (2, \infty)$$
$$\frac{2(x+3) - (x+2)(x-2)}{(x-2)(x+3)} = \frac{10}{(x+3)(x-2)}$$

$$2(x+3) - (x^2 - 2) - 10 = 0$$

$$-x(x-2) = 0$$

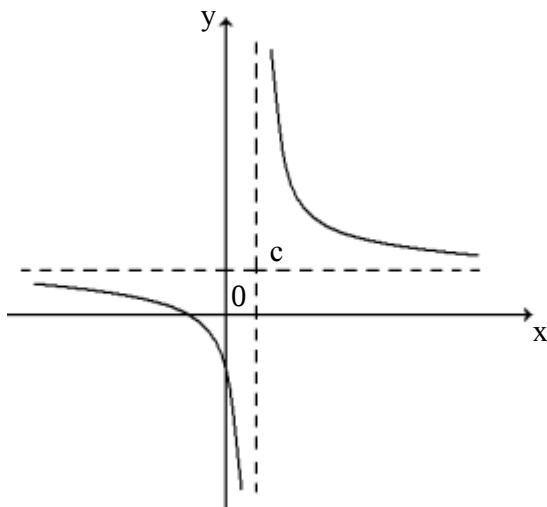
$$x_1 = 0, x_2 = 2$$

Корінь x_2 не належить ОДЗ, тому єдиний розв'язок рівняння: $x=0$.

6.2. Графік дробово-лінійної функції

$$y = \frac{ax + b}{cx + d}$$

Графіком дробово-лінійної функції є рівностороння гіпербола з асимптотами, паралельними осям координат.



Область визначення функції $\left(-\infty, -\frac{d}{c}\right) \cup \left(-\frac{d}{c}, \infty\right)$ Точка С має координати $\left(-\frac{c}{d}, \frac{a}{b}\right)$

Якщо величина $D = ad - cb$ менше нуля, то функція спадає в області визначення, а якщо $D > 0$, функція зростає.

Приклад 3. Побудувати графік функції

$$y = \frac{3}{-2x + 1}$$

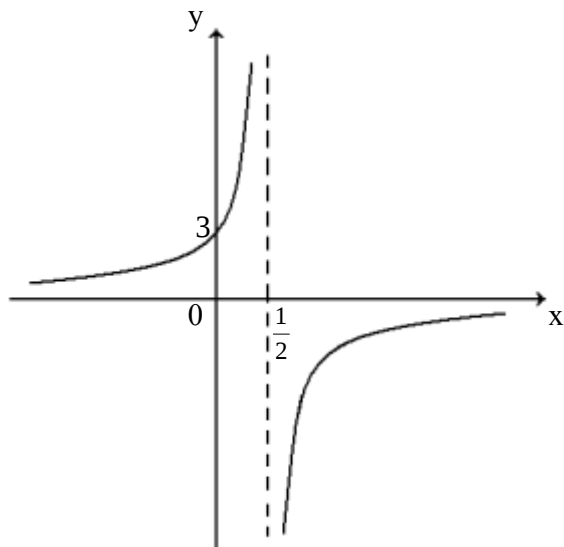
1 Область визначення функції: $-2x + 1 \neq 0$; тобто $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, \infty\right)$.

2 Координати точки С $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$.

3 Точка перетину з віссю ОУ : $X=0$ $Y=3$.

4 Величина $D = 3 > 0$, тому функція зростає.

Графіком функції буде гіпербола з центром в точці $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$.



6.3. Розв'язування іраціональних рівнянь

Іраціональними називаються такі рівняння, в яких невідоме міститься під знаком кореня. При розв'язуванні іраціональних рівнянь, слід керуватися наступними правилами:

- Визначити ОДЗ розв'язків, тобто область тих значень невідомого, для яких вираз під коренем парної степені буде невід'ємним, а знаменник, якщо він є, не дорівнює нулю.

- Обидві частини рівняння можна підносити до одного і того ж степеня але ,якщо степінь парний, то таке перетворення не є тотожним і слід зробити перевірку.

Приклад 4. Розв'язати рівняння

$$\sqrt{4-x} + \sqrt{5+x} = 3.$$

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} 4-x \geq 0 \\ 5+x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \leq 4 \\ x \geq -5 \end{cases} \Rightarrow -5 \leq x \leq 4$$

Піднесемо обидві частини рівняння до квадрату:

$$(\sqrt{4-x} + \sqrt{5+x})^2 = 9;$$

$$4-x + 2\sqrt{(4-x)(5+x)} + 5+x = 9;$$

$$2\sqrt{(4-x)(5+x)} = 0.$$

$$(4-x)(5+x) = 0;$$

$$x_1 = 4, x_2 = -5.$$

Обидва корені належать ОДЗ і задовольняють задане рівняння.

6.4. Розв'язування показникових та логарифмічних рівнянь

Показниковими називаються такі рівняння, які містять невідоме у показнику степеня. При розв'язуванні показникових рівнянь використовують властивості показникового виразу та спеціальні прийоми:

- Зведення обох частин рівняння до однакової основи;
- Винесення за дужки спільного множника;
- Введення нового невідомого;
- Логарифмування обох частин рівняння.

Приклад 5. Розв'язати рівняння

$$4^{x-\sqrt{x^2-5}} - \frac{5}{12} 2^{x-\sqrt{x^2-5}+2} - \frac{2}{3} = 0;$$

$$\text{ОДЗ: } x^2 - 5 \geq 0, \Rightarrow \begin{cases} x \geq \sqrt{5}, \\ x \leq -\sqrt{5}; \end{cases}$$

$$2^{2(x-\sqrt{x^2-5})} - \frac{5}{12} 2^2 2^{x-\sqrt{x^2-5}} - \frac{2}{3} = 0.$$

Введемо заміну $2^{x-\sqrt{x^2-5}} = t, \quad t > 0;$

$$t^2 - \frac{5}{3}t - \frac{2}{3} = 0; \quad \begin{matrix} t_1 = 2; \\ t_2 = -\frac{1}{3} < 0; \end{matrix} \quad \text{корінь } t_2 < 0 - \text{ не підходить,}$$

$$t_1 = 2, \quad \begin{matrix} 2^{x-\sqrt{x^2-5}} = 0; \\ x - \sqrt{x^2-5} = 1. \end{matrix}$$

$x = 3$ – належить ОДЗ.

6.5. Розв'язування логарифмічних рівнянь

Логарифмічними називають такі рівняння, які містять невідоме під знаком логарифма.

При розв'язанні логарифмічних рівнянь використовують основні властивості логарифмів.

- $\log_a a = 1;$
- $\log_a x = c \Rightarrow a^c = x;$
- $\log_a x^b = b \log_a x;$

- $\log_{a^k} x = \frac{1}{k} \log_a x$;
- $a^{\log_b c} = c^{\log_b a}$;
- $\log_a c = \frac{1}{\log_c a}$;
- $\log_a x + \log_a y = \log_a xy$;
- $\log_a x - \log_a y = \log_a \frac{x}{y}$;

А також такі прийоми:

- $\log_a F(x) = \log_a \varphi(x) \Rightarrow F(x) = \varphi(x)$,
- $a^{\log_a F(x)} = F(x)$;
- $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$;
- Введення нового невідомого.

При розв'язуванні логарифмічних рівнянь доцільно застосовувати такий порядок дій:

- Знайти ОДЗ, використовуючи те, що $\log_a n$ існує лише при $n > 0$ а також співвідношення:

$$\log_a n = \begin{cases} > 0, \text{ якщо } n > 1, a > 1, \\ = 0, \text{ якщо } n = 1, \\ < 0, \text{ якщо } n < 1, a > 1. \end{cases}$$

- Розв'язати логарифмічне рівняння, використовуючи:

$$\log_a F(x) = b \Rightarrow F(x) = a^b,$$

$$\log_a F(x) = \log_a \varphi(x) \Rightarrow F(x) = \varphi(x);$$

- Перевірити отримані розв'язки шляхом підстановки в задане рівняння.

Приклад 6. Розв'язати рівняння $4^{\log_2 \cos x} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-1}$

ОДЗ: $\cos x > 0$;

$$2^{2\log_2 \cos x} = 2$$

$$2\log_2 \cos x = 1$$

$$\cos^2 x = 2 \Rightarrow \text{коренів немає.}$$

Вправи до заняття 6. (N- номер варіанта)

1. Розв'язати раціональні рівняння:

а) $\frac{3x-2}{x-3} - \frac{x-4}{x+3} = \frac{15x+N}{x^2-9}$;

в) $\frac{N}{x^2-1} - \frac{2}{x-1} = 2 - \frac{x+4}{x+1}$.

2. Розв'язати ірраціональні рівняння:

а) $\sqrt{2x-2} - \sqrt{x+6} = N$;

в) $x^2 + 2x + 16 + \sqrt{x^2 + 2x + 16} = 2N$.

3. Розв'язати показникові рівняння:

а) $3 \times 7^{x+1} + 5 \times 7^{x-1} = 152N$;

в) $\left(\frac{14}{23}\right)^{x+\frac{2}{\sqrt{x}}} = \left(\frac{23}{14}\right)^{\frac{5}{\sqrt{x}}-x-N}$.

4. Розв'язати логарифмічні рівняння:

а) $2\lg(x+2) = \lg 3 + \lg(x+N)$;

в) $\log_3 \frac{2x+3}{\frac{5}{x-N}} = 1$.

5. Побудувати графік функції

а) $y = \frac{N}{x-2}$;

в) $y = 1 + \frac{N}{x-1}$.

Відповіді до вправ заняття 6.

1. а) ОДЗ $x \neq \pm 3$; $x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{37+4N}}{2}$;

в) ОДЗ $x \neq \pm 1$; $x_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{17+4N}}{2}$.

2. а) ОДЗ $x \geq 1$; $x_{1,2} = 8 - N^2 \pm \sqrt{16N^2 - 3N^4 - 192}$;

в) $x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1 - \frac{k^2}{4}}$, де $k = 31 - 4N + \sqrt{1 + 8N}$.

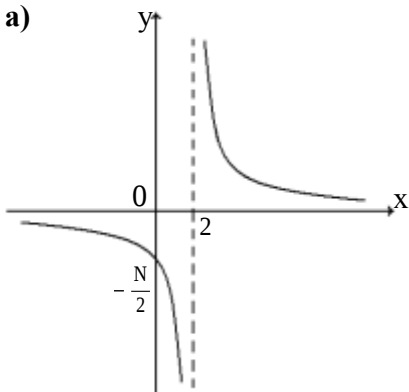
3. а) $x = \log_7 7N$;

в) $x = \frac{49}{N^2}$.

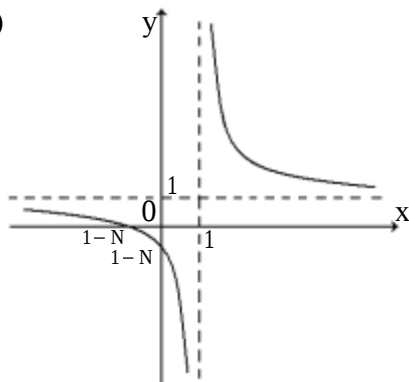
4. а) ОДЗ $x > \max \{2, -N\}$; $x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{12N - 4}}{2}$

в) ОДЗ $-\frac{3}{2} < x < N$; $x = \frac{-15 - 3N}{7}$

5. а)



в)



ЗАНЯТТЯ 7. НЕРІВНОСТІ, ЇХ ВЛАСТИВОСТІ ТА РОЗВ'ЯЗУВАННЯ

7.1. Лінійні нерівності, їх властивості

При розв'язуванні нерівностей використовують такі властивості:

- Нерівність не зміниться при додаванні та відніманні однакового дійсного числа у обох його частинах;
- Нерівність не зміниться, якщо обидві його частини помножити або поділити на однакове додатне число;
- При множенні та діленні обох частин нерівності на однакове від'ємне число, нерівність змінює свій знак на протилежний.

Приклад 1. Розв'язати нерівність:

$$x + \frac{3}{4} \leq \frac{5x - 2}{3} + 1$$

Приводимо нерівність до загального знаменника.

$$12x + 9 \leq 20x - 8 + 12$$

$$12x + 9 \leq 20x + 4$$

$$-8x \leq -5$$

$$x \geq \frac{5}{8}$$

7.2. Квадратні та раціональні нерівності

При розв'язуванні нерівностей, які містять квадратні тричлени та раціональні вирази потрібно визначити область допустимих значень розв'язків, тобто тих значень невідомих, при яких значення добутків не дорівнює нулю. У загальному випадку розв'язування нерівностей вигляду $F(x) \geq 0$, $F(x) > 0$, $F(x) \leq 0$, $F(x) < 0$ для будь-якого випадку $F(x)$ доцільно проводити методом інтервалів. Суть цього методу полягає в тому, що корені рівняння $F(x)=0$ розділяють всю область визначення функції $F(x)$ на інтервали, на яких $F(x)$ має постійний знак. Тоді можна визначити знак функції на кожному інтервалі шляхом підстановки у функцію замість x будь-якої точки x_0 з розглянутого інтервалу, а потім обирати такі інтервали, на яких функція має знак заданої нерівності.

Приклад 2. Розв'язати нерівність:

$$\frac{5x+9}{x-2} \leq -\frac{14}{x}$$

$$\text{ОДЗ: } x \neq 0, x \neq 2$$

$$\frac{5x+9}{x-2} + \frac{14}{x} \leq 0$$

$$\frac{5x^2 + 23x - 28}{x(x-2)} \leq 0$$

$$\frac{(x-1)(x+5.6)}{x(x-2)} \leq 0$$

Застосуємо метод інтервалів:



Звідси розв'язок нерівності належить області $[-5.6; 0) \cup [1; 2)$

7.3. Нерівності, що містять модулі

Використовуючи означення та властивості модуля дійсного числа, можна розв'язувати нерівності, які містять невідому під знаком модуля, звести до розв'язання нерівностей, які модуль не містить

Приклад 3. Розв'язати нерівність.

$$|x-4| \leq 9$$

За означенням модуля цю нерівність можна звести до подвійної нерівності:

$$-9 \leq x-4 \leq 9, \text{ або}$$

$$-5 \leq x \leq 13.$$

Приклад 4. . Розв'язати нерівність

$$|3x-5| < x-1$$

Оскільки ліва частина нерівності більша або дорівнює нулю при будь-яких значеннях x , права частина тим більше має бути додатною: $x-1 > 0$; $x > 1$

Розв'яжемо нерівність для двох інтервалів, коли значення під модулем невід'ємне, і коли значення під модулем від'ємне.

а) $3x - 5 \geq 0$; $x \geq \frac{5}{3}$, тоді нерівність приймає вигляд:

$$3x - 5 < x - 1$$

$$2x < 4$$

$$x < 2$$

Враховуючи умову $x \geq \frac{5}{3} \Rightarrow \frac{5}{3} \leq x < 2$

б) $3x - 5 < 0$, $x < \frac{5}{3}$ Враховуючи умову $x > 1 \Rightarrow 1 < x < \frac{5}{3}$

Нерівність приймає вигляд:

$$-3x + 5 < x - 1$$

$$4x > 6$$

$$x > \frac{3}{2}$$

Вираховуючи розглянутий інтервал $\Rightarrow 1 < x < \frac{5}{3}$ маємо: $\frac{3}{2} < x < \frac{5}{3}$

Об'єднуючи розв'язки, отримані на окремих інтервалах дістанемо остаточну відповідь:

$$\frac{3}{2} < x < 2$$

7.4. Показникові та логарифмічні нерівності

Використовуючи означення та властивості показникові та логарифмічної функції, можна розв'язувати нерівності, які містять невідому величину під знаком таких функцій.

Починати розв'язування потрібно зі знаходження області допустимих значень невідомої. Розв'язуючи показникові нерівності, слід звернути увагу на основу степеня:

Нехай задана нерівність вигляду

$$a^{F(x)} > a^{G(x)}.$$

1) якщо $a > 1$, то $F(x) > G(x)$ оскільки функція $y = a^x$ в цьому випадку зростаюча;

2) якщо $a < 1$, то $F(x) < G(x)$ оскільки функція $y = a^x$ в цьому випадку спадна.

Приклад 5. Розв'язати нерівність

$$2^x + 2 \times 2^{-x} - 3 < 0$$

$$\text{ОДЗ: } x \in (-\infty, \infty)$$

$$2^x + 2^{1-x} - 3 < 0$$

Введемо нову змінну $t = 2^x$, де $T > 0$

$$t + \frac{2}{t} - 3 < 0, \frac{t^2 - 3t + 2}{t} < 0$$

$$\text{Оскільки } T > 0 \quad (t-1)(t-2) < 0$$

$$1 < t < 2, \text{ або}$$

$$1 < 2^x < 2$$

Оскільки 2^x зростаюча функція, тому $0 < x < 1$

Все сказане вище для показникових нерівностей є справедливим і для логарифмічних нерівностей

Для нерівності :

$$\log_a F(x) > \log_a G(x)$$

1) якщо $a > 1$, то $F(x) > G(x)$,

2) якщо $a < 1$, то $F(x) < G(x)$.

Приклад 6. Розв'язати нерівність

$$\log_{\frac{1}{2}}(x+13) < \log_{\frac{1}{4}}(x+1)$$

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} x+13 > 0 \\ x+1 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > -13 \\ x > -1 \end{cases} \Rightarrow x > -1$$

$$\log_{\frac{1}{2}}(x+13) < \log_{\frac{1}{2}^2}(x+1), \Rightarrow \log_{\frac{1}{2}}(x+13) < \log_{\frac{1}{2}}(x+1);$$

$$\log_{\frac{1}{2}}(x+13) < \log_{\frac{1}{2}}\sqrt{x+1}$$

Оскільки основа логарифму менша одиниці:

$$x+13 > \sqrt{x+1}$$

$$(x+13)^2 > x+1$$

$$x^2 + 25x + 168 > 0$$

Дискримінант $D = 625 - 672 < 0$, тому нерівність виконується на усій числовій вісі. Враховуючи ОДЗ отримаємо відповідь

$$X > -1$$

Вправи до заняття 7.

$$1. x + N \leq \frac{2x-1}{5} - 1;$$

$$2. 2Nx + 5 < \frac{x-1}{2} + \frac{x+1}{3};$$

$$3. \frac{N-x}{1+\frac{x}{N}} \leq \frac{N^2}{x};$$

$$4. \frac{x^2 - 5x + 6}{x - N - 3} \geq 0;$$

$$5. |2x - 5| < x - N;$$

$$6. N^x + 2 \cdot N^{2x} - 1 < 0;$$

$$7. \log_2 (x + N) \leq 2 \log_4 (x + 1).$$

Відповіді до вправ заняття 7.

$$1. x \leq -\frac{5N+6}{3};$$

$$2. x < \frac{61}{5-12N};$$

$$3. N; 0;$$

$$4. 2; 3 \cup N+3; \infty;$$

$$5. \begin{cases} x \geq \frac{5}{2}; \\ x < 5 - N; \end{cases} \begin{cases} x < \frac{5}{2}; \\ x > \frac{5+N}{3}. \end{cases}$$

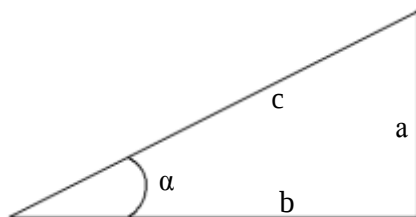
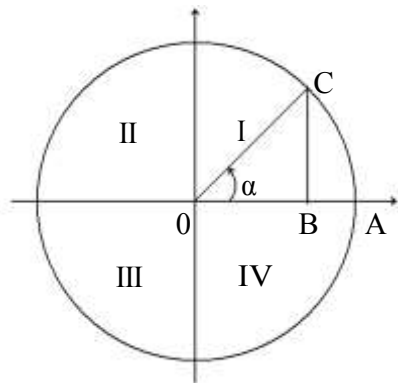
$$6. x = 0;$$

$$7. \text{ОДЗ } \begin{cases} x > -N; \\ x > N-1. \end{cases}$$

ЗАНЯТТЯ 8. ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ ТРИГОНОМЕТРІЇ. ТРИГОНОМЕТРИЧНІ ПЕРЕТВОРЕННЯ ТА ФУНКЦІЇ

8.1. Означення тригонометричних функцій: $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$.

Тригонометричні функції кута α визначаються за допомогою тригонометричного кола (кут α вимірюється від нерухомого радіуса OA до рухомого радіуса OC проти часової стрілки, радіус $R=1$), а також з прямокутного трикутника для гострих кутів.



синус: $\sin\alpha = BC = \frac{a}{c}$;

косинус: $\cos\alpha = OB = \frac{b}{c}$;

тангенс: $\operatorname{tg}\alpha = \frac{CB}{OB} = \frac{a}{b}$;

котангенс: $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{OB}{CB} = \frac{b}{a}$.

Тригонометричним функціям надається певний знак в залежності від того, в якій чверті тригонометричного кола лежить рухомий радіус OC .

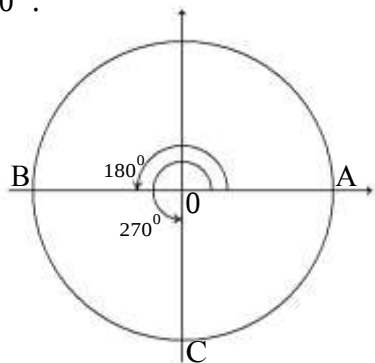
Чверть	Величина кута α	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$
I	$0^\circ - 90^\circ$	+	+	+	+
II	$90^\circ - 180^\circ$	+	−	−	−
III	$180^\circ - 270^\circ$	−	−	+	+
IV	$270^\circ - 360^\circ$	−	+	−	−

Границі зміни:

синус та косинус: від -1 до $+1$;

тангенс та котангенс: від $-\infty$ до $+\infty$.

Приклад 1. Знайти синус, косинус, тангенс і котангенс кутів 180° і 270° .



При повороті на 180° навколо точки O радіус OA , що дорівнює 1 , переходить у радіус OB , а при повороті на 270° – у радіус OC . Оскільки точка B має координати $B(-1, 0)$, тоді:

$$\sin 180^\circ = \frac{0}{1} = 0, \quad \cos 180^\circ = \frac{-1}{1} = -1, \quad \operatorname{tg} 180^\circ = \frac{0}{-1} = 0,$$

$$\sin 270^\circ = \frac{-1}{1} = -1, \quad \cos 270^\circ = \frac{0}{1} = 0, \quad \operatorname{ctg} 270^\circ = \frac{0}{-1} = 0,$$

$\operatorname{ctg} 270^\circ$, $\operatorname{tg} 270^\circ$ не мають змісту.

8.2. Основні тригонометричні формули

Співвідношення між тригонометричними функціями одного і того ж аргументу. (n – ціле число)

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1;$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}, \quad x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n;$$

$$\operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}, \quad x \neq \pi n;$$

$$\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{ctg} x = 1, \quad x \neq \frac{\pi n}{2};$$

$$1 + \operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}, \quad x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n;$$

$$1 + \operatorname{ctg}^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}, \quad x \neq \pi n.$$

Формули додавання:

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y;$$

$$\sin(x-y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y;$$

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y;$$

$$\cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y.$$

Формули подвійного аргументу.

$$\sin 2x = 2\sin x \cos x;$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x.$$

Формули половинного аргументу:

$$\sin^2 \frac{x}{2} = \frac{1 - \cos x}{2};$$

$$\cos^2 \frac{x}{2} = \frac{1 + \cos x}{2};$$

$$\operatorname{tg} \frac{x}{2} = \frac{\sin x}{1 + \cos x} = \frac{1 - \cos x}{\sin x}, \quad x \neq \pi + 2\pi n.$$

Формули перетворення суми в добуток.

$$\sin x \sin y = \frac{1}{2} (\cos(x-y) - \cos(x+y));$$

$$\cos x \cos y = \frac{1}{2} (\cos(x-y) + \cos(x+y));$$

$$\sin x \cos y = \frac{1}{2} (\sin(x-y) + \sin(x+y)).$$

Приклад 2. Відомо, що $\sin \alpha + \cos \alpha = \frac{1}{2}$. Знайти $\cos 4\alpha$.

Якщо $\sin \alpha + \cos \alpha = \frac{1}{2}$, то $\sin^2 \alpha + 2\sin \alpha \cos \alpha + \cos^2 \alpha = \frac{1}{4}$.

$$1 + \sin 2\alpha = \frac{1}{4},$$

$$\sin 2\alpha = -\frac{3}{4}.$$

$$\cos 4\alpha = 1 - 2\sin^2 2\alpha = 1 - 2 \cdot \frac{9}{16} = 1 - \frac{9}{8} = -\frac{1}{8}.$$

Тому, $\cos 4\alpha = -\frac{1}{8}$.

8.3. Значення тригонометричних величин у кутах:
 $0^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 90^\circ$.

α	0°	30°	45°	60°	90°
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\operatorname{tg} \alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	–
$\operatorname{ctg} \alpha$	–	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

Приклад 3. Спростити вираз:

$$A = 4a^2 \sin^4 \frac{\pi}{4} - 6ab \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{6} + b^2 \operatorname{ctg}^2 \frac{\pi}{4}.$$

Підставимо відомі значення тригонометричних функцій:

$$\begin{aligned} A &= 4a^2 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^4 - 6ab \left(\frac{\sqrt{3}}{3} \right)^2 + b^2 \cdot 1^2 = 4a^2 \frac{1}{4} - 6ab \frac{1}{3} + b^2 = \\ &= a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2. \end{aligned}$$

8.4. Формули зведення

Функція	$\beta = 90^\circ \pm \alpha$	$\beta = 180^\circ \pm \alpha$	$\beta = 270^\circ \pm \alpha$	$\beta = 360^\circ - \alpha$
$\sin \beta$	$+\cos \alpha$	$\pm \sin \alpha$	$-\cos \alpha$	$-\sin \alpha$
$\cos \beta$	$\pm \sin \alpha$	$-\cos \alpha$	$\pm \sin \alpha$	$+\cos \alpha$
$\operatorname{tg} \beta$	$\pm \operatorname{ctg} \alpha$	$\pm \operatorname{tg} \alpha$	$\pm \operatorname{ctg} \alpha$	$-\operatorname{tg} \alpha$
$\operatorname{ctg} \beta$	$\pm \operatorname{tg} \alpha$	$\pm \operatorname{ctg} \alpha$	$\pm \operatorname{tg} \alpha$	$-\operatorname{ctg} \alpha$

Приклад 4. Спростити вираз:

$$A = \sin\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + \sin \alpha - \alpha + \operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right).$$

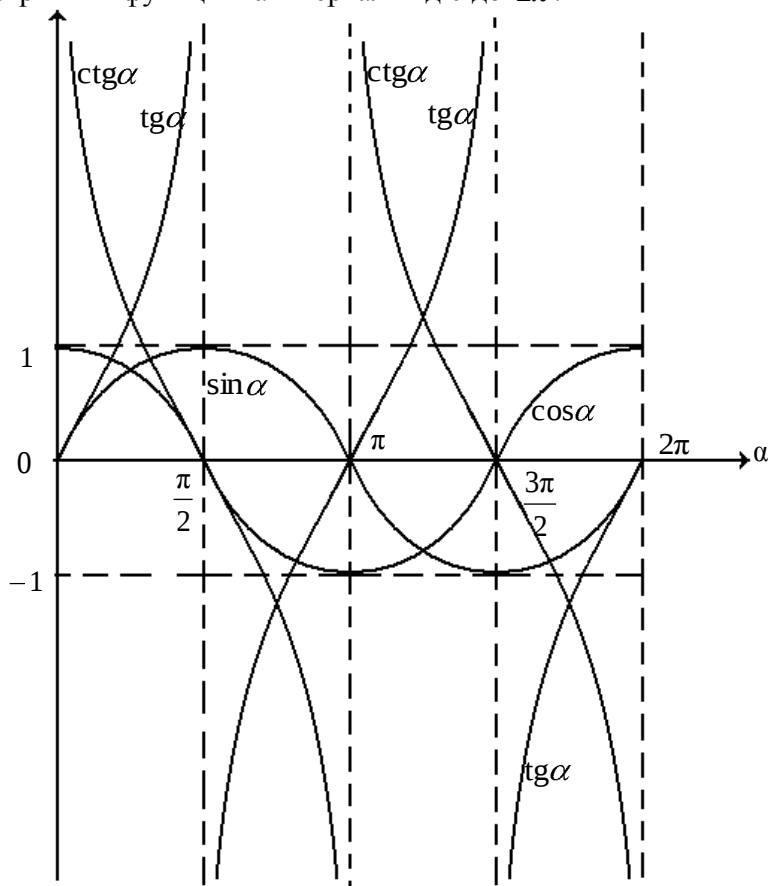
Використовуючи формули зведення:

$$A = -\cos \alpha \cdot \operatorname{tg} \alpha + \sin \alpha + \operatorname{tg} \alpha = -\cos \alpha \cdot \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + \sin \alpha + \operatorname{tg} \alpha =$$

$$= -\sin \alpha + \sin \alpha + \operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} \alpha.$$

8.5. Графіки основних тригонометричних функцій

Тригонометричні функції є періодичними з періодом 2π : синус та косинус; з періодом π : тангенс та котангенс. Характер зміни тригонометричних функцій на інтервалі від 0 до 2π :



Для тригонометричних функцій виконується:

$$\sin \alpha = -\sin \alpha; \quad \cos \alpha = \cos \alpha;$$

$$\operatorname{tg} \alpha = -\operatorname{tg} \alpha; \quad \operatorname{ctg} \alpha = -\operatorname{ctg} \alpha;$$

тому косинус є парною функцією, а всі інші – непарними.

Приклад 5. З'ясувати, чи буде функція парною чи непарною:

$$y = \frac{x + \sin x}{\operatorname{tg}^3 x}.$$

$$\text{За означенням: } y(-x) = \frac{-x + \sin(-x)}{\operatorname{tg}^3(-x)} = \frac{-x - \sin x}{-\operatorname{tg}^3 x} = \frac{x + \sin x}{\operatorname{tg}^3 x} = y(x).$$

Функція парна.

Розглянемо перетворення графіків тригонометричних функцій.

- 1) Для побудови графіка функції $y = f(x) + B$, потрібно заданий графік $y = f(x)$ зсунути вздовж осі ОУ на $|B|$ одиниць

$$\begin{cases} \text{вгору, для } B > 0; \\ \text{вниз, для } B < 0. \end{cases}$$

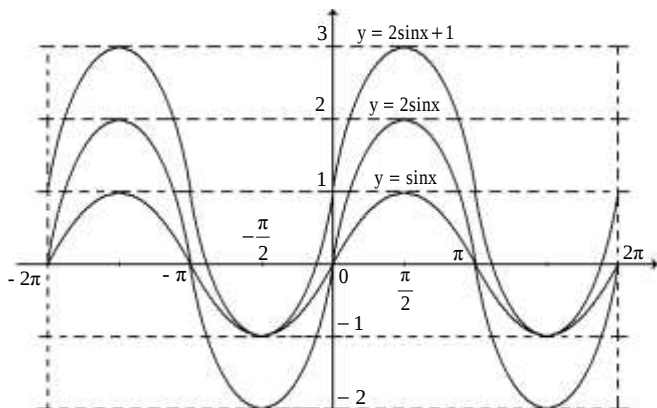
- 2) Для побудови: $y = f(x + a)$, потрібно заданий графік $y = f(x)$ зсунути вздовж осі ОХ на $|a|$ одиниць

$$\begin{cases} \text{вліво, для } a > 0; \\ \text{вправо, для } a < 0. \end{cases}$$

- 3) Для побудови: $y = Af(x)$, $A > 0$ потрібно розтягнути заданий графік від осі ОХ в A разів, якщо $A > 1$ і стиснути до осі ОХ в A разів, якщо $A < 1$.

- 4) Для побудови: $y = f(kx)$, $k > 0$ потрібно розтягнути заданий графік від осі ОУ в k разів, якщо $k < 1$ і стиснути до осі ОХ в k разів, якщо $k > 1$.

Приклад 6. Побудувати графік функції: $y = 2\sin x + 1$



8.6. Обернені тригонометричні функції та їх графіки

Оберненими тригонометричними функціями від x називають величини y , визначені рівностями:

$$y = \operatorname{Arcsin} x \text{ (арксинус), якщо } x = \sin y;$$

$$y = \operatorname{Arccos} x \text{ (арккосинус), якщо } x = \cos y;$$

$$y = \operatorname{Arctg} x \text{ (арктангенс), якщо } x = \operatorname{tg} y;$$

$$y = \operatorname{Arcctg} x \text{ (арккотангенс), якщо } x = \operatorname{ctg} y.$$

(y вимірюється в радіанах).

Обернені тригонометричні функції багатозначні, їх головні значення позначаються: $\arcsin x$, $\arccos x$, $\operatorname{arctg} x$, $\operatorname{arcctg} x$; вони обмежені границями:

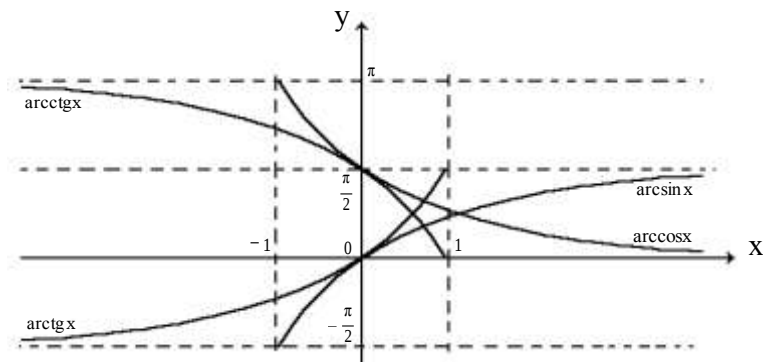
$$-\frac{\pi}{2} \leq \arcsin x \leq \frac{\pi}{2},$$

$$0 \leq \arccos x \leq \pi,$$

$$-\frac{\pi}{2} < \operatorname{arctg} x < \frac{\pi}{2},$$

$$0 < \operatorname{arcctg} x < \pi.$$

Графіки їх головних значень зображені на малюнку:



Співвідношення між оберненими тригонометричними функціями.

$$\arcsin x = -\arcsin (-x) \quad \arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x;$$

$$\arccos x = \pi - \arccos (-x) \quad \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arcctg} x;$$

$$\operatorname{arctg} x = -\operatorname{arctg} (-x) \quad \operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x;$$

$$\operatorname{arccotg} x = \pi - \operatorname{arctg} x \quad \text{для } x < 0;$$

(формули вірні тільки для головних значень);

$$\sin(\arcsin x) = x \quad \text{для } |x| \leq 1;$$

$$\sin(\arcsin x) = x \quad \text{для } |x| \leq 1;$$

$$\arccos(\cos x) = x \quad \text{для } 0 \leq x \leq \pi;$$

$$\cos(\arccos x) = x \quad \text{для } |x| \leq 1;$$

$$\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x) = x \quad \text{для } |x| < \frac{\pi}{2};$$

$$\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) = x \quad \text{для довільного } x;$$

$$\operatorname{arccotg}(\operatorname{ctg} x) = x \quad \text{для } 0 \leq x \leq \pi;$$

$$\operatorname{ctg}(\operatorname{arccotg} x) = x \quad \text{для довільного } x.$$

Приклад 7. Обчислити: а) $\arcsin(\sin 275^\circ)$;

$$\text{б) } \operatorname{tg}(\operatorname{arctg}(-1 - \arcsin \frac{\sqrt{3}}{2})).$$

$$\begin{aligned} \arcsin(\sin 275^\circ) &= \arcsin(\sin 180^\circ + 77^\circ) = -\arcsin(\sin 77^\circ) = \\ &= -\arcsin\left(\sin \frac{77\pi}{180}\right) = -\frac{77\pi}{180}. \end{aligned}$$

$$\operatorname{tg}(\operatorname{arctg}(-1 - \arcsin \frac{\sqrt{3}}{2})) = -1 - \frac{\pi}{3}.$$

Вправи до заняття 8. (N- номер варіанта)

1. Виразити кут $\alpha = 2N^\circ$ в радіанах.

2. Скільки градусів містить кут $\alpha = -\frac{\pi}{5N}$?

3. Обчислити а) $N \sin \frac{\pi}{3} - 2 \cos \frac{N\pi}{2} + 3 \operatorname{ctg} \frac{N\pi}{2}$;

$$\text{б) } \sin N\pi + 2 \cos(N-1)\pi - 3 \operatorname{tg} 2N\pi.$$

4. Нехай $\sin \alpha = -\frac{1}{N+1}$, $\pi < \alpha < \frac{2\pi}{2}$. Знайти значення інших тригонометричних функцій кута α .

5. Спростити вирази: а) $\sin^4 \alpha - \cos^4 \alpha + N \cos^2 \alpha$;

б) $\operatorname{tg}^4 N\alpha + \operatorname{tg}^2 N\alpha$;

в) $\frac{\sin^3 \alpha + \cos^3 \alpha}{\sin \alpha + \cos \alpha} + N \sin 2\alpha - 1$.

6. Використовуючи формули зведення, обчислити:

$$\sin\left(\frac{N\pi}{2} - \alpha\right) + \cos\left(\frac{N\pi}{2} + \alpha\right) + \operatorname{tg}\left(\frac{3N\pi}{2} + \alpha\right) + \operatorname{ctg}\left(\frac{N\pi}{2} + \alpha\right).$$

7. Відомо, що $\sin \alpha + \cos \alpha = N$. Знайти $\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha$.

8. Довести, що $\sin A + \sin B + \sin C = 4 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}$, якщо A, B, C – кути трикутника.

9. Обчислити: а) $\sin\left(2 \arcsin \frac{a}{N}\right)$;

б) $\sin\left(\arcsin \frac{a}{N} + \arcsin \frac{b}{N}\right)$, де $0 < a, b < 1$.

10. Побудувати графік функцій: а) $y = \frac{1}{2} \cos x - 1$;

б) $y = 2 \operatorname{tg} x - 1$.

Відповіді до вправ заняття 8.

1. $\alpha = \frac{N\pi}{90}$.

2. $\alpha = -\frac{36^\circ}{N}$.

3. а) $\frac{N\sqrt{3}}{2}$; б) $2 \ll 1^N$.

4. $\cos \alpha = -\sqrt{1 - \frac{1}{N+1}}$; $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{\sqrt{N^2 + 2N}}$; $\operatorname{ctg} \alpha = \sqrt{N^2 + 2N}$.

5. а) $N - 2 \cos^2 \alpha + 1$; б) $\frac{\operatorname{tg}^2 N\alpha}{\cos^2 N\alpha}$; в) $\left(N - \frac{1}{2}\right) \sin 2\alpha$.

6. N – парне: $\left(1 - \frac{N+2}{2}\right) \sin \alpha + \cos \alpha + \operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha;$

N – непарне: $\left(1 - \frac{N+3}{2}\right) \cos \alpha - \cos \alpha + \operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha.$

7. $\frac{1 + 2N^2 - N^4}{2}.$

8. Вказівка: $C = \pi - A + B.$

9. а) $\frac{2a\sqrt{N^2 - a^2}}{N^2};$

б) $\frac{a}{N} \sqrt{1 - \frac{b^2}{N^2}} + \frac{b}{N} \sqrt{1 - \frac{a^2}{N^2}} = \frac{a\sqrt{N^2 - b^2} + b\sqrt{N^2 - a^2}}{N^2}.$

ЗАНЯТТЯ 9. ТРИГОНОМЕТРИЧНІ РІВНЯННЯ

9.1. Найпростіші тригонометричні рівняння та їх розв'язки

Найпростішими тригонометричними рівняннями називаються рівняння виду:

$$\sin x = a, \quad |a| \leq 1;$$

$$\cos x = a, \quad |a| \leq 1;$$

$$\operatorname{tg} x = a, \quad -\infty < a < \infty;$$

$$\operatorname{ctg} x = a, \quad -\infty < a < \infty.$$

Формули розв'язків (для n – ціле число):

Значення a	$\sin x = a$	$\cos x = a$	$\operatorname{tg} x = a$	$\operatorname{ctg} x = a$
$ a < 1$	$(-1)^n \arcsin a + \pi n$	$\pm \arccos a + 2\pi n$	$\arctg a + \pi n$	$\operatorname{arccctg} a + \pi n$
$ a > 1$	–	–		
$a = 0$	πn	$\frac{\pi}{2} + \pi n$	πn	$\frac{\pi}{2} + \pi n$
$a = -1$	$-\frac{\pi}{2} + 2\pi n$	$\pi + 2\pi n$	$-\frac{\pi}{4} + \pi n$	$-\frac{\pi}{4} + \pi n$
$a = 1$	$\frac{\pi}{2} + 2\pi n$	$2\pi n$	$\frac{\pi}{4} + \pi n$	$\frac{\pi}{4} + \pi n$

Приклад 1. Розв'язати рівняння:

$$\sin\left(\frac{\pi}{6} - 2x\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Згідно з таблиці рішень:

$$\frac{\pi}{6} - 2x = (-1)^n \arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} + \pi n,$$

$$\frac{\pi}{6} - 2x = (-1)^n \frac{\pi}{3} + \pi n, \quad x = (-1)^{n+1} \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{12} \cdot 2n + 1, \quad \text{де } n \in \mathbb{Z}.$$

9.2. Тригонометричні рівняння, що зводяться до розв'язку квадратних рівнянь.

При розв'язуванні тригонометричних рівнянь часто використовують метод введення нової змінної, відносно якої отримують квадратне рівняння.

Приклад 2. Розв'язати рівняння.

$$a) 3\sin^2 x + 2\cos^2 x = 5\sin x;$$

$$б) 5\sin^2 x - 3\sin x \cos x - 2\cos^2 x = 0.$$

$$a) \text{ Застосуємо формулу: } \cos^2 x = 1 - \sin^2 x.$$

$$\sin^2 x - 5\sin x + 2 = 0; \text{ Нехай } \sin x = t;$$

$$t^2 - 5t + 2 = 0; \quad t_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{17}}{2};$$

$$\sin x = \frac{5 - \sqrt{17}}{2}; \quad \sin x \neq \frac{5 + \sqrt{17}}{2} > 1.$$

$$x = (-1)^n \arcsin \frac{5 - \sqrt{17}}{2} + \pi n.$$

б) Поділимо обидві частини рівняння на $\cos^2 x$. (З рівняння випливає, що $\cos x \neq 0$).

$$5\tg^2 x - 3\tg x - 2 = 0; \quad \tg x = t;$$

$$5t^2 - 3t - 2 = 0; \quad t_{1,2} = \frac{3 \pm 7}{10};$$

$$t_1 = 1; \quad \tg x = 1; \quad x = \frac{\pi}{4} + \pi n;$$

$$t_2 = -\frac{2}{5}; \quad \tg x = -\frac{2}{5}; \quad x = \operatorname{arctg}\left(-\frac{2}{5}\right) + \pi n.$$

Вправи до заняття 9. (N- номер варіанта)

Розв'язати рівняння:

$$1. \sin Nx = 0;$$

$$2. 2\cos \frac{x}{N} = 1;$$

$$3. \sqrt{3}\tg\left(x + \frac{\pi}{N}\right) = -1;$$

$$4. \operatorname{ctg}\left(\frac{3x}{4} + \frac{\pi}{2}\right) = N;$$

$$5. \sin 2x \cos 2x = \frac{1}{N};$$

$$6. \cos^2 Nx - \sin^2 Nx = 0;$$

$$7. \sin x + N \operatorname{ctg} x = 0;$$

$$8. \sin x + \cos x = \frac{1}{N};$$

$$9. 3\sin^2 x - 4\cos^2 x = \frac{N}{2} \sin 2x;$$

$$10. \cos^2 Nx + \sin Nx = \frac{1}{4}.$$

Відповіді до вправ заняття 9. (n – ціле число)

$$1. x = \frac{\pi n}{N};$$

$$2. x = \left(\pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n \right) N;$$

$$3. x = \frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{N} + \pi n;$$

$$4. x = \frac{4}{3} \left(\pi n - \arctg N \right);$$

$$5. x = \frac{1}{4} \left(\left(1 - \frac{N}{2} \right) \arcsin \frac{1}{N} + \pi n \right);$$

$$6. x = \frac{\pi}{4N} + \frac{\pi n}{2N};$$

$$7. x = \pm \arccos \left(\frac{N}{2} \pm \sqrt{N^2 - 1} \right) + 2\pi n, \text{ коли } \left| \frac{N}{2} \pm \sqrt{N^2 - 1} \right| \leq 1,$$

у протилежному випадку розв'язків немає.

$$8. x = \left(1 - \frac{N}{2} \right) \arcsin \frac{1}{\sqrt{2N}} - \frac{\pi}{4} + \pi n;$$

$$9. x = \arctg \left(\frac{N \pm \sqrt{N^2 + 48}}{6} \right) + \pi n;$$

$$10. x = \frac{1}{N} \left(\left(1 - \frac{N}{2} \right) \arcsin \left(\frac{1 - \sqrt{6}}{2} \right) + \pi n \right).$$

ЛІТЕРАТУРА

1. Барковський В.В., Барковська Н.В. Основи елементарної математики. – К.: НАУ, 1999.
2. Барковський В.В., Барковська Н.В. Вища математика для економістів. – К.: ЦУЛ, 2002.
3. Бевз Г.П. Алгебра: Підручник для 7-9 кл. – К.: Школяр, 2002.
4. Макаричев Ю.М. та ін. Алгебра: Підручник для 9 кл. – К.: Освіта, 1994.
5. Слєпкань З.І. Збірник завдань для державної підсумкової атестації з алгебри (9 клас). – Харків: Гімназія, 2004.
6. Скєнави М.И. Сборник задач по математике для поступающих в вузы. – К.: Каннон, 1997.
7. Бондаренко С.В., Потапенко Г.Д., Тєранова Л.А. Математика, Начальный курс. – К.: УМК ВО, 1992.

Шевченко Світлана Миколаївна, кандидат педагогічних наук, доцент кафедри вищої математики Державного університету телекомунікацій. Автор 60 наукових праць. Галузь наукових інтересів: прикладна математика, методика та теорія викладання математики в вищих навчальних закладах.

Скубак Олександр Миколайович, кандидат технічних наук, доцент, доцент кафедри вищої математики Державного університету телекомунікацій. Автор 50 наукових праць. Галузь наукових інтересів: прикладна математика, математичне моделювання процесів в економіці, проблеми надійності волоконо-оптичних кабелів.

Мусієнко Андрій Петрович, кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри вищої математики Державного університету телекомунікацій. Автор 35 наукових праць. Галузь наукових інтересів: теорія функцій, прикладна математика, функціональна стійкість телекомунікаційних мереж.

.

Навчальне видання

Шевченко Світлана Миколаївна

Скубак Олександр Миколайович

Мусієнко Андрій Петрович

ОСНОВИ ЕЛЕМЕНТАРНОЇ МАТЕМАТИКИ

Навчальний посібник

Технічний редактор А.П. Мусієнко